CHRISTOPHORI CLAVII BAMBERGENSIS E SOCIETATE IESV.

GEOMETRIA PRACTICA, ARITHMETICA PRACTICA, ALGEBRA.

OMNIA IN HAC EDITIONE AB IPSO Authore multis in locis correcta & aucta.



BIBLIOTECA NAZIONALE NAPOLI

MOGVNTIÆ,

Sumptibus ANTONII HIERAT, excudebat

IOANNES VOLMARI.

Cum Gratia & Priuilegio Sacræ Cæſar. Maieſt.

ANNO M. DC. XII.

CHRISTOPHORI CLAVII BAMBERGENSIS è SOCIETATE IESV

GEOMETRIA PRACTICA.

PRÆFATIO.

QVANDOQVIDEM Mathematicarum diſciplinarum ſtadium ſcribendo ingreſſi, nonnullam eius partem, fauente Deo, percurrimus: Geometriæ practicæ tractatio omittenda non fuit, vt niſi metam tangere licuerit, ab illa certe quam minime diſtemus. Ætatem ſenectute grauem allicit operis iucunditas, laborem leuat varietas, amicorum preces tantum non cogunt, quò mea ferebar ſponte, ſumma cum feſtinatione properare. Et vero, cum perpetua multorum annorum experientia comperetim, admodum paucos eſſe, qui non in Mathematicis exerceantur eo conſilio, vt quæ didicerint, ad aliquem vſum trahant: in hoc quicquid eſt laboris veniebam alacer, vt qui fructus è Mathematicis percipi poſſint ad humanæ vitæ cōmoda, non inani venditatione, ſed re ipſa conſtaret. Etenim dum certa ratio traditur, qua camporum longitudines, altitudines montium, vallium depreſſiones, locorum omnium inæqualitates inter ſe, & interualla deprehendere metiendo debeamus: cuilibet liquet, vt arbitror, quantum commodi, vtilitatiſque ſubſtructioni ædificiorum, cultui agrorum, armorum tractationi, contemplationi ſiderum, aliiſque artibus, & diſciplinis ex horum cognitione manare poſſit. Hæc enim vna Mathematicarum rerum ſcientiæ pars, ſicut ab artificibus ob ſui neceſſitatem auide ſemper eſt arrepta: ita ob inſignes vtilitates, quas in re tota militari ſuppeditat, in maximorum Principum, Regumq; aulis omni tempeſtate verſata eſt. Quamobrem & multos, & eruditos viros habuit, qui partes illius omnes accurata, & diligenti ſcriptione perſecuti ſunt: Inter quos, vt Leonardus Piſanus, Frater Lucas Pacciolus, Nicolaus Tartalea, Orontius, Cardanus, aliique præcipuas obtinuerunt: ita eximia in cæteris laude floruerunt. Primas tamen adiudicarim Jo. Antonio Magino præſtanti Mathematico; qui tametſi tantum linearum dimenſiones docuit, ea tamen copia, doctrina, perſpicacitate cuncta tradidit, vt locum non modo iis,

qui ante ſcripſerunt,ſed ſpem poſteris, æqualis gloriæ ne dum maioris, ademiſſe videatur. Verum quoniam & hic de vnica tantum parte fuit ſollicitus: & alii,quamuis aggreſſi omnia, multa tamen inter ſcribendum prætericrunt: decreui,ſi qua poſſem,perficere: vt, quicquid vtiliter in Geometria practica ab aliis traditum, à me etiam inuentum eſt, vnius operis gyro clauderetur. Quod opus,cum ſpecies tres quantitatis continuæ ſint,in tria membra,parteſq; præcipuas ſecuimus: In prima rectas lineas,in altera ſuperficies, corpora metientes in poſtrema: cui adnectuntur alia,quę non tam ad quantitatis dimenſionem,quam ad alias Geometriæ praxes, ac demonſtrationes pertinent,à noſtro inſtituto non aliena.

VNIVERSAM autem tractationem in octo libros partiti ſumus.

PRIMVS propoſitiones tres omnino neceſſarias, & per quam vtiles ad omnium magnitudinum dimenſionem accurate perficiendam continet.

IN ſecundo dimenſio linearum rectarum per Quadrantem Aſtronomicum tam pendulum,quam ſtabilem abſoluitur.

TERTIVS de earundem rectarum linearum dimenſione per Quadratum Geometricum tum pendulum,tum ſtabile,etiam per vnicam ſtationem agit. Vbi etiam, qua ratione ſine huiuſmodi inſtrumento earundem rectarum linearum Dimenſiones nonnullæ fieri poßint,traditur.

QVARTVS ſuperficierum areas inquirit:

QVINTVS ſolidas magnitudines metitur.

ATQVE hiſce quinque libris omnes tres partes Geometriæ practicæ à nobis propoſitæ explicantur.

IN ſexto deinde libro de Geodæſia,id eſt, de ſuperficierum rectilinearum cuiuſque generis Diuiſione tam per rectas ex certo aliquo puncto ductas, quã per lineas parallelas,diſſeritur. Vbi nonnulla etiam alia problemata ad idem argumentũ ſpectantia ſoluuntur. Item qua ratione figuræ tam planæ, quam ſolidæ,vna cum circulo ac ſphæra in data proportione augendæ ſint, minuendæve. In cuius rei gratiam modi aliquot proponuntur inueniendarum duarum mediarum proportionalium inter duas rectas datas. Deniq; ars facilis, & expedita pro extrahendis radicibus cuiuſq; generis præſcribitur.

SEPTIMVS de figuris Iſoperimetris diſputat.

IN Octauo denique varia problemata ac theoremata Geometrica pertractantur.

GEO-

GEOMETRIÆ PRACTICÆ

LIBER I.

Tria capita ad dimenſionem linearum ſumme neceſſaria complectens,

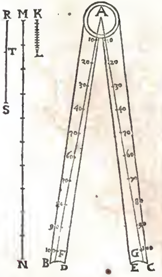
VT magnitudinum dimenſio omnibus ſuis numeris abſoluta, perfectaque reddatur, tria primo hoc libro diligenter explicanda prius erunt. Primum conſtruenda eſt norma quædam variarum partium, quam non incongrue Inſtrumentum partium vocare poſſumus; quod in eo variæ partes & ad lineas rectas, & ad circulos diuidendos, tum etiam ad alias operationes ſiue Geometricas, ſiue Aſtronomicas rite perficiendas contineantur. Huius enim vſus credi vix poteſt, quam late pateat tum in dimetiendis magnitudinibus ſine numerorum multiplicatione, tum vero maxime in horologiis Solaribus ea ratione, quam per lineas Tangentes in noua horologiorum deſcriptione tradidimus, deſcribendis, & in aliis rebus tam Geometricis, quam Aſtronomicis, vt ex iis, quæ capite primo huius libri, & alibi tradituri ſumus, perſpicuum fiet. Secundo loco conficiendus eſt quadrans, in quo, præter gradus, Minuta quoque ac Secunda (quamuis in eo deſignata non ſint) cognoſci, ac diſcerni queant; docendumque, qua ratione idem præſtari poſſit in quolibet quadrante in 90. gradus exquiſite diſtributo: partesq; centeſimæ, atque milleſimæ in recta quauis linea in pauciſſimas partes æquales diuiſa dignoſcendæ ſint. Tertio atque poſtremo loco proponenda erunt, ac ſoluenda varia problemata triangulorum rectilineorum, vt & latera eorum, atque anguli ex quibuſdam datis, & cognitis facile poſſint cognoſci. Quamuis enim eadem hæc problemata ad finem Lemmatis 53. lib. 1. noſtri Aſtrolabii expoſita ſint, tamen ne ſtudioſus lector ad illud Lemma ſæpius, & non ſine moleſtia recurrere cogatur, libet ea hic repetere totidem pene verbis, quot in prædicto lemmate perſcripta ſunt. Sed ecce tria hæc, quæ præmittenda eſſe diximus, tribus capitibus explicata ſequuntur.

INSTRVMENTI PARTIVM
Conſtructio, atque vſus.

CAPVT I.

FIANT ex orichalco, vel alia materia ſolida duæ regulæ ABD, AEC, æquales omnino, quæ in A, ita coniungantur clauo aliquo tereti, vt circa A, vniſormiter poſſint moueri, quemadmodum in Norma vulgari, quæ, prout opus eſt, conſtringi poteſt, & dilatari, fieri ſolet. Deinde ex A, in planis dictarum regularum duæ rectæ ducantur AF, AG, eæq; in 100. particulas æquales diſtribuantur. vel in 1000. ſi longiores ſint. Ita enim ex qualibet recta quotuis partes centeſimæ, aut milleſimæ abſcindi poterunt. Immo ſi ſumatur linea KL, continens 11. particulas ex illis 100. vel 1000. diuidaturque in 10. partes æquales, ſi quidem ſecta ſit vtraque regula in 100. partes æquales, poterunt beneficio rectæ KL, continentis 11. particulas eiuſmodi, & in 10. partes æquales diuiſæ, ex data recta qualibet accipi quotuis milleſimæ partes, perinde ac ſi partes ſingulæ centeſimæ in vtraque regula ſectæ eſſent in denas particulas æquales: ſi vero vtraque regula in 1000. particulas diſtributa ſit, & linea KL, talium 11. partium in 10. particulas diſſecta, poterunt ex quauis linea recta propoſita partes, quot quis voluerit, milleſimarum decimæ auferri, non ſecus ac ſi ſingulæ partes milleſimæ in regula diſtributæ eſſent in 10. particulas æquales, vt in vſu inſtrumenti dicemus. *Inſtrumentum partium quo pacto conſtruatur.*

RVRSVS ſi regula contineat 100. partes, & recta quæpiã MN, conſtans ex 101. eiuſmodi particulis diſtribuatur in 100. partes, poterimus ex data accipere partes decimas milleſimarum. At ſi in regula notatæ ſint 1000. partes & linea quępiam continens eiuſmodi partes 101. ſecetur in 100. partes, deprehendi poterunt in qualibet recta quotcunque partes centenſimæ milleſimarum, ac ſi partes ſingulę milleſimæ in regula complecterentur partes 100. Si denique linea earum partium 1001, diuidatur in 1000, partes, capiemus in quauis recta partes milleſimas milleſimarum, perinde ac ſi partes milleſimæ ſingulæ in regula partes 1000. comprehenderent, vt ex vſu inſtrumenti conſtabit. Atq; hæc eſt, conſtructio inſtrumenti in vna facie pro partibus linearum rectarum inquirendis.



IN altera vero inſtrumenti facie deſignantur chordæ omnium arcuũ quadrantis hoc modo. Ductis ex centro A, rectis AF, AG, vt in priori facie, ſumendus eſt quadrans circuli chordam habens æqualem rectæ AF, & in rectas AF, AG, transferenda chorda gradus 1. illius quadrantis, deinde chorda grad. 2. 3. 4. 5. & ſic deinceps vſq; ad chordam 89. graduum: ita enim ex quolibet quadrante abſcindere licebit arcum quotcunq; graduum, vt Num. 16. dicetur: quamuis nos beneficio particularum æqualium in priori facie poſitarum capiemus ex quadrante propoſito non ſolum gradus integros, ſed etiam minuta, quod Num. 14. docebimus. Atque ita abſoluta eſt conſtructio inſtrumenti in altera facie. Huius inſtrumenti vſus ampliſſimus eſt, vt diximus, & non obſcure ex iis, quæ ſequuntur, intelligi poteſt.

Centeſima vel milleſima partes in recta linea quo modo accipiantur.

1 QVANDO enim linea recta propoſita rectæ AF, vel AG, in priori facie inſtrumenti æqualis eſt, nullo negotio ex ea abſcindentur quotcunq; partes centeſimæ, prout inſtrumentum in 100. aut 1000. partes fuerit diuiſum; ſi nimirum partes, quæ deſiderantur, ex inſtrumento in datam rectam transferantur.

2 QVANDO vero propoſita linea non eſt æqualis rectæ AF, vel AG, in inſtrumento, dilatandum inſtrumẽtũ eſt, vel conſtringẽdũ, donec interuallũ inter F, G, datæ lineæ ſit ęquale. Nã circinus inter partes rectarũ AF, AG, quæ, deſiderantur, extenſus dabit in recta propoſita partes quæſitas. Vt ſi data recta æqualis ſit ipſi FG, & deſiderentur 50. partes centeſimæ, continebit interuallum inter partes 50. & 50. in lineis AF, AG, partes 50. ex 100. in quas recta FG, cogitatur eſſe diuiſa, quod ſic demonſtratur. [a] Rectæ FG, & 50. (ſi concipiatur ducta recta à parte 50. ad partem 50.) parallelæ ſunt, propterea quod latera AF, AG, proportionaliter ſecta ſunt in 50. & 50. Sunt enim tam AF, AG, quam A 50. A 50. [b] æquales. Igitur erit vt A 50. ad rectum 50. 50. ita AF, ad FG. Et permutando vt A 50. ad AF, ita recta 50. 50. ad FG. Cum ergo A 50. contineat partes 50. ex 100. totius AF, continebit quoque recta 50. 50. partes 50. ex 100. in quas diuiſa eſſe concipitur FG. Eademque ratio eſt de cæteris. Nam verbi gratia interuallum quoq; inter puncta 80. & 80. partes 80. complectetur ex 100. totius FG, &c quæ demonſtratio locum etiam habet, ſi in AF, contineantur 1000. partes vt conſtat.

a 2. ſexti.

b 4. ſexti.

Diuiſa recta in quotuis partes æquales, quot eiuſmodi partes in quauis alia cõtineantur.

c 4. ſexti.

NON aliter, propoſitis duabus rectis, quarum altera in quotlibet partes æquales cogitetur eſſe diuiſa, cognoſcemus, quotnam ex illis partibus altera recta contineat; hac ſcilicet ratione. Aperto inſtrumento, ſtatuatur interuallum rectæ diuiſæ inter partes, in quas diuiſa intelligitur. Nam ſi altera per circinum transferatur inter duas alias partes eaſdem, vel inter duo puncta ab eiſdem duabus partibus æqualiter diſtantia, continebit illa recta tot partes, quot in regula AF, includuntur inter centrum A, & circini pedem: [c] propterea quod eandem proportionem habet ſegmentum regulæ AF, vſque ad interuallum rectæ diuiſæ, ad ſegmentum eiuſdem regulæ vſque ad interuallum alterius lineæ, quam interuallum rectæ diuiſæ ad interuallum alterius lineæ habet, &c. Quod ſi linea hęc altera eſſet nimis longa, auferendum ex ea primum eſſet interuallum inter 100. & 100. quoties fieri poteſt. Deinde reliquum ſegmentum transferendum in inſtrumentum, vt dictum eſt. Verbi gratia; ſi altera rectarum diuiſa ſit in 50. partes æquales, ſumemus ei æquale interuallum inter 50. & 50. Si ergo altera habuerit interuallum æquale rectæ FG, inter 100. & 100. continebit ea 100. partes æquales. Et ſi in ea ſupereſſet ſegmentum æquale interuallo 30. 30. contineret eadem recta partes 130. Quod ſi interuallum inter 100. & 100. ter in data recta contineretur, & inſuper ſegmentũ æquale interuallo 40. 40. complecteretur ea recta particulas 340. &c.

Tangentes quo modo accipiãtur reſpectu ſinus totius 100.

3 ITAQVE ſi in Tangentibus nouæ deſcriptionis horologiorum (vt huius inſtrumenti vtilitatẽ quoq; in deſcribendis horologiis aperiamus) ſinus totus ſtatuatur 100. quantuſcunq; ille ſit, eiq; interuallum FG, ponatur æquale, capiemus commodiſſime quamcunq; Tangentem tabulæ in noua deſcriptione poſitæ, ſi ea, abiecta prima tantum figura ad dexteram, minor fuerit quam 100. Vt ſi quæratur Tangens Gr. 39. min. 57. quoniam ea in tabula eſt 838. ſi abiiciatur prima figura 8. ad dexteram, erit Tangens 83. reſpectu ſinus totius 100. vel potius 84. propterea quod figura 8. abiecta maior eſt, quam 5. ac proinde pro ea vnitas adiicienda eſt, cum conſtituat $\frac{8}{10}$. hoc eſt, pluſquam $\frac{1}{2}$. Itaque accipiantur in inſtrumento partes 84. paulo minus, vt dictum eſt, habebitur Tangens quæſita: ſi vero Tangens in tabula, abiecta prima figura ad dexteram, maior fuerit quam 100. accipienda eſt Tangens per denas, atque vnitates expreſſa, relictis centenis, & illi Tangenti poſtea ſinus totus adiiciendus eſt toties, quoties vnitas in centenis reperitur. Vt ſi quis velit Tangentem Gr. 68. min. 50. Quoniam ea in tabula eſt 2583. & adiecta prima figura, 258. ſumenda eſt Tangans 58. cique ſinus totus FG, bis adiiciendus, & ſic de reliquis.

6 QVOD

4. QVOD ſi rectam KL, partium 11. in 10. æquales partes diuiſam adhibere velimus accipere poterimus ex data recta partes milleſimas. Quoniam enim ita ſe habet linea KL, ad vnam eius partem, vt portio A, 10. rectæ AF, decem partium ad vnam, cum vtrobique proportio ſit decupla; erit permutando quoque KL, ad A, 10. vt vna particula ipſius A 10. Cum ergo KL, contineat ipſam A, 10. ſemel, & inſuper partem ipſius decimam, (ſumpta eſt enim KL, partium 11. qualium 10. eſt A, 10.) continebit quoque vna particula ipſius KL, vnam particulam ipſius A 10. ſemel, & decimam inſuper eius partem: Atque adeo duæ illius includent duas huius cum $\frac{2}{10}$. & tres continebunt tres cum $\frac{3}{10}$. & ſic deinceps. Quare ſi verbi gratia deſiderentur $\frac{87}{1000}$. accipiendæ erunt octo partes ex 100. totius AF, & inſuper $\frac{7}{10}$. ſequentis partis nonæ, cum decima pars vnius centeſimæ ſit $\frac{1}{1000}$. quod ita fiet. Circino aliquo ſumantur 7. partes ex KL, eæque in AF, transferentur ex qualibet parte. Nam pes circini mobilis auferet $\frac{7}{10}$. ex octaua parte poſt pedem circini immobilem, quæ particula in nonam partem eſt transferenda. Ita enim, cum octo partes complectantur $\frac{80}{10}$. vnius centeſimæ, (quod quælibet pars contineat $\frac{10}{10}$. vnius centeſimæ) hoc eſt, $\frac{80}{1000}$ & $\frac{7}{10}$. vnius centeſimæ contineant $\frac{7}{1000}$. comprehendet tota linea abſciſſa $\frac{87}{1000}$. Item ſi quis cupiat $\frac{17}{1000}$. accipienda erit vna pars ipſius AF, & $\frac{7}{10}$. ſequentis partis ſecundæ, vt paulo ante dictum eſt. Vel ſic agemus. Sumptis 7. partibus ex KL, transferemus eas in AF, vbicunque libuerit. Nam abſciſſæ partes erunt $7\frac{7}{10}$. Vna ergo pars cum $\frac{7}{10}$. continebit $\frac{17}{1000}$. Denique ſi optentur $\frac{457}{1000}$. ſumendæ erunt ex recta AF, partes 45. cum hæ æquiualeant $\frac{450}{1000}$. Deinde $\frac{7}{10}$. ex ſequenti parte quadrageſima ſexta, beneficio ſeptem particularum rectæ KL, &c.

Milleſimæ partes, quo modo capiantur, etiamſi in inſtrumento contineantur tantum partes 100.

5 SI ergo ſinus totus ponatur 1000. habebuntur Tangentes, vt in tabula nouæ deſcriptionis horologiorum poſitæ ſunt, nulla figura abiecta. Sed quando Tangens maior eſt quam 1000. relictis millenis, accipiendæ ſunt reliquæ partes milleſimæ pro Tangente, eiq; toties ſinus totus addendus, quoties vnitas in millenis relictis reperitur. Vt ſi quis velit Tangentem Grad. 40. min. 30. quæ in tabula eſt 854. accipiendæ ſunt in regula AF, partes 85. & $\frac{4}{10}$. vnius. Ita enim Tangens continebit partes 854. ex 1000. At ſi quæratur Tangens continebit partes 854. ex 1000. At ſi quæratur Tangens Grad. 80. min. 0. quæ in tabula eſt 5671. relictis millenis, accipiendæ ſunt partes 67. & $\frac{1}{10}$. vnius partis, & Tangenti 671. addendus ſinus totus quinquies.

Tangentes quo modo inueniantur, poſito ſinu toto 100.

6 PARI ratione ſi adhibeatur recta MN, partium 101. diuiſa in 100. depromemus ex recta AF, partes decimas milleſimarum; cum quælibet particula rectæ MN, contineat vnam particulam ipſius AF, ſemel, & inſuper $\frac{1}{100}$. Ita vt quælibet particula rectæ AF, diuiſa eſſe cogitetur in 100. particulas; ac proinde tota AF, ſit 10000. particularum, quod eodem modo demonſtrabitur. Eſt enim eadem proportio MN, ad vnam particulam ſuam centeſimam, quæ rectæ AF, ad vnam ſuam centeſimam, &c.

Decimæ partes milleſimarum quo modo ſumantur, etiamſi inſtrumentum diuiſum ſit in 1000. partes duntaxat.

7 ATQVE hac ratione haberi poterunt Tangentes, poſito ſinu toto 10000. abiectis nimirum tribus figuris primis ex Tangentibus tabulæ in noſtro Theodoſio deſcriptæ. Vt ſi velimus Tangentem Grad. 78. Min. 30. quæ in tabula (abiectis tribus figuris) eſt 49151. relictis denis millenarum, accipiemus partes 9151. nimirum partes 91. ex 100. regulæ AF, & $\frac{51}{100}$. vnius quod fiet, ſi partes 51. rectæ MN, transferantur in AF. Circinus enim vltra partes 51. abſcindet $\frac{51}{100}$. Nam quia ſingulæ particulæ rectæ AF cõcipiuntur ſectæ in 100. particulas, continebuntur in 91. partibus particulæ 9100. quibus ſi addantur 51. habebitur Tangens 9151. Huic tandem apponendus eſt ſinus totus quater, propter quatuor denas millenarum relictas. Facile autem ad 91. partes adiicies particulam continentem $\frac{51}{100}$. vnius centeſimæ, ſi eam, (quæ nimirum vltra partes 51. regulæ AF, exiſtit) cum vna parte regulæ AF, transferas, vt pes circini inter partes 91. & 92. cadat, hoc eſt, ſi eam cum vna parte transferas ex parte 90. vel cum duabus partibus, ex parte 89. &c.

Tangẽtes, poſito ſinu toto 10000. quo pacto ſumantur.

8 INVENTA porro Tangente in vtraque regula AF, AG, dabit interuallum inter Tangentem regulæ AF, & Tangentem regulæ AG, eandem Tangentem reſpectu ſinus totius FG.

Qua ratione ex inuenta parte milleſima, vel decies milleſima in AF, eadem reperiatur reſpectu dati ſinus totius.

9 QVANDO autem Tangens tam exigua eſt, vt eius interuallum prope punctum A, accipi nequeat, vtemur hoc artificio. Sit verbi gratia ſumenda Tangens 7. partium reſpectu ſinus totius FG. Sumptis duabus Tangentibus maioribus, quarum maior minorem ſeptem vnitatibus ſuperet, nimirum 30. & 37. vel 80. & 87. &c. dabit earum differentia (ſi nimirum vtraq; in aliquam rectam lineam transferatur) Tangentem 7. quæ quæritur: Atque ita ſemper ſumendæ erunt duæ tangentes maiores prope medium inſtrumentis quarum differentia æqualis ſit Tangenti exiguæ propoſitæ.

10. SI vtraque regula AF, AG, contineat 1000. particulas, & ſinus totus propoſitus conſtituatur 1000. eique interuallum FG, æquale ſumatur, commodiſſime accipientur omnes Tangentes, vt in tabula nouæ deſcriptionis horologiorum poſitæ ſunt. Nam verbi gratia Tangens 2430. Grad. 67. min. 38. habebitur, ſi relictis millenis, ſumatur interuallum inter partes 430. vtriuſque regulæ AF, AG, eique ſinus totus FG, bis adijciatur.

11. ET ſi adhibeas lineam KL, partium 11. diuiſam in 10. accipere poteris Tangentes reſpectu ſinus totius 10000. Item ſi rectam partium 101. in 100. particulas diſtributam adhibeas, habebis Tangentes reſpectu ſinus totius 100000. Si denique rectam partium 1001. partiaris in 1000. particulas, obtinebis Tangentes, poſito ſinu toto 1000000. vt ex dictis patet.

12. QVOD dictum eſt de Tangentibus, intelligendum eſt etiam de ſinubus, & ſecantibus. Nã ſi interuallũ FG, æquale ſit ſinui alicui toti, ſiue is partiũ ſit 100. ſiue 1000. ſiue pluriũ, dabunt interualla inter ſinus, vel ſecantes in vtraque regula AF, AG, acceptas, per ea, quæ Num. 4. docuimus, ſinus & ſecantes reſpectu ſinus totius FG, accepti; propterea quod per Lemma 5. lib. 1. noſtri Aſtrolabii, eandem proportionem habet ſinus totus AF, ad ſinum totum FG, quam ſinus verbi gratia A, 50. ad ſinum arcus circuli, cuius ſemidiameter FG, qui arcus arcui ſinus A, 50. ſimilis eſt.[a] Cum ergo ſit, vt AF, ad FG, ita A 50. ad rectam 50. 50. erit recta 50. 50. ſinus arcus, qui arcui ſinus A, 50. ſimilis eſt. Eademque ratio eſt de ſecantibus.

a 4. ſexti.

13. Viciſſim cognoſcemus, quot particulas ex 1000. quælibet particula vnius partis rectæ AF, complectatur: hoc ſcilicet modo. Circino ſumatur data particula, vna cum vna parte centeſima, vel duabus, vel tribus, quatuorue; circinuſque decies repetatur in recta AF, diligenterque notetur ſegmentum rectæ AF, quod circinus percucurrit. Nam ſi ex partibus centeſimis in eo ſegmento contentis abiiciantur toties 10. quot partes vna cũ particula data ſumptæ fuerunt, reliquus numerus indicabit partes decimas vnius centeſimæ, hoc eſt, milleſimas in data particula cõprehẽſas. Et ſi cũ reliqua particula eius ſegmẽti (ſi qua forte ſuperſit) ſimiliter agem⁹, re-

Quo pacto cognoſcatur, quot decimæ in particula cuiuſuis centeſimæ partis contineantur.

periemus partes decimas vnius millesimæ, hoc eſt, partes $\frac{1}{10000}$. Et ſi iterum operationem repetemus, inueniemus partes $\frac{1}{100000}$. quod quidem ad finem libelli de fabrica, & vſu inſtrumenti horologiorum demonſtrauimus, eãdemque demonſtrationem breuiter capite inſequenti Num. 14. repetemus. Exempli cauſa. Si particula data cum tribus centeſimis decies repetita percurrat partes 37. abiectis 30. continebuntur in data particula $\frac{7}{10}$. vnius centeſimæ. Quare ſi ea particula data fuerit v. g. poſt vigeſimam partem centeſimam, continebit illud ſegmentum rectæ AF, $\frac{207}{1000}$. Nam $\frac{7}{10}$. vnius centeſimæ faciunt $\frac{7}{1000}$. & 20. centeſimæ, ſi ſingulæ in decem particulas cogitentur eſſe ſectæ, efficiunt $\frac{200}{1000}$. quippe cum omnes centum partes æquiualeant 1000. particulis. Quod ſi idem fiat cum reliqua particula (ſi qua forte ſuperfuerit poſt 37. partes percurſas) vna cum tribus centeſimis, & inciderimus verbi gratia in particulam 34. abiectis 30. continebit ea particula $\frac{4}{10}$. vnius milleſimæ, hoc eſt, $\frac{4}{10000}$. Et quia $\frac{207}{1000}$ æquiualent $\frac{2070}{10000}$. ſi addantur $\frac{4}{10000}$ vltimo loco deprehenſæ, habebimus $\frac{2074}{10000}$. Si denique cum reliqua particula (ſi qua forte remanſerit) vna cũ tribus centeſimis idem fiat, percurſæq; verbi gratia ſint 39. partes, abiectis 30. ſupererunt $\frac{9}{10}$. vnius partis $\frac{1}{10000}$. hoc eſt, $\frac{9}{100000}$. Cum ergo $\frac{2074}{10000}$. efficiant $\frac{20740}{100000}$. ſi addantur $\frac{9}{100000}$. habebimus $\frac{20749}{100000}$. Atq; adeo ſi recta AF, ſtatuatur ſinus totus partiũ 100000. erit ſegmentũ 20. partium cum particula data, ſinus partium 20749. Si particula data commode per circinum poſſit cõprehendi, & decies repetatur, dabũt centeſimæ partes percurſæ partes decimas vnius centeſimæ, &c. Si quoq; nonnunquam nulla ſuperſit particula, ita vt verbi gratia inuentæ ſint præciſæ $\frac{207}{1000}$. multiplicandus erit tam numerator, quam denominator per 100. vt habeatur ſinus 20700. reſpectu ſinus totius 100000. quemadmodum & 40. centeſimæ conſtituunt ſinum 40000. reſpectu ſinu totius 100000. Si namque vterque numerus minutiæ $\frac{40}{100}$. ducatur in 1000. fiet minutia $\frac{40000}{100000}$.

Ex circulo qua ratione abſcindatur arcus datorũ gr. ac min.

14. HOC eodem inſtrumento, & in eadem facie partium æqualium, ex data qualibet circumferentia auferemus arcum quotuis graduum, & minutorum, hac arte. Sit ex quadrante, cuius ſemidiameter interuallo FG, æqualis ſit, abſcindẽdus verbi arcus gr. 53. min. 30. hoc eſt. chorda huius arcus inuenienda. Sumatur ex tabula ſinuum ſinus ſemiſſis propoſiti arcus, graduũ videlicet 26. min. 45. qui ſinus, abiectis quatuor figuris ad dexteram, eſt 450. reſpectu ſinus totius 1000. Si ergo ſinus hic reſpectu ſinus totius AF, accipiatur in recta AF, vſque ad 45. per ea, quæ ſupra Num. 4. & 12. tradita ſunt, dabit interuallum inter 45. & 45. ſinum quoque eundem reſpectu ſinus totius FG quod interuallum duplicatum dabit chordam dupli arcus grad. 26. min. 45. id eſt, chordam arcus grad. 53. min. 30. qui quæritur. Si ſinus totus ſtatuatur 10000. erit ſinus grad 26. min. 45. in tabula ſinuum 4501. abiectis nimirum tribus, figuris ad dexteram, qui in AF, capietur, vt Num. 6. & 12. dictum eſt.

Quot gradus, ac minuta in dato arcu contineantur, quo pacto cognoſcatur.

QVOD ſi vtraque regula AF, AG, continet 1000. partes, ſtatui poterit ſinus totus 100000. & etiam plurium partium, ſi nimirum adhibeatur recta MN, partium 101. diuiſa in 100. particulas, vel alia recta partium 1001. in 1000. particulas ſecta.

15. E CONTRARIO facile etiam cognoſcemus, quot gradus, & minuta in propoſito arcu cuiuſuis quadrantis contineantur. Sit enim in quadrante, cuius ſemidiameter FG, cui æqualis ſit recta RS, datus aliquis arcus, cuius chordæ ſemiſſis ſit RT. Huic RT, æqualis inueniatur recta 40. 40. inter rectas AF, AG, ita vt puncto 40. 40. vel abſcindant æquales partes, vt in dato exemplo, vel æqualiter diſtent à duabus partibus æqualibus. Deinde per ea, quæ Num. 13. ſcripſimus, inquiratur, quot partes ex 1000. vel 10000. vel 100000. in ſegmento ab A, vſque ad punctum inuentum 40. comprehendantur. In dato exemplo reperiuntur partes 400. vel 4000. vel 40000. prout ſinus totus conſtituitur 1000. vel 10000. vel 100000. atque tantus eſt ſinus 40. 40. reſpectu ſenus totius FG, cui reſpondent Grad. 23 min. 35. Duplus ergo arcus gr. 47. min. 10. qui chordæ ipſius RT, duplæ debetur, erit is, qui quæritur.

Quo pacto aliter ex circulo abſcindantur arcus datorum gr. & min.

16. IN altera facie inſtrumenti, in quam chordæ arcuum quadrantis ſunt translatæ, facilius arcum quotcunque graduum accipiemus, hoc modo, Chordæ quadrantis propoſiti ſumatur æquale interuallum FG: Vel etiam ſemidiametro Quadrantis, chordæ nimirum grad. 60. capiatur interuallum 60. 60. æquale. Si igitur verbi gratia deſideret quis arcum grad. 56. ſumendum erit per circinum interuallum inter puncta 56. & 56. Huic enim æqualis eſt chorda grad. 56. Si præter gradus accipienda ſint etiam minuta, oportebit per æſtimationem in ſequenti particula accipere talem partem ipſius, qualem minuta propoſita partem vnius gradus conſtituunt, Vt ſi cupiat quis miu. 30. ſumenda eſt ſemiſſis, ſi 20. tertia pars, &c. Interuallum enim inter partem regulæ AF, & partem regulæ AG, acceptum dabit chordam quæſiti arcus.

Quo pacto aliter cognoſcatur, quot grad. & min. in dato arcu comprehẽdantur.

VICISSIM ſi cognoſcere velimus, quot gradus, ac minuta in dato arcu exiſtant, inueſtiganda erit eius chorda inter rectas AF, AG, ita vt puncta eius cadant vel in duas partes eaſdem, vel æqualiter à duabus eiſdem diſtent. Nam tot gradus continebuntur in dato arcu, quot gradus continentur in recta AF, à centro A, vſque ad punctum, è quo chorda dati arcus in rectam AG, translata eſt: ita vt ſi dati arcus chorda extiterit inter grad. 70. & 70. propoſitus arcus complectatur grad. 70. &c.

Qua ratione ex data recta pars imperata abſcindatur.

17. IAM vero nemo neſcit, ſi ex linea aliqua abſcindenda ſit $\frac{1}{2}$. vel $\frac{1}{3}$. vel $\frac{1}{17}$. vel denique quæcunque pars, cuius denominator maior non ſit quam 100. quo pacto id fieri debeat. Si namque interuallum FG, in priori facie inſtrumenti æquale fuerit datæ rectæ, dabit interuallum inter 50. & 50. partem $\frac{1}{2}$. Interuallum autem inter 25. & 25. partem $\frac{1}{4}$. Interuallum vero inter 20. & 20. partem $\frac{1}{5}$. Item ſi interuallum inter 90. & 90. vel inter 60. & 60. vel inter 30. & 30. fiat datæ rectæ æquale, dabit interuallum inter 30. & 30. vel inter 20. & 20. vel inter 10. & 10. partem $\frac{1}{3}$. Rurſus ſi interuallum inter 17. & 17. vel inter 34. & 34. datæ rectæ ſumatur æquale, dabit interuallum inter 1. & 1. vel inter 2. & 2. partem $\frac{1}{17}$. At interuallum inter 5. & 5. vel inter 10. & 10. dabit $\frac{5}{17}$. &c. Ex hiſce porro exemplis adductis facile intelliges, quo modo te in aliis partibus imperatis gerere debeas.

Qua ratione ex dato circulo latus polygoni propoſiti inueniatur.

18. NON aliter in poſteriori facie inſtrumenti latera polygonorum in quouis circulo reperiemus. Nam gradus 120. (qui facile accipientur, ſi quadranti graduum 90. adijciantur gradus 30.) dabunt latus trianguli æquilateri. Gradus 90. latus quadrati. Gradus 72. latus pentagoni. Gradus 51$\frac{3}{7}$. hoc eſt, gradus 51. min. 26. paulo minus, latus heptagoni, &c. qui quidem gradus habebuntur, ſi gradus 360. totius circuli per numerum laterum polygoni propoſiti diuidantur.

Quo pacto

19. QVANDO in dato quadrante cognoſcere libet. (quod non raro vſu venit) in quodnam punctum ſemidiametri perpendicularis ex quouis gradu ab altera ſemidiametro numerato demiſſa cadat, ita agendum

erit

erit. Sit verbi gratia ſemidiameter alicuius quadrantis FG. quærendumque ſit punctum, in quod cadat perpendicularis ex grad. 26. min. 45. demiſſa. Sinus grad. 26, min, 45 eſt 45. poſito ſinu toto 100. Ergo & recta inter partes 45. & 45. erit ſinus grad. 26. min. 45. reſpectu ſinus totius FG, vt Num. 12 oſtenſum eſt. Quocirca recta 45. 45. in ſemidiametrum dati quadrantis ex centro translata, indicabit punctum quæſitum.

cognoſcatur, & q̃ punctum ſemidiametri cadat perpendicularis ex quolibet gradu quadrantis demiſſa.

20. NON aliter reperiemus in diametro Aſtrolabii (quod notatu dignum eſt) punctum cuiuſcunq; declinationis. Poſito enim ſinu toto ſemidiametro Æquatoris, ſi declinatio eſt Borealis, transferenda eſt in diametrum ex centro Tangens ſemiſſis complementi declinationis: ſi vero Auſtralis, Tangens ſemiſſis arcus ex quadrante & declinatione compoſiti. Vt Tangens grad. 33. min. 15. qui ſemiſſem complementi declinationis Cancri conſtituunt, dabit punctum extremum ſemidiametri paralleli Cancri, quod videlicet ab Æquatore in Boream grad. 23. min. 30. declinat. Tangens vero grad. 56. min. 45. qui ſemiſſem conſtituunt arcus ex quadrante & declinatione Capricorni conflati, dabit extremum punctũ ſemidiametri paralleli Capricorni, quod ab Æquatore in Auſtrum grad. 23. min. 30. recedit. Ratio huiuſce rei eſt, quod recta in Aſtrolabio ab extremitate diametri rectum Horizontem referentis vſque ad interſectionem paralleli Borealis, cum altera diametro Meridianum repræſentante ducta conſtituit cum altera diametro angulum ſemiſſis complementi declinationis borealis; ad interſectionẽ vero paralleli auſtralis cũ eadẽ poſteriore diametro educta, efficit angulũ ſemiſſis arcus ex quadrante & declinatione auſtrali cõflati: atq; vtriuslibet anguli Tãgẽs ſemidiameter eſt paralleli, vt ex Aſtrolabio liquet.

Quo pacto in diametro Aſtrolabii punctum cuiuſuis declinationis reperiatur.

EODEMQVE modo, ſi conſtiterit, quem angulum in extremitate ſemidiametri Æquatoris in Aſtrolabio recta ad quodcunq; punctum diametri, quæ ad illam ſemidiametrum perpendicularis eſt, ducta conſtituat reperiemus punctum illud per Tangentem illius anguli, ſicut in parallelis Cancri & Capric. factum eſt.

21 SI etiam quæcunq; linea ex centro inſtrumenti huius egrediens ſecetur quomodocunq;, vt v.g. extrema & media ratione, vel (quod operæ pretium eſſet, vt expeditius horologia deſcribantur) ſicut æquinoctialis linea in horologio horizontali diuiſa eſt: ſecabitur quæuis alia ſimiliter, ſi nimirum ei æquale interuallum FG, ſumatur, vt ex dictis liquido conſtat. Satis tamen eſt, ſi horæ ex vna parte lineæ meridianæ, nimirum vel horæ antemeridianæ, vel pomeridianæ duntaxat in inſtrumentum transferantur.

Preceptũ generale ad diuidendam lineam datam, vt alia quæuis diuiſa eſt.

22 PRÆTEREA aperto inſtrumento quomodocunq;, cognoſcemus quantitatem anguli FAG, in centro A, conſtituti, hoc modo. Circino ſumatur interuallum inter grad. 60. & 60. in poſteriori inſtrumenti facie, transferaturq; ex centro in alterutram lineam chordarum. Nam quot gradus in eo interuallo includuntur tot gradus continebit angulus FAG. Ratio eſt, quod arcus ex centro A, per grad. 60. & 60. deſcriptus portio eſt quadrantis, cuius chorda eſt tota linea AF: propterea quod chorda 60. graduum ſemidiameter eſt quadrantis dicti, cuius chorda eſt AF, vt ex inſtrumenti conſtructione manifeſtum eſt. Igitur interuallum inter grad. 60. & 60. eſt chorda anguli FAG propoſiti, &c.

Qua ratione quantitas anguli quẽ latera inſtrumenti continet cognoſcatur.

23 SED neq; hoc omittendum eſt (quandoquidem de tangentibus, Sinubus & Secantibus in hoc inſtrumento reſpectu dati ſinus totius accipiendis verba fecimus) ſinum totum interdum eſſe tam exiguum, vt ex F, in G. transferri nequeat, etiamſi inſtrumentum prorſus claudatur. Vt ergo reſpectu illius ſinus totius Tangentes, ſinus, ac ſecantes accipere poſſimus ex inſtrumento. ſumendus eſt ille ſinus totus in aliqua recta bis, ter, aut quater, &c. atq; ita ex F. in G, transferendus. Nam ſi Tangentium quæſitarum, vel ſinuum, aut ſecantium reſpectu ſinus totius 100. capiantur ſemiſſes, vel tertiæ partes, aut quartæ, &c. prout videl. ſinus totus bis, ter, quater, &c. acceptus fuit, habebuntur Tangentes quæſitæ, vel ſinus aut ſecantes. Vt ſi ſinus totus duplicetur & poſito ſinu toto 100. Tangens verbi gratia ſit 378 ſumenda eſt tangens 189. &c. Sed commodiſſime res hæc peragetur, ſi ſinus totus, qui perpuſillus eſt, decuple tur. Ita enim poſito ſinu toto 100. ſi ex Tangẽte v. g. propoſita (relicta prima figura ad dexteram) abiiciatur vna figura ad dexteram, quæ eſt ſecunda in tota Tangente habebitur decima eius pars. Habenda tamen ſemper eſt ratio figuræ abiectæ, vt ſcil. pro ea ſumatur 1. ſi maior eſt quam 5. &c. Hac ratione Tangente 2414. gr. 67. min. 30. propoſita (relictis $\frac{4}{1000}$.) transferenda erit Tangens 24. paulo amplius, nimirum pars decima Tangentis 241. reſpectu ſinus totius 100.

Quando ſinus totus tam paruus eſt, vt in inſtrumentũ transferri nequeat, quid agendum.

24 SIC etiam, quando Tangens aliqua ſinum totum ſuperat, ne cogamur primum ſinum totum aliquoties transferre, deinde vero reliquas partes, vel contra, ſed vt ſtatim punctum, quod quæritur, per vnã translationem poſſimus inuenire, diuidenda eſt tota Tangens tabulæ ad finem nouæ deſcriptionis Horologiorum poſitæ per 2. vel 3. vel per talem denique numerum, vt producatur in Quotiente Tangens trium figurarum. Tunc enim abiecta prima figura ad dextram, reliqua Tangens transferenda eſt reſpectu ſinus totius 100. multiplicati per eundem numerũ, per quem Tangens diuiſa fuit. Vt Tangens hor. 4. & 8. reſpectu ſinus totius 1000 eſt 1732. quæ diuiſa per 2. facit 866. Ergo transferenda eſt Tangens $86\frac{1}{2}$. paulo amplius reſpectu ſinus totius 100 duplicati. Item Tangens hor. 5. & 7. eſt 3732. quæ diuiſa per 4 facit 933. Ergo Tangens $93\frac{1}{10}$. transferenda eſt reſpectu ſinus totius 100. quadruplicati. Atq; ita de cæteris.

Quando Tangẽs ſuperat ſinũ totũ, quid agendum, vt per vnicam tranſlationẽ punctum quæſitum inueniatur.

25 IN hoc eodem deniq; inſtrumento facile duabus rectis tertiam proportionalem, & tribus quartã adiungemus. Nam ſi, duab. propoſitis, primæ in recta AF, regulæ AB, æqualis capiatur: & ſecunda à fine huius, aperto inſtrumento. per circinum transferatur in regulam AG, ad numerum ſimilem illi, qui in extremo primę in regula AB, appoſitus eſt (ita vt pedes circini ſtatuantur vel in ſimilibus partibus vtriuſq; regulæ, vel in duobus punctis æqualiter diſtantibus à ſimilibus partibus) eidemq; ſecundæ in regula AB, æqualis ſumatur, dabit interuallum inter finem huius ſecundæ, & numerum in regula AG. ſimilem illi, qui prope finem ſecundæ ſcriptus eſt, tertiam proportionalem, vt ex demonſtratis Num 2. conſtare poteſt.

Quo pacto tertia & quarta proportionalis reperiatur.

EADEM ratione, ſi, tribus rectis propoſitis, prima & ſecunda in inſtrumentum transferantur, vt dictũ eſt, tertiæ autem in regula AB, æqualis quoq; capiatur, dabit interuallum inter finem tertiæ, & numerum regulæ AG. ſimilem illi, qui ad extremum tertiæ in regula AB, notatus eſt, quartam proportionalem.

QVOD ſi lineæ propoſitę tam magnæ ſint, vel aliqua illarum, vt in inſtrumentum transportari nequeãt, ſumendæ erunt omnium ſemiſſes, vel tertiæ partes, vel quartæ, &c. atque cum illis procedendum, vt dictum eſt. Inuenta .n. duplicata, vel triplicata, vel quadruplicata, &c. offeret tertiam aut quartã proportionalem quæſitã.

26 LOCO prędicti inſtrumenti conſtrui poteſt in lamina aliqua, vel plano quolibet, figura eundẽ vſum habens, facillima hac ratione. Fiat angulus BAC, cuiuſcunq; magnitudinis; quo autẽ maior fuerit, eo maiores

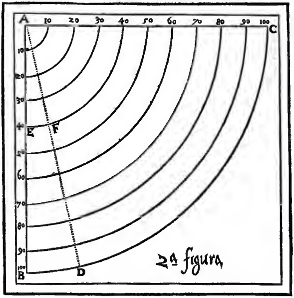
Cõſtructio alterius

ſinus

inſtrumenti pro eodem vſu. ſinus toti in figura aſſumi poterunt:ita vt non male feceris,ſi rectum conſtituas. Ita namque quad rantem quoque recto angulo oppoſitum obtinebis:Recta autem AB,in 100.particulas æquales ſecta,(poſſet etiam ſecari in 1000.ſi commode fieri poſſet,vt de ſuperiore inſtrumento diximus)deſcribantur ex centro A,per ſingulas partes 100.arcus circulorum,qui rectam quoque AC, in 100. particulas æquales diſtinebunt: parataq; erit figura.

NAM ſi in infimo arcu BC, ſumatur interuallum BD , dato ſinui toti æquale,ducaturque recta occulta AD,(hæc in ænea tabella ducenda erit atramento non admodum nigro,vel alio colore , vt poſtea deleri poſſit) fungentur rectæ AB,AD, officio regularum AF,AG, ſuperioris inſtrumenti ad propoſitam magnitudinẽ BD, aperti, & dilatati. Quamobrem inuenientur in hac figura omnes Tangentes reſpectu ſinus totius BD,vt ſupra. *a 2. ſexti.* Vt Tangens verbi gratia partium 40. erit interuallum EF, [a] cum ducta recta EF , parallela ſit rectæ ductæ BD, propterea quod latera AB, AD, ſecta ſunt in E, F, proportionaliter. Alij vſus ſupra explicati facile quoque ad hanc figuram aptabuntur ; præſertim ſi in alteram faciem laminæ transferantur chordæ omnium arcuum quadrantis alicuius,vt ex dato circulo quotcunque gradus poſſint abſcindi, &c. Habet figura hæc id commodi, quod periculum non eſt,nc clauus in centro atteratur, ſicut in ſuperiore inſtrumento. Deinde in eadem hac figura poſſunt accipi particulæ etiam minimæ, prope centrum, & in extremo quadrante ſinus totus quamuis perpuſillus,quod in ſuperiore inſtrumento non licebat.

QVAMVIS autem ad magnitudinum dimenſiones non omnes huius inſtrumenti partium vſus neceſſarii ſint,ſed ſolum ille,quem Num.1.& 2.explicauimus,potiſſimum requiratur;placuit tamen tam varios eius vſus in vnum hunc locum congerere , tum vt inſtrumenti præſtantia magis eluceat , tum vt ſtudioſus lector habeat,vbi alios vſus,quos deſiderat,inquirere debeat.Non ſum etiam neſcius, quam plurimos alios præclari huius inſtrumenti vſus poſſe excogitari,quos proprio Marte , atque induſtria quiuis facile, quando id res poſtulauerit,cogitando inueniet:nos præcipuos ſolum indicare voluimus hoc loco.

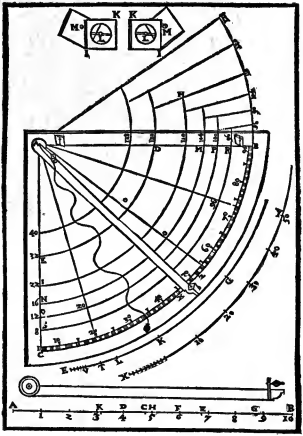


CONSTRVCTIO QVADRANTIS, IN QVO MINVta quoque,ac ſecunda deprehendantur , etiamſi gradus in ea ſecti non ſint. Et quo pacto eadem minuta , & ſec.obtineri poſſint in quadrante in 90.gradus diſtributo. Ac denique qua ratione ex data recta in pauciſſimas partes æquales diuiſa abſcindi poſſint partes milleſimæ,&c.

CAPVT II.

HOC eſt ſecundnm , quod præmittendnm eſſe diximus , qua videlicet via cognoſcere poſſimus,quot minuta, & ſecunda in propoſita particula cuiuſuis gradus contineantur : Et quot partes milleſimas quælibet particula datæ rectæ comprehendat , licet in pauciſſimas ea partes ſit diſtributa. Qua de re multa quidem extant à nobis alias conſcripta : ſed ea vnum in locum colligere, & hic ſimul omnia, proponere viſum fuit , quod id ad perfectam rei cognitionem multo fore commodius iudicaremus. Itaque Petrus Nonius Luſitanus ſummo ingenio Mathematicus ad hanc rem in libello de crepuſculis propoſ. 3. partis ſecundæ tale excogitauit artifi-

artificium. Deſcriptis ex A, centro quadrantis BC, intra eundem quadrantem alijs quadraginta quatuor quadrantibus minoribus quomodocunque inter ſe diſtantibus, vt in vniuerſum ſint 45. diuidi: eum, qui quadranti BC, proximus eſt, & in 90. gradus diſtributus, in 89. partes æquales, ſequentem in 88. alium in 87. atq; ita deinceps, vt partes ſequentis ſemper ſint vna pauciores, quam partes proxime præcedentis quadrantis; adeo vt vltimus, & omnium minimus contineat 46. partes æquales. Plures quadrantes non eſt opus deſcribere, quia eorum partes eſſent duplę partium quadrantum iam deſcriptorum. Vt pars vna quadrantis in 44. partes diuiſi contineret duos gradrus quadrantis maximi in 90. gradus diſtributi: pars vero vna quadrantis in 44. partes diſtincti complecteretur $\frac{1}{88}$. quadrantis in 88. partes diuiſi, & vna pars quadrantis diuiſi in partes 43. includeret $\frac{2}{86}$. quadrantis in 86. partes diſtributi, &c. Hac ratione in primo quadrante in 90. gradus diſtributo aſſignabimus omnes has partes aliquotas, $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{5}$. $\frac{1}{6}$. $\frac{1}{7}$. &c. vſq; ad $\frac{1}{90}$. Nam vnus gradus primi quadrantis eſt $\frac{1}{90}$. Vna autem pars ſecundi quadrantis eſt $\frac{1}{89}$. Vna tertij, $\frac{1}{88}$. atque ita deinceps vſque ad quadrantem 45. qui in 46. partes

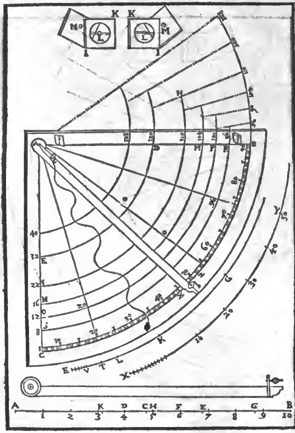


diſtributus eſt, cuius pars vna continet $\frac{1}{46}$. ita vt beneficio 45. quadrantum habeamus omnes partes à $\frac{1}{46}$ vſque ad $\frac{1}{90}$. deinde quoniam quælibet res diuiſa in quotuis partes numero pares diuiſa etiam eſt in partes, quæ illarum medietatem conſtituunt, (nam linea ſecta in 10. partes, v.g. diuiſa eſt etiam in 5. cum $\frac{2}{10}$ efficiant $\frac{1}{5}$. &c.) fit vt $\frac{2}{90}$. primi quadrantis exhibeat nobis $\frac{1}{45}$. & $\frac{2}{88}$. tertij quadrantis in 88. partes diſtributi, $\frac{1}{44}$. & $\frac{2}{86}$ quinti quadrantis diſtributi in 86. partes $\frac{1}{43}$. atque ita deinceps progrediendo per quadrantes partium numero pariũ vſque ad quadrantem partium 46. cuius $\frac{2}{46}$. offerent nobis $\frac{1}{23}$. Poſt hæc $\frac{4}{88}$. dabunt $\frac{1}{22}$. & $\frac{4}{84}$. præbebunt $\frac{1}{21}$. & ſic deinceps vſque ad $\frac{4}{48}$. quę exhibebunt $\frac{1}{12}$. Rurſus $\frac{8}{88}$. dabunt $\frac{1}{11}$. & $\frac{8}{80}$. dabunt $\frac{1}{10}$. & ita deinceps vſque ad $\frac{8}{48}$. quę offerent $\frac{1}{6}$. Præterea $\frac{16}{80}$. dabunt $\frac{1}{5}$. & $\frac{16}{64}$. dabunt $\frac{1}{4}$. & $\frac{16}{48}$. exhibebunt $\frac{1}{3}$ Ac tandem $\frac{32}{64}$. offerent $\frac{1}{2}$.

HÆC eſt conſtructio quadrantis, quam Petrus Nonius nobis reliquit, difficilis illa quidem cum vix quadrans in partes, quarum numerus primus eſt, vt in 89. 87. &c à quoquam, etiamſi omnem adhibeat diligentiam ſine errore diuidi poſſit. Vſus autem perfacilis eſt. Nam obſeruaturus interdiu altitudinem ſolis, aut nocte

ſerena

ſerena altitudinem alicuius ſtellæ, notet diligenter, in cuius quadrantis integram aliquam partem filum perpendiculi, aut linea fiduciæ incidat: (Vix autem, aut perraro continget, vt filum non cadat in partem aliquam integram alicuius quadrantis, propter multitudinem quadrantum, & partium diuerſarum:) Deinde fiat vt numerus omnium partium illius quadrantis, in cuius partem aliquam integram filum cecidit, ad numerum partium à filo abſciſſarum, ita numerus graduum 90. in quos idem quadrans diuiſus concipiendus eſt, ad aliud; produceturque numerus graduum dictis partibus abſciſſis reſpondentium. Et ſi quid in diuiſione fuerit reſidui, illud per 60. multiplicatum, atque in eundem diuiſorem, hoc eſt, in numerum omnium partium dicti quadrantis diuiſum, dabit Minuta graduum: Et ſi adhuc quidpiam remanſerit in hac diuiſione, illud eodem modo per 60. multiplicatum, & in eundem diuiſorem diuiſum exhibebit ſecunda, Atque hoc modo progrediendo reperietur Tertia, Quarta, &c. donec nihil in diuiſione ſuperſit: ſed ſatis eſt ad ſecunda vſque progredi. Exem-



pli gratia. Ponatur quadrans D E, diuiſus in 70. partes, & filum perpendiculi A D, abſcidiſſe ex eo partes 40. in G. Fiat ergo vt 70. ad 40. ita 90 ad aliud produceturque gradus 51. Sed quia in diuiſione ſuperſunt 30, multiplicabimus ea in 60. & numerum productum 1800. per 70. rurſus partiemur, vt prodeant Min. 25. Quoniam autem adhuc ſuperſunt in diuiſione 50 multiplicabimus ea in 60. & procreatum numerum 3000. per eadem 70. diuidemus vt producantur ſecunda 42. Rurſum quia iterum ſuperſunt 60. quæ multiplicata in 60. faciunt 3600. quo numero per 70. diſtributo, producentur Tertia 51. &c.

DEMONSTRATIO huius operationis perſpicua eſt. Quoniam enim vt angulus DAE, ad angu-
a 33. ſexti. lum GAE,[a] ita arcus DE, ad arcum GE: vt idem angulus DAE, vel BAC, ad eundem angulũ GAE, vel ZAC,
ita arcus BC, ad arcum ZC, erit vt arcus DE, hoc eſt, quadrans in partes 70. diuiſus, ad arcum GE, earundem
b 11. quint. partium 40.[b] ita arcus BC, id eſt, quadrans in 90. gradus diſtributus, ad arcum ZC, continentem numerum determinatum graduum, Minutorum, &c.

SED

SED quoniam factu perdiſſicile eſt, vt dicti quadrantes in eiuſmodi partes ſecentur, inuenit Illuſtriſſimus Dominus Iacobus Curtius Cæſareus apud Summum Pontificem Legatus, exquiſitæ doctrinæ & ſingularis induſtriæ vir, eiuſmodi remedium. Deſcriptis ex A, quotlibet quadrantibus, producantur ſinguli vltra ſemidiametrum AB, proximus quidem extremo quadranti vſque ad gradum 91. hoc eſt, vſque ad lineam ex A, ad grad. 91. ductam: ſequens deinde vſque ad grad. 92. & inſequens vſque ad grad. 93. & ſic deinceps vſque ad alios atque alios gradus. In figura exemplum habes in quadrantibus vſque ad grad. 96. 100. 104. 110. 120. & 128. tantum productis, ne multitudo, ſi ad ſingulos gradus eſſent producti, confuſionem pareret. Deinde vnuſquiſque arcus ita productus ſecetur in 90. partes æquales: quæ diuiſio longe facilior eſt illa ſuperiore, cum quilibet horum arcuum non difficilius in 90. partes æquales diſtribui poſſit, quam quadrans in 90. gradus.

VSVS idem eſt qui ſuperioris conſtructionis. Nam cadente filo perpendiculi in partem aliquam integram alicuius quadrantis, ſi fiat, vt 90. nempe vt numerus partium, in quas quilibet arcus productus diuiſus eſt, ad numerum partium, quas filum abſcidit, ita numerus graduum in illo arcu contentorum, in cuius partem aliquam integram filum cecidit, ad aliud, reperietur numerus graduum dictis partibus abſciſſis reſpondentium, &c. vt prius.

Quadrantis conſtructio ad min. & ſecund. cognoſcenda.

ET quoniam facile eſt, (vt vulgo dici ſolet) inuentis addere, conabimur eam conſtructionem aliquanto faciliorem facere hoc modo. Deſcriptis ex A, centro quadrantis BC, intra eundem quadrantem alijs 39. quadrantibus æqualiter, ſi placet, inter ſe diſtantibus, vt venuſtior appareat figura: ita vt in vniuerſum ſint 40. quadrãtes, quorũ extimus in 90. gradus more ſolito ſecetur: proximus deinde in 128. partes æquales, primum videlicet in duas, & vtraque pars rurſus in duas, & quælibet harum quatuor partium iterum in duas, & ita deinceps, donec 7. diuiſiones abſolutæ ſint, atque adeo totus quadrans in 128. partes æquales diſtributus. Poſt hæc producantur alij quadrantes vltra ſemidiametrum AB, vt dictũ eſt, ille quidem, qui tertius eſt ab extremo BC, vſque ad gradũ 91. extremi quadrantis CB, producti, hoc eſt, vſque ad lineam ex A, ad gradum 91. ductam: ſequens deinde vſque ad gradum 92. & inſequens ad gradum 93. atque ita deinceps vſque ad alios gradus, ita vt quadrageſimus quadrans vſque ad gradum 128. producatur. Hi arcus ita producti diuidantur ſinguli in 128. partes æquales, ſicuti quadrans extimo quadranti proximus, qua diuiſione peracta, partes ſupra ſemidiametrum AB, reſecentur, tanquam ſuperuacaneæ.

2 QVOD ſi quadrantes vltra ſemidiametrum AB, produci commode non poſſint, ob ſpatij anguſtias, inſtituenda erit diuiſio hoc modo. In quadrante extremo BC, ſumatur ſemiſſis numeri graduum, quem quilibet arcus productus continere deberet, & ex A, ad illam ſemiſſem linea occulta ducatur. Hæc enim ſecabit quadrãtem propoſitum in puncto, vbi arcus productus prima diuiſione bifariam ſecaretur. Quare ſi arcus inter hoc punctum & ſemidiametrum AC, comprehendens 64. partes ex illis 128. totius arcus producendi, ſecetur bifariam continue ſex diuiſionibus, parteſque illius in arcum inter idem punctum, & ſemidiametrum AB, transferantur, quæ transferri poſſunt, habebuntur in dato quadrante omnes partes, quæ ex illis 128. in quas totus arcus productus diuideretur, in quadrantẽ cadunt. Vt ſi diuidendus ſit quadrans MN, vſq; ad gr. 104. producendus, ducemus ad gr. 52. nimirum ad ſemiſſem grad. 104. rectam, quæ ſecet quadrantẽ MN, in O. Nam ſi arcus ON, continens partes 64. ex illis 128. totius arcus producti, ſecetur continue bifariam ſex diuiſionibus, parteſq; eius in arcũ OM, transferantur, habebuntur omnes partes in quadrantem MN, cadentes, non ſecus, ac ſi totus arcus productus in 128. partes diſtributus eſſet. Sic etiam, ſi quadrans ad gradum 125. producendus, diuidendus ſit, ducenda erit linea occulta ad gradum $62\frac{1}{2}$. nimirum ad ſemiſſem graduum 125. Item ſi quadrans DE, 120. producendus, diuidendus ſit, ducenda erit linea occulta ad gradum 60. &c.

Qui numeri quadrantibus aſcribendi ſint.

3 HISCE quadrantibus ita diuiſis duplices numeri aſcribendi ſunt. prope ſemidiametrum quidẽ AC, numeri quadrantum, vt 1. prope extremum; 2. iuxta ſequentem, & 3. iuxta tertiũ &c. Ita vides quadranti qui vſq; ad gradum 96. productus eſt, appoſitũ eſſe numerum 8, cum is octauus ſit. Primus enim eſt quadrãs BC 1. ſecundus, qui ſequitur, 90. graduum, Tertius graduum 91. quartus graduum 92. quintus graduũ 93. Sextus graduum 94. Septimus graduum 95 & Octauus graduum 96. Sic etiam quadranti vſq; ad grad. 100. producto cernis aſcriptum eſſe numerũ 12. &c. At vero iuxta ſemidiametrum AB, numeri illorum graduum ſcribendi ſunt, ad quos vſq; quilibet quadrans extenditur, vt in figura vides. Ita enim cadente filo perpendiculi in partem aliquam integram alicuius quadrantis, illico iuxta ſemidiametrum AB, apparebit, ad quem gradum vſque quadrans ille productus fuit. Qui quidem graduum numerus in regula trium tertium occupat locum, vt minuta, atq; ſecunda inquirantur, vt paulo poſt Num. 7. dicemus.

Pinnacidia quo pacto affigenda.

4 IVXTA ſemidiametrum AB, affigenda ſunt duo pinnacidia ad angulos rectos, ita vt foramina, per quæ radius ſolis, vel viſualis tranſire debet, ad perpendiculum rectæ AB, exiſtant; alioquin non paruus error in dimenſione linearum committeretur.

Pinnacidia pro radio viſuali quo pacto conſtruenda.

5 QVANDO porro per radium viſualem altitudo ſtellæ inueſtiganda eſt, vel punctũ aliquod lineę dimetiendæ inſpiciendum, conſtrui debent duo pinnacidia hoc modo. In tabella ænea quadrata IK fiat foramen rotundum mediocris magnitudinis, in cuius medio relinquatur foramen L, quod ſuſtineatur à diametro quadam tenui; Et circa I, circumuertatur alia tabella ænea quadrata ſubtilis, priori æqualis, in cuius medio ſit etiam perexiguũ foramẽ M, reſpondens foramini L, quando hæc tabella priori ſuperimponitur. Huiuſmodi duo pinnacidia ſi fiant, dici vix poteſt, quã expeditè quamcunq; ſtellã; aut aliã quamlibet rem contueri liceat. Nam pinnacidiũ, quod ab oculo propius abeſt, claudendum eſt tabella illa quadrata circumducta circa punctum, I, aliud autem aperiendum. Sic enim fiet, vt radius viſualis per foramen M, prope oculum immiſſus, illico conſpiciat per maius foramen L, in pinnacidio remotiore ſtellam, vel aliam rem propoſitam: quia foramen illud maius apertum facile rem ipſam intueri, & ſine vllo negotio foramen exiguum L, in eodem pinnacidio remotiore in ipſam rem viſum dirigere nos ſinit.

Conſtructio regulæ, loco fili.

6 POSTREMO ex centro A, egrediatur filum ſubtiliſſimum cum appenſo perpendiculo. Aut certe loco fili conſtruatur regula ænea admodum tenuis cum linea fiduciæ, in cuius extremitate promineat laminula

ex qua ſuſpendatur perpendiculum hac conditione, vt regula libere pendente, filum aliquod cum perpendiculo demiſſum, ad vnguem lineæ fiduciæ reſpondeat. Atque in hoc ſumma diligentia adhibenda eſt, alioquin gradus non rectè à linea fiduciæ indicarentur.

Quadrãs pendulus.

ATQVE hoc modo Quadrans in ſuo vſu erit pendulus, ſiue res in ſublimi exiſtens ex B, per A, ſiue res in plano poſita ex A, per B, inſpiciatur.

Quadrãs ſtabilis.

QVOD ſi circa centrum A, regula affigatur cum linea fiduciæ A b, & duobus pinnacidijs c, b, quorum foramina lineæ fiduciæ reſpondeant, ipſaque regula ita firmetur, vt circa centrum circumducta ad quemcunq; gradum immota permaneat, erit Quadrans in ſuo vſu ſtabilis eundem ſemper ſitum habens, ſiue res in ſublimi exiſtens inſpiciatur ex A, per b, poſito nimirum latere A C, Horizonti parallelo, in plano horizontali, ſiue rem in plano poſitam quis intueatur ex A, per b, latere A C, ad Horizontem exiſtente perpendiculari, & latere A B, eidem Horizonti parallelo, ſuperioremque locum occupante. Verum hæc planius intelligentur, cum de vtroque vſu lib. 2. agemus.

Vſus quadrantis proxime conſtructi in minutis exquirendis.

7. VSVS quadrantis hoc modo conſtructi in minutis, ac ſecundis exquirendis, præclarus eſt. Nam cadente filo perpendiculi, aut linea fiduciæ AB, in partem aliquam integrã alicuius Quadrantis (quod fere ſemper accidet propter diuerſitatem partium in tanta quadrantum multitudine) ſi fiat vt 128. nimirum vt numerus partium, in quas quilibet arcus productus diuiditur, ad partes à filo abſciſſas, ita numerus graduum in toto arcu producto comprehenſorum, in cuius partem aliquam integram filum incidit, ad aliud, reperietur numerus graduum in arcu abſciſſo contentorum. Et ſi quid in diuiſione fuerit reſidui, illud per 60. multiplicatum, atque in eundem diuiſorem, hoc eſt, in 128. diuiſum, dabit minuta graduum. Et ſi adhuc quippiam remanſerit in hac diuiſione, illud eodem modo per 60. multiplicatum, & in eundem diuiſorem 128. diuiſum, exhibebit ſecunda. Atque hoc modo progrediendo, reperientur Tertia, Quarta, &c. donec nihil in diuiſione ſuperſit. Tunc enim vlterius progrediendum non eſt; Sed ſatis eſt, ad ſecunda vſque progredi. Exempli gratia. Ponatur ex Quadrante PQ. vſque ad gradum 100. producto, qualis eſt duodecimus, filum perpendiculi abſcidiſſe partes 20. ex illis 128. in quas totus arcus productus diſtributus eſt. Fiat ergo, vt 128. ad 20. ita 100. ad aliud; inuenienturque gradus 15. ſupereruntque in diuiſione 80. quæ ducta in 60. faciunt 4800. quæ diuiſa per 128. dant minuta 37. & ſuperſunt adhuc 64. quæ ſi ducantur in 60. & productus numerus 3840. diuidatur per 128. prodibunt Sec. 30. nihilque in diuiſione ſupereſt. Arcus ergo Q, 20. vel arcus Quadrantis B C, inter C, & filum perpendiculi includit grad. 15. Min. 37. Sec. 30. Rurſus ponamus ex octauo quadrante R S, vſque ad gradum 96. producto filum perpendiculi abſcidiſſe partes 96. ex illis 128. quæ in toto arcu producto continentur. Fiat ergo, vt 128. ad 96. ita 96. ad aliud: reperienturque gradus 72. præciſe arcui abſciſſo conuenire. Item ceciderit filum in partem 64. Quadrantis ſextidecimi M N, vſque ad gradum 104. producti. Si ergo fiat, vt 128. ad 64. ita 104. ad aliud, producentur quoque grad. 52. præciſe, atque ita de cæteris; dummodo ſis memor, vt ſi quid in diuiſionibus ſuperfuerit, reſidua diuiſionum multiplicentur per 60. & producti numeri per 128. diuidantur, vt dictum eſt.

DEMONSTRATIO huius operationis perſpicua eſt. Quoniam enim eſt, (in vltimo exemplo) vt arcus NM, vſque ad grad. 104. productus, quatenus in 128. partes ſectus eſt, ad arcum N O, earundem partium 64. vt idem arcus NM, totus productus, quatenus grad. 104. complectitur, ad eundem arcum NO, reſpectu eorundem graduum; efficitur, vt ſi fiat quemadmodum partes 128. totius arcus NM, vſque ad grad. 104. producti ad partes 64. in arcu NO, contentas, ita idem arcus NM, productus graduum 104. ad aliud, reperiantur gradus in eodem arcu NO, contenti, &c.

Conſtructio & vſus tabellæ pro minutis & ſecundis.

8. IN gratiam autem ſtudioſorum placet hic tabellam inſerere, in qua ex reſiduo primæ operationis regulæ aureæ, qua gradus eliciuntur, mox apparet, quot minuta, & ſecunda illi reſiduo reſpondeant: Ita vt opus ſit ſemel tantum regulam auream adhibere. Conſtruitur autem tabella, ſi ſingula reſidua, quæ plura, quam 127. eſſe nequeunt, per 60. multiplicentur, productique numeri per 128. diuidantur. Atque vt ſtructura, & vſus huiuſce tabellæ facilius intelligatur, apponemus vnum exemplum. Cadat verbi gratia filum perpendiculi in partem 29. Quadrantis 32. ad gradum vſque 120. producti. Fiat igitur vt 128. ad 29. ita 120. ad aliud; producenturque grad. 27. Quia vero in diuiſione ſuperſunt 24. ſub quo numero in tabella ponuntur duo hi numeri 11. 15. Prior ergo dat minuta, & poſterior ſecunda; Ita vt arcus à filo abſciſſus complectatur grad. 27. Min. 11. Sec. 15. Atque hæc minuta, & Secunda producuntur, ſi reſiduum diuiſionis, nimirum 24. ducatur in 60. & productus numerus per 128. diuidatur, &c. Eadem ratio eſt de reliquis tabellæ numeris. Nam ſemper ſuperior numerus eſt ille, qui in diuiſione remanſit: Inferiorum autem numerorum prior ad minuta, & poſterior ad ſecunda ſpectat.

SEQVITVR TABELLA.

TABEL-

TABELLA INDICANS, QVOT MINVTA, AC Secunda, reſiduo primæ operationis regulæ aureæ, qua gradus in ſupra nominatæ tabulæ conſtructione eruuntur, reſpondeant.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.
0.28	0.56	1.24	1.52	2.21	2.49	3.17	3.45	4.13	4 41	5. 9	5.37
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S	M. S.
6. 6	6.34	7. 2	7.30	17.58	8.26	8.54	9.22	9.51	10.19	10.47	11 15
25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M S.	M S.	M. S.	M. S.	M. S.
11.43	12.12	12.39	13. 7	13.36	14. 4	14.32	15. 0	15.28	15.56	16.24	16 52
37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48
M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M S.	M. S.	M. S.	M. S
17.21	17.49	18.17	18.45	19.13	19.41	20. 9	20.37	21. 6	21.34	22. 2	22.30
49	90	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
M. S	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.
22.58	23.26	23.54	24.22	24 51	25.19	25.47	26.15	26.43	27.11	27.39	28 7
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72
M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S	M. S.	M. S.
26.36	29. 4	29.32	30. 0	30.28	30.56	31.24	31.52	32.21	32.49	33.17	33 45
73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84
M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.
34.13	34.41	35. 9	35.37	36. 6	36.34	37. 2	37.30	37 58	38 26	38.54	39.22
85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96
M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S	M. S.	M. S.	M. S.
39.51	40.19	40.47	41.15	41.43	42.11	42.39	43. 7	43.36	44. 4	44 32	45. 0
97	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108
M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.
45.28	45.56	46.24	46.52	47.21	47.49	48.17	48.45	49.13	49.41	50. 9	50.37
109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.
51. 6	51.34	52. 2	52.30	52.58	53.26	53.54	54.22	54.51	55.19	55.47	56 15
121	122	123	124	125	126	127	128				
M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.				
56.43	57.11	58. 7	57. 39	58.36	59. 4	59.32	60 0				

Cōſtructio & vſus tabulæ ſequentis.

9 PORRO vt ſtudioſos omni labore ſupputandi leuaremus, compoſita à nobis eſt ſequens tabnla, in qua confeſtim apparet, quot gradus, minuta, ac ſecunda cuilibet parti cuiuſuis Quadrantis reſpondeant. Nam ſi in latere tabulæ ſiniſtro ſumatur numerus illius quadrantis, in cuius partem aliquam integram filum perpendiculi cecidit, numerus, inquam, iuxta ſemidiametrum AC. illi quadranti appoſitus, in vertice vero eiuſdem tabulæ accipiatur numerus partium à filo abſciſſarum, reperientur in angulo communi grad. Min. & Sec. arcus abſciſſi. Exemplum. Ceciderit filum in partem 30. Quadrantis 16. qui vſque ad grad. 104, productus fuit. Si ergo in vertice tabulæ ſumatur numerus 30. partium, & in ſiniſtro latere numerus quadrantis 16. deprehenduntur in communi angulo grad. 24. Min. 22. Sec. 30. Item cadente filo in partem 111. Quadrantis 15. qui vſque ad grad. 103. fuit productus; ſi in vertice tabulæ accipiatur numerus 111. partium, & in latere ſiniſtro numerus Quadrantis 15, reperiētur in angulo communi gradus 89. min. 19. ſec. 13. Atq; ita de cæteris. Conſtructio tabulæ ex dictis obſcura non eſt. Nam ſi fiat, vt 128, ad 1. ad 2 ad 3. ad 4. & ita deinceps, vſque ad 128. ita numerus gradum cuiuslibet arcus totius producti ad aliud, reperientur gradus. Minuta & Sec. pro partibus cuiuſque Quadrantis. Continentur autem in tabula tantummodo 40. Quadrantes, quod hi ſatis eſſe videantur: Si quis tamen plures deſcribere velit, facile tabulam extendere poterit ſecundum doctrinam traditam hoc loco ad quotuis Quadrantes. In eadem tabula quando in tertia operatione regulæ aureæ, qua ſecunda inquiruntur, numerus reliquus fuit maior quam 64. maior nimirum dimidio Diuiſoris 128. aſſumpſimus vnum ſecundum integrum.

Quo pacto tabula 40. Quadrantum extendatur ad plures Quadrantes ſine ope aureæ regulæ.

IAM vero ſi quis tabulam extendere velit ad plures Quadrantes, facere id poterit ſine vlla operatione regulæ aureæ, hoc modo. Gradibus, Minutis ac ſecundis quadrageſimi Quadrantis, qui vſque ad grad. 128. productus fuit, adijciantur differentię inter gradus, minuta, ac ſecunda quadrageſimi Quadrantis, & gradus, Minuta, ac ſecunda aliorum quadrantum infra Quadrageſimum. Ita namque conficientur gradus, minuta, ac ſecunda quadrantum ſupra quadrageſimum. Nam gradus, minuta, ac ſecunda trium quorumlibet quadrantum, quorum vnus ſit quadrageſimus, alij vero duo æqualiter ab eo diſtent, obſeruant proportionem Arithmeti-

cam continuam, vt hic apparet, Numeri enim Quadrantum 39. 40. 41. in prima columna ſuperant ſe continue ſecundis 28. In ſecunda vero columna ſecundis 56. & in tertia Minuto 1. Secundis 24. &c. Ita quoque nu-

Par-	1			2			3			4			5			6		
tes.	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S
38	0	59	4	1	58	7	2	57	11	3	56	15	4	55	19	5	54	22
39	0	59	32	1	59	4	2	58	36	3	58	7	4	57	39	5	57	11
40	1	0	0	2	0	0	3	0	0	4	0	0	5	0	0	6	0	0
41	1	0	28	2	0	56	3	1	24	4	1	53	5	2	21	6	2	49
24	1	0	56	2	1	53	3	2	49	4	3	45	5	4	41	6	5	38

meri Quadrantum 38. 40. 42. in prima columna ſuperant ſe continue ſecundis 56. In ſecunda vero Minuto 1. ſecundis 53. & in tertia Minutis 2. ſecundis 49. &c. Quare ſi differentiæ inter gradus, minuta, ac ſecunda Quadrantis 39. & Quadrantis 40. adiiciantur ordine ad gradus, minuta, ac ſecunda Quadrantis 40. componētur gradus, minuta, ac ſecunda Quadrantis 41. Differentiæ autem inter Gradus, Minuta, ac Sec. Quadrantis 38. & Quadrantis 40. additæ ordinatim gradibus, minutis, ac ſecundis Quadrantis 40. conficient gradus Minuta, ac Secunda Quadrantis 42. Sic quoque differentiæ inter gradus, minuta, ac ſecunda Quadrantis 30. & Quadrantis 40. appoſitæ gradibus, minutis, ac ſecundis Quadrantis 40. component gradus, minuta, & ſecunda Quadrantis 50. &c.

SEQVITVR TABVLA QVADRANTIS PAVLO ante conſtructi, vbi ſinguli arcus producti diſtribuuntur in 128. partes æquales: in qua ſtatim apparet, quot Gradus, Minuta, ac Secunda ſingulis particulis cuiuſuis quadrantis reſpondeant: cuius quidem vſum ſupra expoſuimus.

Numerus ſiue ordo Quadrantum.

Partes.	1			2			3			4			5			6			7		
	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S
1	1	0	0	2	0	0	3	0	0	4	0	0	5	0	0	6	0	0	7	0	0
2	0	42	11	1	24	22	2	6	34	2	48	45	3	30	56	4	13	7	4	55	19
3	0	42	39	1	25	19	2	7	58	2	50	37	3	33	17	4	15	56	4	58	36
4	0	43	7	1	26	15	2	9	22	2	52	30	3	35	37	4	18	45	5	1	52
5	0	43	36	1	27	11	2	10	47	2	54	22	3	37	58	4	21	34	5	5	9
6	0	44	4	1	28	7	2	12	11	2	56	15	3	40	19	4	24	22	5	8	26
7	0	44	32	1	29	4	2	13	36	2	58	7	3	42	39	4	27	11	5	11	43
8	0	45	0	1	30	0	2	15	0	3	0	0	3	45	0	4	30	0	5	15	0
9	0	45	28	1	30	56	2	16	24	3	1	53	3	47	21	4	32	49	5	18	17
10	0	45	56	1	31	52	2	17	49	3	3	45	3	49	41	4	35	37	5	21	34
11	0	46	24	1	32	49	2	19	13	3	5	37	3	52	2	4	38	26	5	24	51
12	0	46	52	1	33	45	2	20	37	3	7	30	3	54	22	4	41	15	5	28	7
13	0	47	21	1	34	41	2	22	2	3	9	22	3	56	43	4	44	4	5	31	24
14	0	47	49	1	35	37	2	23	26	3	11	15	3	59	4	4	46	52	5	34	41
15	0	48	17	1	36	34	2	24	51	3	13	7	4	1	24	4	49	41	5	37	58
16	0	48	45	1	37	30	2	26	15	3	15	0	4	3	45	4	52	30	5	41	15
17	0	49	13	1	38	26	2	27	39	3	16	52	4	6	6	4	55	19	5	44	32
18	0	49	41	1	39	22	2	29	4	3	18	45	4	8	26	4	58	7	5	47	49
19	0	50	9	1	40	19	2	30	28	3	20	37	4	10	47	5	0	56	5	51	6
20	0	50	37	1	41	15	2	31	52	3	22	30	4	13	7	5	3	45	5	54	22
21	0	51	6	1	42	11	2	33	17	3	24	22	4	15	28	5	6	34	5	57	39
22	0	51	34	1	43	7	2	34	41	3	26	15	4	17	49	5	9	22	6	0	56
23	0	52	2	1	44	4	2	36	6	3	28	7	4	20	9	5	11	11	6	4	13
24	0	52	30	1	45	0	2	37	30	3	30	0	4	22	30	5	15	0	6	7	30
25	0	52	58	1	45	56	2	38	54	3	31	52	4	24	51	5	17	49	6	10	47
26	0	53	26	1	46	52	2	40	19	3	33	45	4	27	11	5	20	37	6	14	4
27	0	53	54	1	47	49	2	41	43	3	35	37	4	29	32	5	23	26	6	17	21
28	0	54	22	1	48	45	2	43	7	3	37	30	4	31	52	5	26	15	6	20	37
29	0	54	51	1	49	41	2	44	32	3	39	22	4	34	13	5	29	4	6	23	54
30	0	55	19	1	50	37	2	45	56	3	41	15	4	36	34	5	31	52	6	27	11
31	0	55	47	1	51	34	2	47	21	3	43	7	4	38	54	5	34	41	6	30	28
32	0	56	15	1	52	30	2	48	45	3	45	0	4	41	15	5	37	30	6	33	45
33	0	56	43	1	53	26	2	50	9	3	46	52	4	43	36	5	40	19	6	37	2
34	0	57	11	1	54	22	2	51	34	3	48	45	4	45	56	5	43	7	6	40	19
35	0	57	39	1	55	19	2	52	58	3	50	37	4	48	17	5	45	56	6	43	36
36	0	58	7	1	56	15	2	54	22	3	52	30	4	50	37	5	48	45	6	46	52
37	0	58	36	1	57	11	2	55	47	3	54	22	4	52	58	5	51	34	6	50	9
38	0	59	4	1	58	7	2	57	11	3	56	15	4	55	19	5	54	22	6	53	26
39	0	59	32	1	59	4	2	58	36	3	58	7	4	57	39	5	57	11	6	56	43
40	1	0	0	2	0	0	3	0	0	4	0	0	5	0	0	6	0	0	7	0	0

Numerus ſiue ordo Quadrantum.

Partes.	15			16			17			18			19			20			21.		
	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S
1	15	0	0	16	0	0	17	0	0	18	0	0	19	0	0	20	0	0	21	0	0
2	10	32	49	11	15	0	11	57	11	12	39	22	13	21	34	14	3	45	14	45	56
3	10	39	51	11	22	30	12	5	9	12	47	49	13	30	28	14	13	7	14	55	47
4	10	46	52	11	30	0	12	13	7	12	56	15	13	39	22	14	22	30	15	5	37
5	10	53	54	11	37	30	12	21	6	13	4	41	13	48	17	14	31	52	15	15	28
6	11	0	56	11	45	0	12	29	4	13	13	7	13	57	11	14	41	15	15	25	19
7	11	7	58	11	52	30	12	37	2	13	21	34	14	6	6	14	50	37	15	35	9
8	11	15	0	12	0	0	12	45	0	13	30	0	14	15	0	15	0	0	15	45	0
9	11	22	2	12	7	30	12	52	58	13	38	26	14	23	54	15	9	22	15	54	51
10	11	29	4	12	15	0	13	0	56	13	46	52	14	32	49	15	18	45	16	4	41
11	11	36	6	12	22	30	13	8	54	13	55	19	14	41	43	15	28	7	16	14	32
12	11	43	7	12	30	0	13	16	52	14	3	45	14	50	37	15	37	30	16	24	22
13	11	50	9	12	37	30	13	24	51	14	12	11	14	59	32	15	46	52	16	34	13
14	11	57	11	12	45	0	13	32	49	14	20	37	15	8	27	15	56	15	16	44	4
15	12	4	13	12	52	30	13	40	47	14	29	4	15	17	21	16	5	37	16	53	54
16	12	11	15	13	0	0	13	48	45	14	37	30	15	26	15	16	15	0	17	3	45
17	12	18	17	13	7	30	13	56	43	14	45	56	15	35	9	16	24	22	17	13	36
18	12	25	19	13	15	0	14	4	41	14	54	22	15	44	4	16	33	45	17	23	26
19	12	32	21	13	22	30	14	12	39	15	2	49	15	52	58	16	43	7	17	33	17
20	12	39	22	13	30	0	14	20	37	15	11	15	16	1	52	16	52	30	17	43	7
21	12	46	24	13	37	30	14	28	36	15	19	41	16	10	47	17	1	52	17	52	58
22	12	53	26	13	45	0	14	36	34	15	28	7	16	19	41	17	11	15	18	2	49
23	13	0	28	13	52	30	14	44	33	15	36	34	16	28	36	17	20	37	18	12	39
24	13	7	30	14	0	0	14	52	30	15	45	0	16	37	30	17	30	0	18	22	30
25	13	14	32	14	7	30	15	0	28	15	53	26	16	46	24	17	39	22	18	32	21
26	13	21	34	14	15	0	15	8	26	16	1	52	16	55	19	17	48	45	18	42	11
27	13	28	36	14	22	30	15	16	24	16	10	19	17	4	13	17	58	7	18	52	2
28	13	35	37	14	30	0	15	24	22	16	18	45	17	13	7	18	7	30	19	1	52
29	13	42	39	14	37	30	15	32	21	16	27	11	17	22	2	18	16	52	19	11	43
30	13	49	41	14	45	0	15	40	19	16	35	37	17	30	56	18	26	15	19	21	34
31	13	56	43	14	52	30	15	48	17	16	44	4	17	39	51	18	35	37	19	31	24
32	14	3	45	15	0	0	15	56	15	16	52	30	17	48	45	18	45	0	19	41	15
33	14	10	47	15	7	30	16	4	13	17	0	56	17	57	39	18	54	22	19	51	6
34	14	17	49	15	15	0	16	12	11	17	9	22	18	6	34	19	3	45	20	0	56
35	14	24	51	15	22	30	16	20	9	17	17	49	18	15	28	19	13	7	20	10	47
36	14	31	52	15	30	0	16	28	7	17	26	15	18	24	22	19	22	30	20	20	37
37	14	38	54	15	37	30	16	36	6	17	34	41	18	33	17	19	31	52	20	30	28
38	14	45	56	15	45	0	16	44	0	17	43	7	18	42	11	19	41	15	20	40	19
39	14	52	58	15	52	32	16	52	2	17	51	34	18	51	6	19	50	37	20	50	9
40	15	0	0	16	0	0	17	0	0	18	0	0	19	0	0	20	0	0	21	0	0

Numerus ſiue ordo Quadrantum.

Partes.	22			23			24			25			26			27			28		
	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S
1	22	0	0	23	0	0	24	0	0	25	0	0	26	0	0	27	0	0	28	0	0
2	15	28	7	16	10	19	16	52	30	17	34	41	18	16	52	18	59	4	19	41	15
3	15	38	26	16	21	6	17	3	45	17	46	24	18	29	4	19	11	43	19	54	22
4	15	48	45	16	31	52	17	15	0	17	58	7	18	41	15	19	24	22	20	7	30
5	15	59	4	16	42	39	17	26	15	18	9	51	18	53	26	19	37	2	20	20	37
6	16	9	22	16	53	26	17	37	30	18	21	34	19	5	37	19	49	41	20	33	45
7	16	19	41	17	4	13	17	48	45	18	33	17	19	17	49	20	2	21	20	46	52
8	16	30	0	17	15	0	18	0	0	18	45	0	19	30	0	20	15	0	21	0	0
9	16	40	19	17	25	47	18	11	15	18	56	43	19	42	11	20	27	39	21	13	7
10	16	50	37	17	36	34	18	22	30	19	8	26	19	54	22	20	40	19	21	26	15
11	17	0	56	17	47	21	18	33	45	19	20	9	20	6	34	20	52	58	21	39	22
12	17	12	15	17	58	7	18	45	0	19	31	52	20	18	45	21	5	37	21	52	30
13	17	21	34	18	8	54	18	56	15	19	43	36	20	30	56	21	18	17	22	5	37
14	17	31	52	18	19	41	19	7	30	19	55	19	20	43	7	21	30	56	22	18	45
15	17	42	11	18	30	28	19	18	35	20	7	2	20	55	19	21	43	36	22	31	52
16	17	52	30	18	41	15	19	30	0	20	18	45	21	7	30	21	56	15	22	45	0
17	18	2	49	18	52	2	19	41	15	20	30	28	21	19	41	22	8	54	22	58	7
18	18	13	7	19	2	49	19	52	30	20	42	11	21	31	52	22	21	34	23	11	15
19	18	23	26	19	13	36	20	3	45	20	53	54	21	44	4	22	34	13	23	24	22
20	18	33	45	19	24	22	20	15	0	21	5	37	21	56	15	22	46	52	23	37	30
21	18	44	4	19	35	9	20	26	15	21	17	21	22	8	26	22	59	32	23	50	37
22	18	54	22	19	45	56	20	37	30	21	29	4	22	20	37	23	12	11	24	3	45
23	19	4	41	19	56	43	20	48	45	21	40	47	22	32	49	23	24	51	24	16	52
24	19	15	0	20	7	30	21	0	0	21	52	30	22	45	0	23	37	30	24	30	0
25	19	25	19	20	18	17	21	11	15	22	4	13	22	57	11	23	50	9	24	43	7
26	19	35	37	20	29	4	21	22	30	22	15	56	23	9	22	24	2	49	24	56	15
27	19	45	56	20	39	51	21	33	45	22	27	39	23	21	34	24	15	28	25	9	22
28	19	56	15	20	50	37	21	45	0	22	39	22	23	33	45	24	28	7	25	22	30
29	20	6	34	21	1	24	21	56	15	22	51	6	23	45	56	24	40	47	25	35	37
30	20	16	52	21	12	11	22	7	30	23	2	49	23	58	7	24	53	26	25	48	45
31	20	27	11	21	22	58	22	18	45	23	14	32	24	10	19	25	6	6	26	1	52
32	20	37	30	21	33	45	22	30	0	23	26	15	24	22	30	25	18	45	26	15	0
33	20	47	49	21	44	32	22	41	15	23	37	58	24	34	41	25	31	24	26	28	7
34	20	58	7	21	55	19	22	52	30	23	49	41	24	46	52	25	44	4	26	41	15
35	21	8	26	22	6	6	23	3	45	24	1	24	24	59	4	25	56	43	26	54	22
36	21	18	45	22	16	52	23	15	0	24	13	7	25	11	15	26	9	22	27	7	30
37	21	29	4	22	27	39	23	26	25	24	24	51	25	23	26	26	22	2	27	20	37
38	21	39	22	22	38	26	23	37	30	24	36	34	25	35	37	26	34	41	27	33	45
39	21	49	41	22	49	13	23	48	45	24	48	17	25	47	49	26	47	21	27	46	52
40	22	0	0	23	0	0	24	0	0	25	0	0	26	0	0	27	0	0	28	0	0

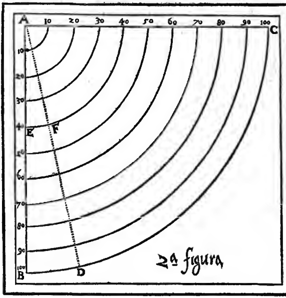
Numerus ſiue ordo Quadrantum.

Partes	29			30			31			32			33			34			35		
	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S
1	29	0	0	30	0	0	31	0	0	32	0	0	33	0	0	34	0	0	35	0	0
2	20	23	26	21	5	37	21	47	49	22	30	0	23	12	11	23	54	22	24	36	34
3	20	37	2	21	19	41	22	2	21	22	45	0	23	27	39	24	10	19	24	52	58
4	20	50	37	21	33	45	22	16	52	23	0	0	23	43	7	24	26	15	25	9	22
5	21	4	13	21	47	49	22	31	24	23	15	0	23	58	36	24	42	11	25	25	47
6	21	17	49	22	1	52	22	45	56	23	30	0	24	14	4	24	58	7	25	42	11
7	21	31	24	22	15	56	23	0	28	23	45	0	24	29	32	25	14	4	25	98	36
8	21	45	0	22	30	0	23	15	0	24	0	0	24	45	0	25	30	0	26	15	0
9	21	58	36	22	44	4	23	29	32	24	15	0	25	0	28	25	45	56	26	31	24
10	22	12	11	22	58	7	23	44	4	24	30	0	25	15	56	26	1	52	26	47	49
11	22	25	47	23	12	11	23	58	36	24	45	0	25	31	24	26	17	49	27	4	13
12	22	33	22	23	26	15	24	13	7	25	0	0	25	46	52	26	33	45	27	20	37
13	22	52	58	23	40	19	24	27	39	25	15	0	26	2	21	26	49	41	27	37	2
14	23	6	34	23	54	22	24	42	11	25	30	0	26	17	49	27	5	37	27	53	26
15	23	20	9	24	8	26	24	56	43	25	45	0	26	33	17	27	21	34	28	9	51
16	23	33	45	24	32	30	25	11	50	26	0	0	26	48	45	27	37	30	28	26	15
17	23	47	21	24	36	34	25	25	47	26	15	0	27	4	13	27	53	26	28	42	39
18	24	0	56	24	50	37	25	40	19	26	30	0	27	19	41	28	9	22	28	59	4
19	24	14	32	25	4	41	25	54	51	26	45	0	27	35	9	28	25	19	29	16	24
20	24	28	7	25	18	45	26	9	22	27	0	0	27	50	37	28	41	15	29	31	52
21	24	41	43	25	32	49	26	23	54	27	15	0	28	6	6	28	57	11	29	48	17
22	24	55	19	25	46	52	26	38	26	27	30	0	28	21	34	29	13	7	29	4	41
23	25	8	54	26	0	50	26	52	58	27	45	0	28	37	2	29	29	4	30	21	6
24	25	22	30	26	15	0	27	7	30	28	0	0	28	52	30	29	45	0	30	37	30
25	25	36	6	26	29	4	27	22	2	28	15	0	29	7	58	30	0	56	30	53	54
26	25	49	41	26	43	7	27	36	34	28	30	0	29	23	26	30	16	52	30	10	19
27	26	3	17	26	57	21	27	51	6	28	45	0	29	38	54	30	32	49	31	26	43
28	26	16	52	27	11	15	28	5	37	29	0	0	29	54	22	30	48	45	31	43	7
29	26	30	28	27	25	19	28	20	9	29	15	0	30	9	51	31	4	41	31	59	32
30	26	44	4	27	39	22	28	34	41	29	30	0	30	25	19	31	20	37	32	15	56
31	26	57	39	27	53	26	28	49	13	29	45	0	30	40	47	31	36	34	32	32	21
32	27	11	15	28	7	30	29	3	45	30	0	0	30	56	15	31	52	30	32	48	45
33	27	24	51	28	21	34	29	18	17	30	15	0	31	11	43	32	8	26	32	5	9
34	27	38	26	28	35	37	29	32	49	30	30	0	31	27	11	32	24	22	33	21	34
35	27	52	2	28	49	41	29	47	21	30	45	0	31	42	39	32	40	16	33	37	58
36	28	5	37	29	3	45	30	1	52	31	0	0	31	58	7	32	56	15	33	54	22
37	28	19	13	29	17	49	30	16	24	31	15	0	32	13	36	33	12	11	34	10	47
38	28	32	49	29	31	52	30	30	56	31	30	0	32	29	4	33	28	7	34	27	11
39	28	46	24	29	45	56	30	45	28	31	45	0	32	44	32	33	44	4	34	43	36
40	29	0	0	30	0	0	31	0	0	32	0	0	33	0	0	34	0	0	35	0	0

inſtrumenti proto-dem vſu. ſinus toti in figura aſſumi poterunt: ita vt non male feceris, ſi rectum conſtituas. Ita namque quad rantem quoque recto angulo oppoſitum obtinebis: Recta autem AB, in 100. particulas æquales ſecta, (poſſet etiam ſecari in 1000. ſi commode fieri poſſet, vt de ſuperiore inſtrumento diximus) deſcribantur ex centro A, per ſingulas partes 100. arcus circulorum, qui rectam quoque AC, in 100. particulas æquales diſtinebunt: parataq; erit figura.

NAM ſi in infimo arcu BC, ſumatur interuallum BD, dato ſinui toti æquale, ducaturque recta occulta AD, (hæc in ænea tabella ducenda erit atramento non admodum nigro, vel alio colore, vt poſtea deleri poſſit) fungentur rectæ AB, AD, officio regularum AF, AG, ſuperioris inſtrumenti ad propoſitam magnitudinẽ BD, aperti, & dilatati. Quamobrem inuenientur in hac figura omnes Tangentes reſpectu ſinus totius BD, vt ſupra. *a 2. ſexti.* Vt Tangens verbi gratia partium 40. erit interuallum EF, [a] cum ducta recta EF, parallela ſit rectæ ductæ BD, propterea quod latera AB, AD, ſecta ſunt in E, F, proportionaliter. Alij vſus ſupra explicati facile quoque ad hanc figuram aptabuntur: præſertim ſi in alteram faciem laminæ transferantur chordæ omnium arcuum quadrantis alicuius, vt ex dato circulo quotcunque gradus poſſint abſcindi, &c. Habet figura hæc id commodi, quod periculum non eſt, ne clauus in centro atteratur, ſicut in ſuperiore inſtrumento. Deinde in eadem hac figura poſſunt accipi particulæ etiam minimæ, prope centrum, & in extremo quadrante ſinus totus quamuis perpuſillus, quod in ſuperiore inſtrumento non licebat.

QVAMVIS autem ad magnitudinum dimenſiones non omnes huius inſtrumenti partium vſus neceſſarii ſint, ſed ſolum ille, quem Num. 1. & 2. explicauimus, potiſſimum requiratur; placuit tamen tam varios eius vſus in vnum hunc locum congerere, tum vt inſtrumenti præſtantia magis eluceat, tum vt ſtudioſus lector habeat, vbi alios vſus, quos deſiderat, inquirere debeat. Non ſum etiam neſcius, quam plurimos alios præclari huius inſtrumenti vſus poſſe excogitari, quos proprio Marte, atque induſtria quiuis facile, quando id res poſtulauerit, cogitando inueniet: nos præcipuos ſolum indicare voluimus hoc loco.

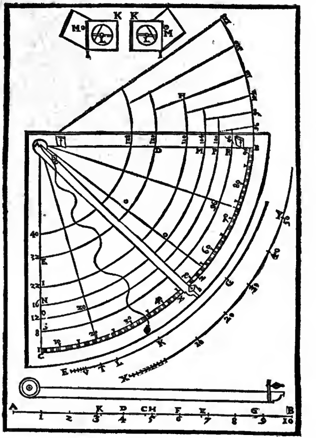


CONSTRVCTIO QVADRANTIS, IN QVO MINVta quoque, ac ſecunda deprehendantur, etiamſi gradus in ea ſecti non ſint. Et quo pacto eadem minuta, & ſec. obtineri poſſint in quadrante in 90. gradus diſtributo. Ac denique qua ratione ex data recta in pauciſſimas partes æquales diuiſa abſcindi poſſint partes milleſimæ, &c.

CAPVT II.

HOC eſt ſecundum, quod præmittendum eſſe diximus, qua videlicet via cognoſcere poſſimus, quot minuta, & ſecunda in propoſita particula cuiuſuis gradus contineantur: Et quot partes milleſimas quælibet particula datæ rectæ comprehendat, licet in pauciſſimas ea partes ſit diſtributa. Qua de re multa quidem extant à nobis alias conſcripta: ſed ea vnum in locum colligere, & hic ſimul omnia, proponere viſum fuit, quod id ad perfectam rei cognitionem multo fore commodius iudicaremus. Itaque Petrus Nonius Luſitanus ſummo ingenio Mathematicus ad hanc rem in libello de crepuſculis propoſ. 3. partis ſecundæ tale excogitauit artifi-

artificium. Deſcriptis ex A, centro quadrantis BC, intra eundem quadrantem alijs quadraginta quatuor quadrantibus minoribus quomodocunque inter ſe diſtantibus, vt in vniuerſum ſint 45. diuidit eum, qui quadranti BC, proximus eſt, & in 90. gradus diſtributus, in 89. partes æquales, ſequentem in 88. alium in 87. atq; ita deinceps, vt partes ſequentis ſemper ſint vna pauciores, quam partes proxime pręcedentis quadrantis; adeo vt vltimus, & omnium minimus contineat 46. partes æquales. Plures quadrantes non eſt opus deſcribere, quia eorum partes eſſent duplę partium quadrantum iam deſcriptorum. Vt pars vna quadrantis in 44. partes diuiſi contineret duos gradrus quadrantis maximi in 90. gradus diſtributi: pars vero vna quadrantis in 44. partes diſtincti complecteretur $\frac{2}{88}$. quadrantis in 88. partes diuiſi, & vna pars quadrantis diuiſi in partes 43. includeret $\frac{2}{86}$. quadrantis in 86. partes diſtributi, &c. Hac ratione in primo quadrante in 90. gradus diſtributo aſſignabimus omnes has partes aliquotas, $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{5}$. $\frac{1}{6}$. $\frac{1}{7}$. &c. vſq; ad $\frac{1}{90}$. Nam vnus gradus primi quadrantis eſt $\frac{1}{90}$. Vna autem pars ſecundi quadrantis eſt $\frac{1}{89}$. Vna tertij, $\frac{1}{88}$. atque ita deinceps vſque ad quadrantem 45. qui in 46. partes

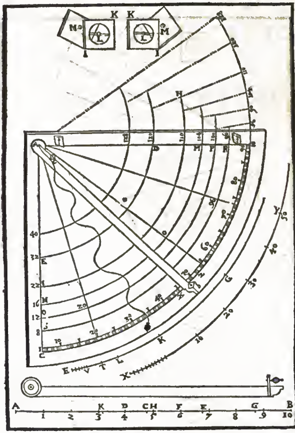


diſtributus eſt, cuius pars vna continet $\frac{1}{46}$. ita vt beneficio 45. quadrantum habeamus omnes partes à $\frac{1}{46}$ vſque ad $\frac{1}{90}$. deinde quoniam quælibet res diuiſa in quotuis partes numero pares diuiſa etiam eſt in partes, quæ illarum medietatem conſtituunt, (nam linea ſecta in 10. partes, v.g. diuiſa eſt etiam in 5. cum $\frac{2}{10}$. efficiant $\frac{1}{5}$. &c.) fit vt $\frac{2}{90}$. primi quadrantis exhibeat nobis $\frac{1}{45}$. & $\frac{2}{88}$. tertij quadrantis in 88. partes diſtributi, $\frac{1}{44}$. & $\frac{2}{86}$ quinti quadrantis diſtributi in 86. partes $\frac{1}{43}$. atque ita deinceps progrediendo per quadrantes partium numero pariũ vſque ad quadrantem partium 46. cuius $\frac{2}{46}$ offerent nobis $\frac{1}{23}$. Poſt hæc $\frac{3}{66}$. dabunt $\frac{1}{22}$. & $\frac{3}{63}$. præbebunt $\frac{1}{21}$. & ſic deinceps vſque ad $\frac{3}{48}$. quę exhibebunt $\frac{1}{16}$. Rurſus $\frac{4}{60}$. dabunt $\frac{1}{15}$. & $\frac{4}{56}$. dabunt $\frac{1}{14}$. & ita deinceps vſque ad $\frac{8}{48}$. quę offerent $\frac{1}{6}$. Præterea $\frac{5}{50}$. dabunt $\frac{1}{5}$. & $\frac{1}{8}$. dabunt $\frac{1}{4}$. & $\frac{1}{6}$. exhibebunt $\frac{1}{3}$ Ac tandem $\frac{1}{4}$. offerent $\frac{1}{2}$.

HÆC eſt conſtructio quadrantis, quam Petrus Nonius nobis reliquit, difficilis illa quidem cum vix quadrans in partes, quarum numerus primus eſt, vt in 89. 87. &c à quoquam, etiamſi omnem adhibeat diligentiam ſine errore diuidi poſſit. Vſus autem perfacilis eſt. Nam obſeruaturus interdiu altitudinem ſolis, aut nocte

ſerena

ſerena altitudinem alicuius ſtellæ, notet diligenter, in cuius quadrantis integram aliquam partem filum perpendiculi, aut linea fiduciæ incidat: (Vix autem, aut perraro continget, vt filum non cadat in partem aliquam integram alicuius quadrantis, propter multitudinem quadrantum, & partium diuerſarum:) Deinde fiat vt numerus omnium partium illius quadrantis, in cuius partem aliquam integram filum cecidit, ad numerum partium à filo abſciſſarum, ita numerus graduum 90. in quos idem quadrans diuiſus concipiendus eſt, ad aliud; produceturque numerus graduum dictis partibus abſciſſis reſpondentium. Et ſi quid in diuiſione fuerit reſidui, illud per 60. multiplicatum, atque in eundem diuiſorem, hoc eſt, in numerum omnium partium dicti quadrantis diuiſum, dabit Minuta graduum: Et ſi adhuc quidpiam remanſerit in hac diuiſione, illud eodem modo per 60. multiplicatum, & in eundem diuiſorem diuiſum exhibebit ſecunda, Atque hoc modo progrediendo reperietur Tertia, Quarta, &c. donec nihil in diuiſione ſuperſit: ſed ſatis eſt ad ſecunda vſque progredi. Exempli



pli gratia. Ponatur quadrans D E, diuiſus in 70. partes, & filum perpendiculi A D, abſcidiſſe ex eo partes 40. in G. Fiat ergo vt 70. ad 40. ita 90 ad aliud producenturque gradus 51. Sed quia in diuiſione ſuperſunt 30. multiplicabimus ea in 60. & numerum productum 1800. per 70. rurſus partiemur, vt prodeant Min. 25. Quoniam autem adhuc ſuperſunt in diuiſione 50 multiplicabimus ea in 60. & procreatum numerum 3000. per eadem 70. diuidemus vt producantur ſecunda 42. Rurſum quia iterum ſuperſunt 60. quæ multiplicata in 60. faciunt 3600. quo numero per 70. diſtributo, producentur Tertia 51. &c.

DEMONSTRATIO huius operationis perſpicua eſt. Quoniam enim vt angulus DAE, ad angu-
a 33. ſexti. lum GAE,[a] ita arcus DE, ad arcum GE: vt idem angulus DAE, vel BAC, ad eundem angulũ GAE, vel ZAC, ita arcus BC, ad arcum ZC, erit vt arcus DE, hoc eſt, quadrans in partes 70. diuiſus, ad arcum GE, earundem
b 11. quint. partium 40.[b] ita arcus BC, id eſt, quadrans in 90. gradus diſtributus, ad arcum ZC, continentem numerum determinatum graduum, Minutorum, &c.

SED quoniam factu perdiſſicile eſt, vt dicti quadrantes in eiuſmodi partes ſecentur, inuenit Illuſtriſſimus Dominus Iacobus Curtius Cæſareus apud Summum Pontificem Legatus, exquiſitæ doctrinæ & ſingularis induſtriæ vir, eiuſmodi remedium. Deſcriptis ex A, quotlibet quadrantibus, producantur ſinguli vltra ſemidiametrum AB, proximus quidem extremo quadranti vſque ad gradum 91. hoc eſt, vſque ad lineam ex A, ad grad. 91. ductam: ſequens deinde vſque ad grad. 92. & inſequens vſque ad grad. 93. & ſic deinceps vſque ad alios atque alios gradus. In figura exemplum habes in quadrantibus vſque ad grad. 96. 100. 104. 110. 120. & 128. tantum productis, ne multitudo, ſi ad ſingulos gradus eſſent producti, confuſionem pareret. Deinde vnuſquiſque arcus ita productus ſecetur in 90. partes æquales: quæ diuiſio longe facilior eſt illa ſuperiore, cum quilibet horum arcuum non difficilius in 90. partes æquales diſtribui poſſit, quam quadrans in 90. gradus.

VSVS idem eſt qui ſuperioris constructionis. Nam cadente filo perpendiculi in partem aliquam integram alicuius quadrantis, ſi fiat, vt 90. nempe vt numerus partium, in quas quilibet arcus productus diuiſus eſt, ad numerum partium, quas filum abſcidit, ita numerus graduum in illo arcu contentorum, in cuius partem aliquam integram filum cecidit, ad aliud, reperietur numerus graduum dictis partibus abſciſſis reſpondentium, &c. vt prius.

ET quoniam facile eſt, (vt vulgo dici ſolet) inuentis addere, conabimur eam conſtructionem aliquanto faciliorem facere hoc modo. Deſcriptis ex A, centro quadrantis BC, intra eundem quadrantem alijs 39. quadrantibus æqualiter, ſi placet, inter ſe diſtantibus, vt venuſtior appareat figura: ita vt in vniuerſum ſint 40. quadrãtes, quorũ extimus in 90. gradus more ſolito ſecetur: proximus deinde in 128. partes æquales, primum videlicet in duas, & vtraque pars rurſus in duas, & quælibet harum quatuor partium iterum in duas, & ita deinceps, donec 7. diuiſiones abſolutæ ſint, atque adeo totus quadrans in 128. partes æquales diſtributus. Poſt hæc producantur alij quadrantes vltra ſemidiametrum AB, vt dictũ eſt, ille quidem, qui tertius eſt ab extremo BC, vſque ad gradũ 91. extremi quadrantis CB, producti hoc eſt, vſque ad lineam ex A, ad gradum 91. ductam: ſequens deinde vſque ad gradum 92. & inſequens ad gradum 93. atque ita deinceps vſque ad alios gradus, ita vt quadrageſimus quadrans vſque ad gradum 128. producatur. Hi arcus ita producti diuidantur ſinguli in 128. partes æquales, ſicuti quadrans extimo quadranti proximus, qua diuiſione peracta, partes ſupra ſemidiametrum AB, reſecentur, tanquam ſuperuacaneæ.

Quadrantis cõſtructio ad min. & ſecund. cognoſcenda.

2 QVOD ſi quadrantes vltra ſemidiametrum AB, produci commode non poſſint, ob ſpatij anguſtias, inſtituenda erit diuiſio hoc modo. In quadrante extremo BC, ſumatur ſemiſſis numeri graduum, quem quilibet arcus productus continere deberet, & ex A, ad illam ſemiſſem linea occulta ducatur. Hæc enim ſecabit quadrãtem propoſitum in puncto, vbi arcus productus prima diuiſione bifariam ſecaretur. Quare ſi arcus inter hoc punctum & ſemidiametrum AC, comprehendens 64. partes ex illis 128. totius arcus producendi, ſecetur bifariam continue ſex diuiſionibus, parteſque illius in arcum inter idem punctum, & ſemidiametrum AB, transferantur, quæ transferri poſſunt, habebuntur in dato quadrante omnes partes, quæ ex illis 128. in quas totus arcus productus diuideretur, in quadrantẽ cadunt. Vt ſi diuidendus ſit quadrans MN, vſq; ad gr. 104. producendus, ducemus ad gr. 52. nimirum ad ſemiſſem grad. 104. rectam, quæ ſecet quadrantẽ MN, in O. Nam ſi arcus ON, continens partes 64. ex illis 128. totius arcus producti, ſecetur continue bifariam ſex diuiſionibus, parteſq; eius in arcũ OM, transferantur, habebuntur omnes partes in quadrantem MN, cadentes, non ſecus, ac ſi totus arcus productus in 128. partes diſtributus eſſet. Sic etiam, ſi quadrans ad gradum 125. producendus, diuidendus ſit, ducenda erit linea occulta ad gradum 62½. nimirum ad ſemiſſem graduum 125. Item ſi quadrans DE, 120. producendus, diuidendus ſit, ducenda erit linea occulta ad gradum 60. &c.

3 HISCE quadrantibus ita diuiſis duplices numeri aſcribendi ſunt prope ſemidiametrum quidẽ AC, numeri quadrantum, vt 1. prope extremum; 2. iuxta ſequentem, & 3. iuxta tertiũ &c. Ita vides quadranti, qui vſq; ad gradum 96. productus eſt, appoſitũ eſſe numerum 8, cum is octauus ſit. Primus enim eſt quadrãs BC, ſecundus, qui ſequitur, 90. graduum, Tertius graduum 91. quartus graduum 92. quintus graduũ 93. Sextus graduum 94. Septimus graduum 95 & Octauus graduum 96. Sic etiam quadranti vſq; ad grad. 100. producto cernis aſcriptum eſſe numerũ 12. &c. At vero iuxta ſemidiametrum AB, numeri illorum graduum ſcribendi ſunt, ad quos vſq; quilibet quadrans extenditur, vt in figura vides. Ita enim cadente filo perpendiculi in partem aliquam integram alicuius quadrantis, illico iuxta ſemidiametrum AB, apparebit, ad quem gradum vſque quadrans ille productus fuit. Qui quidem graduum numerus in regula trium tertium occupat locum, vt minuta, atq; ſecunda inquirantur, vt paulo poſt Num. 7. dicemus.

Qui numeri quadrãtibus aſcribenai ſint.

4 IVXTA ſemidiametrum AB, affigenda ſunt duo pinnacidia ad angulos rectos, ita vt foramina, per quæ radius ſolis, vel viſualis tranſire debet, ad perpendiculum rectæ AB, exiſtant; alioquin non paruus error in dimenſione linearum committeretur.

Pinnacidia quo pacto affigenda.

5 QVANDO porro per radium viſualem altitudo ſtellæ inueſtiganda eſt, vel punctũ aliquod lineę dimetiendæ inſpiciendum, conſtrui debent duo pinnacidia hoc modo. In tabella ænea quadrata IK fiat foramen rotundum mediocris magnitudinis. in cuius medio relinquatur foramen L, quod ſuſtineatur à diametro quadam tenui; Et circa I, circumuertatur alia tabella ænea quadrata ſubtilis, priori æqualis, in cuius medio ſit etiam perexiguũ foramẽ M, reſpondens foramini L, quando hæc tabella priori ſuperimponitur. Huiuſmodi duo pinnacidia ſi fiant, dici vix poteſt, quã expeditè quamcunq; ſtellã; aut aliã quamlibet rem contueri liceat. Nam pinnacidiũ, quod ab oculo propius abeſt, claudendum eſt tabella illa quadrata circumducta circa punctum, I, aliud autem aperiendum. Sic enim fiet, vt radius viſualis per foramen M, prope oculum immiſſus, illico conſpiciat per maius foramen L, in pinnacidio remotiore ſtellam, vel aliam rem propoſitam: quia foramen illud maius apertum facile rem ipſam intueri, & ſine vllo negotio foramen exiguum L, in eodem pinnacidio remotiore in ipſam rem viſum dirigere nos ſinit.

Pinnacidia pro radio viſuali quo pacto conſtruenda.

6 POSTREMO ex centro A, egrediatur filum ſubtiliſſimum cum appenſo perpendiculo. Aut certe loco fili conſtituatur regula ænea admodum tenuis cum linea fiduciæ, in cuius extremitate promineat laminula

Conſtructio regulæ, loco fili.

Digitized by Google

ex qua ſuſpendatur perpendiculum hac conditione, vt regula libere pendente, filum aliquod cum perpendiculo demiſſum, ad vnguem lineæ fiduciæ reſpondeat. Atque in hoc ſumma diligentia adhibenda eſt, alioquin gradus non rectè à linea fiduciæ indicarentur.

Quadrās pendulus. ATQVE hoc modo Quadrans in ſuo vſu erit pendulus, ſiue res in ſublimi exiſtens ex B, per A, ſiue res in plano poſita ex A, per B, inſpiciatur.

Quadrās ſtabilis. QVOD ſi circa centrum A, regula affigatur cum linea fiduciæ A b, & duobus pinnacidijs c, b, quorum foramina lineæ fiduciæ reſpondeant, ipſaque regula ita firmetur, vt circa centrum circumducta ad quemcunq; gradum immota permaneat, erit Quadrans in ſuo vſu ſtabilis eundem ſemper ſitum habens, ſiue res in ſublimi exiſtens inſpiciatur ex A, per b, poſito nimirum latere A C, Horizonti parallelo, in plano horizontali, ſiue rem in plano poſitam quis intueatur ex A, per b, latere A C, ad Horizontem exiſtente perpendiculari, & latere A B, eidem Horizonti parallelo, ſuperioremque locum occupante. Verum hæc planius intelligentur, cum de vtroque vſu lib. 2. agemus.

Vſus quadrantis proxime conſtructi in minutis exquirendis. 7. VSVS quadrantis hoc modo conſtructi in minutis, ac ſecundis exquirendis, præclarus eſt. Nam cadente filo perpendiculi, aut linea fiduciæ AB, in partem aliquam integrā alicuius Quadrantis (quod fere ſemper accidet propter diuerſitatem partium in tanta quadrantum multitudine) ſi fiat vt 128. nimirum vt numerus partium, in quas quilibet arcus productus diuiditur, ad partes à filo abſciſſas, ita numerus graduum in toto arcu producto comprehenſorum, in cuius partem aliquam integram filum incidit, ad aliud, reperietur numerus graduum in arcu abſciſſo contentorum. Et ſi quid in diuiſione fuerit reſidui, illud per 60. multiplicatum, atque in eundem diuiſorem, hoc eſt, in 128. diuiſum, dabit minuta graduum. Et ſi adhuc quippiam remanſerit in hac diuiſione, illud eodem modo per 60. multiplicatum, & in eundem diuiſorem 128. diuiſum, exhibebit ſecunda. Atque hoc modo progrediendo, reperientur Tertia, Quarta, &c. donec nihil in diuiſione ſuperſit. Tunc enim vlterius progrediendum non eſt; Sed ſatis eſt, ad ſecunda vſque progredi. Exempli gratia. Ponatur ex Quadrante PQ. vſque ad gradum 100. producto, qualis eſt duodecimus, filum perpendiculi abſcidiſſe partes 20. ex illis 128. in quas totus arcus productus diſtributus eſt. Fiat ergo, vt 128. ad 20. ita 100. ad aliud; inuenienturque gradus 15. ſupereruntque in diuiſione 80. quæ ducta in 60. faciunt 4800. quæ diuiſa per 128. dant minuta 37. & ſuperſunt adhuc 64. quæ ſi ducantur in 60. & productus numerus 3840. diuidatur per 128. prodibunt Sec. 30. nihilque in diuiſione ſupereſt. Arcus ergo Q, 20. vel arcus Quadrantis B C, inter C, & filum perpendiculi includit grad. 15. Min. 37. Sec. 30. Rurſus ponamus ex octauo quadrante R S, vſque ad gradum 96. producto filum perpendiculi abſcidiſſe partes 96. ex illis 128. quæ in toto arcu producto continentur. Fiat ergo, vt 128. ad 96. ita 96. ad aliud: reperienturque gradus 72. præciſe arcui abſciſſo conuenire. Item ceciderit filum in partem 64. Quadrantis ſextidecimi M N, vſque ad gradum 104. producti. Si ergo fiat, vt 128. ad 64. ita 104. ad aliud, producentur quoque grad. 52. præciſe, atque ita de cæteris; dummodo ſis memor, vt ſi quid in diuiſionibus ſuperfuerit, reſidua diuiſionum multiplicentur per 60. & producti numeri per 128. diuidantur, vt dictum eſt.

DEMONSTRATIO huius operationis perſpicua eſt. Quoniam enim eſt. (in vltimo exemplo) vt arcus NM, vſque ad grad 104. productus, quatenus in 128. partes ſectus eſt, ad arcum N O, earundem partium 64. vt idem arcus NM, totus productus, quatenus grad. 104. complectitur, ad eundem arcum NO, reſpectu eorundem graduum; efficitur, vt ſi fiat quemadmodum partes 128. totius arcus NM, vſque ad grad. 104. producti ad partes 64. in arcu NO, contentas, ita idem arcus NM, productus graduum 104. ad aliud, reperiantur gradus in eodem arcu NO, contenti, &c.

8. IN gratiam autem ſtudioſorum placet hic tabellam inſerere, in qua ex reſiduo primæ operationis regulæ aureæ, qua gradus eliciuntur, mox apparet, quot minuta, & ſecunda illi reſiduo reſpondeant: Ita vt opus ſit ſemel tantum regulam auream adhibere. *Conſtructio & vſus tabellæ pro minutis & ſecundis.* Conſtruitur autem tabella, ſi ſingula reſidua, quæ plura, quam 127. eſſe nequeunt, per 60. multiplicentur, productique numeri per 128. diuidantur. Atque vt ſtructura, & vſus huiuſce tabellæ facilius intelligatur, apponemus vnum exemplum. Cadat verbi gratia filum perpendiculi in partem 29. Quadrantis 32. ad gradum vſque 120. producti. Fiat igitur vt 128. ad 29. ita 120. ad aliud; producenturque grad. 27. Quia vero in diuiſione ſuperſunt 24. ſub quo numero in tabella ponuntur duo hi numeri 11. 15. Prior ergo dat minuta, & poſterior ſecunda; Ita vt arcus à filo abſciſſus complectatur grad. 27. Min. 11. Sec. 15. Atque hæc minuta, & Secunda producuntur, ſi reſiduum diuiſionis, nimirum 24. ducatur in 60. & productus numerus per 128. diuidatur, &c. Eadem ratio eſt de reliquis tabellæ numeris. Nam ſemper ſuperior numerus eſt ille, qui in diuiſione remanſit: Inferiorum autem numerorum prior ad minuta, & poſterior ad ſecunda ſpectat.

SEQVITVR TABELLA.

TABEL-

TABELLA INDICANS, QVOT MINVTA, AC Secunda, reſiduo primæ operationis regulæ aureæ, qua gradus in ſupra nominatæ tabulæ conſtructione eruuntur, reſpondeant.

1 M. S. 0.28	2 M. S. 0.56	3 M. S. 1.24	4 M. S. 1.52	5 M. S. 2.21	6 M. S. 2.49	7 M. S. 3.17	8 M. S. 3.45	9 M. S. 4 13	10 M. S. 4 41	11 M. S. 5. 9	12 M. S. 5.37
13 M. S. 6. 6	14 M. S. 6.34	15 M. S. 7. 2	16 M. S. 7.30	17 M. S. 17.58	18 M. S. 8.26	19 M. S. 8.54	20 M. S. 9.22	21 M. S. 9.51	22 M. S. 10.19	23 M. S 10.47	24 M. S 11.15
25 M. S. 11.43	26 M. S. 12.12	27 M. S. 12.39	28 M. S. 13. 7	29 M. S. 13.36	30 M. S. 14. 4	31 M. S. 14.32	32 M S. 15. 0	33 M. S. 15.28	34 M. S. 15.56	35 M. S. 16.24	36 M. S. 16 52
37 M. S. 17.21	38 M. S. 17.49	39 M. S. 18.17	40 M. S. 18.45	41 M. S. 19.13	42 M. S. 19.41	43 M. S. 20. 9	44 M. S. 20.37	45 M. S. 21. 6	46 M. S. 21.34	47 M. S. 22. 2	48 M. S. 22.30
49 M. S 22.58	50 M. S. 23.26	51 M. S. 23.54	52 M. S. 24.22	53 M. S. 24.51	54 M. S. 25.19	55 M. S. 25.47	56 M. S. 26.15	57 M. S. 26.43	58 M. S. 27.11	59 M. S. 27.39	60 M. S. 28. 7
61 M. S. 26.36	62 M. S. 29. 4	63 M. S. 29.32	64 M. S. 30. 0	65 M. S. 30.28	66 M. S. 30.56	67 M. S. 31.24	68 M. S. 31.52	69 M. S. 32.21	70 M. S. 32 49	71 M. S. 33.17	72 M. S. 33.45
73 M. S. 34.13	74 M. S. 34.41	75 M. S. 35. 9	76 M. S. 35.37	77 M. S. 36. 6	78 M. S. 36.34	79 M. S. 37. 2	80 M. S. 37.30	81 M. S. 37 58	82 M. S. 38 26	83 M. S. 38.54	84 M. S. 39.22
85 M. S. 39.51	86 M. S. 40.19	87 M. S. 40.47	88 M. S. 41.15	89 M. S. 41.43	90 M. S. 42.11	91 M. S. 42.39	92 M. S. 43. 7	93 M. S 43.36	94 M. S. 44. 4	95 M. S. 44 32	96 M. S. 45. 0
97 M. S. 45.28	98 M. S. 45.56	99 M. S. 46.24	100 M. S. 46.52	101 M. S. 47.21	102 M. S. 47.49	103 M. S 48.17	104 M. S. 48.45	105 M. S. 49.13	106 M. S. 49 41	107 M. S. 50. 9	108 M. S. 50.37
109 M. S. 51. 6	110 M. S. 51.34	111 M. S. 52. 2	112 M. S. 52.30	113 M. S. 52.58	114 M. S. 53.26	115 M. S. 53.54	116 M. S. 54.22	117 M. S. 54.51	118 M. S. 55.19	119 M. S. 55.47	120 M. S. 56 15
121 M. S. 56.43	122 M. S. 57.11	123 M. S. 58. 7	124 M. S. 57. 39	125 M. S. 58.36	126 M. S. 59. 4	127 M. S 59.32	128 M. S. 60 0				

9 PORRO vt ſtudioſos omni labore ſupputandi leuaremus, compoſita à nobis eſt ſequens tabula, in qua confeſtim apparet, quot gradus, minuta, ac ſecunda cuilibet parti cuiuſuis Quadrantis reſpondeant. Nam ſi in latere tabulæ ſiniſtro ſumatur numerus illius quadrantis, in cuius partem aliquam integram filum perpendiculi cecidit, numerus, inquam, iuxta ſemidiametrum AC. illi quadranti appoſitus, in vertice vero eiuſdem tabulæ accipiatur numerus partium à filo abſciſſarum, reperientur in angulo communi grad. Min. & Sec. arcus abſciſſi. Exemplum. Ceciderit filum in partem 30. Quadrantis 16. qui vſque ad grad. 104, productus fuit. Si ergo in vertice tabulæ ſumatur numerus 30. partium, & in ſiniſtro latere numerus quadrantis 16. deprehenduntur in communi angulo grad. 24. Min. 22. Sec. 30. Item cadente filo in partem 111. Quadrantis 15. qui vſque ad grad. 103. fuit productus; ſi in vertice tabulæ accipiatur numerus 111. partium, & in latere ſiniſtro numerus Quadrantis 15, reperiẽtur in angulo communi gradus 89. min. 19. ſec. 13. Atq; ita de cæteris. Conſtructio tabulæ ex dictis obſcura non eſt. Nam ſi fiat, vt 128, ad 1. ad 2 ad 3. ad 4. & ita deinceps, vſque ad 128. ita numerus gradum cuiuslibet arcus totius producti ad aliud, reperientur gradus. Minuta & Sec. pro partibus cuiuſque Quadrantis. Continentur autem in tabula tantummodo 40. Quadrantes, quod hi ſatis eſſe videantur: Si quis tamen plures deſcribere velit, facile tabulam extendere poterit ſecundum doctrinam traditam hoc loco ad quotuis Quadrantes. In eadem tabula quando in tertia operatione regulæ aureæ, qua ſecunda inquiruntur, numerus reliquus fuit maior quam 64. maior nimirum dimidio Diuiſoris 128. aſſumpſimus vnum ſecundum integrum. *Cõſtructio & vſus tabulæ ſequentis.*

IAM vero ſi quis tabulam extendere velit ad plures Quadrantes, facere id poterit ſine vlla operatione regulæ aureæ, hoc modo. Gradibus, Minutis ac ſecundis quadrageſimi Quadrantis, qui vſque ad grad. 128. productus fuit, adijciantur differentię inter gradus, minuta, ac ſecunda quadrageſimi Quadrantis, & gradus, Minuta, ac ſecunda aliorum quadrantum infra Quadrageſimum. Ita namque conficientur gradus, minuta, ac ſecunda quadrantum ſupra quadrageſimum. Nam gradus, minuta, ac ſecunda trium quorumlibet quadrantum, quorum vnus ſit quadrageſimus, alij vero duo æqualiter ab eo diſtent, obſeruant proportionem Arithmeticam *Quo pacto tabula 40. Quadrantum extendatur ad plures Quadrantes ſine ope aureæ regulæ.*

cam continuam, vt hic apparet, Numeri enim Quadrantum 39. 40. 41. in prima columna ſuperant ſe continue ſecundis 28. In ſecunda vero columna ſecundis 56. & in tertia Minuto 1. Secundis 24. &c. Ita quoque nu-

Partes.	1			2			3			4			5			6		
	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S
38	0	59	4	1	58	7	2	57	11	3	56	15	4	55	19	5	54	22
39	0	59	32	1	59	4	2	58	36	3	58	7	4	57	39	5	57	11
40	1	0	0	2	0	0	3	0	0	4	0	0	5	0	0	6	0	0
41	1	0	28	2	0	56	3	1	24	4	1	53	5	2	21	6	2	49
24	1	0	56	2	1	53	3	2	49	4	3	45	5	4	41	6	5	38

meri Quadrantum 38. 40. 42. in prima columna ſuperant ſe continue ſecundis 56. In ſecunda vero Minuto 1. ſecundis 53 & in tertia Minutis 2. ſecundis 49. &c. Quare ſi differentiæ inter gradus, minuta, ac ſecunda Quadrantis 39. & Quadrantis 40. adiiciantur ordine ad gradus, minuta, ac ſecunda Quadrantis 40. componẽtur gradus, minuta, ac ſecunda Quadrantis 41. Differentiæ autem inter Gradus, Minuta, ac Sec. Quadrantis 38. & Quadrantis 40. additæ ordinatim gradibus, minutis, ac ſecundis Quadrantis 40. conficient gradus Minuta, ac Secunda Quadrantis 42. Sic quoque differentiæ inter gradus, minuta, ac ſecunda Quadrantis 30. & Quadrantis 40. appoſitæ gradibus, minutis, ac ſecundis Quadrantis 40. component gradus, minuta, & ſecunda Quadrantis 50. &c.

SEQVITVR TABVLA QVADRANTIS PAVLO ante conſtructi, vbi ſinguli arcus producti diſtribuuntur in 128. partes æquales: in qua ſtatim apparet, quot Gradus, Minuta, ac Secunda ſingulis particulis cuiuſuis quadrantis reſpondeant: cuius quidem vſum ſupra expoſuimus.

Numerus ſiue ordo Quadrantum.

Partes.	1			2			3			4			5			6			7		
	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S
1	1	0	0	2	0	0	3	0	0	4	0	0	5	0	0	6	0	0	7	0	0
2	0	42	11	1	24	22	2	6	34	2	48	45	3	30	56	4	13	7	4	55	19
3	0	42	39	1	25	19	2	7	58	2	50	37	3	33	17	4	15	56	4	58	36
4	0	43	7	1	26	15	2	9	22	2	52	30	3	35	37	4	18	45	5	1	52
5	0	43	36	1	27	11	2	10	47	2	54	22	3	37	58	4	21	34	5	5	9
6	0	44	4	1	28	7	2	12	11	2	56	15	3	40	19	4	24	22	5	8	26
7	0	44	32	1	29	4	2	13	36	2	58	7	3	42	39	4	27	11	5	11	43
8	0	45	0	1	30	0	2	15	0	3	0	0	3	45	0	4	30	0	5	15	0
9	0	45	28	1	30	56	2	16	24	3	1	53	3	47	21	4	32	49	5	18	17
10	0	45	56	1	31	52	2	17	49	3	3	45	3	49	41	4	35	37	5	21	34
11	0	46	24	1	32	49	2	19	13	3	5	37	3	52	2	4	38	26	5	24	51
12	0	46	52	1	33	45	2	20	37	3	7	30	3	54	22	4	41	15	5	28	7
13	0	47	21	1	34	41	2	22	2	3	9	22	3	56	43	4	44	4	5	31	24
14	0	47	49	1	35	37	2	23	26	3	11	15	3	59	4	4	46	52	5	34	41
15	0	48	17	1	36	34	2	24	51	3	13	7	4	1	24	4	49	41	5	37	58
16	0	48	45	1	37	30	2	26	15	3	15	0	4	3	45	4	52	30	5	41	15
17	0	49	13	1	38	26	2	27	39	3	16	52	4	6	6	4	55	19	5	44	32
18	0	49	41	1	39	22	2	29	4	3	18	45	4	8	26	4	58	7	5	47	49
19	0	50	9	1	40	19	2	30	28	3	20	37	4	10	47	5	0	56	5	51	6
20	0	50	37	1	41	15	2	31	52	3	22	30	4	13	7	5	3	45	5	54	22
21	0	51	6	1	42	11	2	33	17	3	24	22	4	15	28	5	6	34	5	57	39
22	0	51	34	1	43	7	2	34	41	3	26	15	4	17	49	5	9	22	6	0	56
23	0	52	2	1	44	4	2	36	6	3	28	7	4	20	9	5	11	11	6	4	13
24	0	52	30	1	45	0	2	37	30	3	30	0	4	22	30	5	15	0	6	7	30
25	0	52	58	1	45	56	2	38	54	3	31	52	4	24	51	5	17	49	6	10	47
26	0	53	26	1	46	52	2	40	19	3	33	45	4	27	11	5	20	37	6	14	4
27	0	53	54	1	47	49	2	41	43	3	35	37	4	29	32	5	23	26	6	17	21
28	0	54	22	1	48	45	2	43	7	3	37	30	4	31	52	5	26	15	6	20	37
29	0	54	51	1	49	41	2	44	32	3	39	22	4	34	13	5	29	4	6	23	54
30	0	55	19	1	50	37	2	45	56	3	41	15	4	36	34	5	31	52	6	27	11
31	0	55	47	1	51	34	2	47	21	3	43	7	4	38	54	5	34	41	6	30	28
32	0	56	15	1	52	30	2	48	45	3	45	0	4	41	15	5	37	30	6	33	45
33	0	56	43	1	53	26	2	50	9	3	46	52	4	43	36	5	40	19	6	37	2
34	0	57	11	1	54	22	2	51	34	3	48	45	4	45	56	5	43	7	6	40	19
35	0	57	39	1	55	19	2	52	58	3	50	37	4	48	17	5	45	56	6	43	36
36	0	58	7	1	56	15	2	54	22	3	52	30	4	50	37	5	48	45	6	46	52
37	0	58	36	1	57	11	2	55	47	3	54	22	4	52	58	5	51	34	6	50	9
38	0	59	4	1	58	7	2	57	11	3	56	15	4	55	19	5	54	22	6	53	26
39	0	59	32	1	59	4	2	58	36	3	58	7	4	57	39	5	57	11	6	56	43
40	1	0	0	2	0	0	3	0	0	4	0	0	5	0	0	6	0	0	7	0	0

Numerus ſiue ordo Quadrantum.

Partes.	15			16			17			18			19			20			21		
	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S
1	15	0	0	16	0	0	17	0	0	18	0	0	19	0	0	20	0	0	21	0	0
2	10	32	49	11	15	0	11	57	11	12	39	22	13	21	34	14	3	45	14	45	56
3	10	39	51	11	22	30	12	5	9	12	47	49	13	30	28	14	13	7	14	55	47
4	10	46	52	11	30	0	12	13	7	12	56	15	13	39	22	14	22	30	15	5	37
5	10	53	54	11	37	30	12	21	6	13	4	41	13	48	17	14	31	52	15	15	28
6	11	0	56	11	45	0	12	29	4	13	13	7	13	57	11	14	41	15	15	25	19
7	11	7	58	11	52	30	12	37	2	13	21	34	14	6	6	14	50	37	15	35	9
8	11	15	0	12	0	0	12	45	0	13	30	0	14	15	0	15	0	0	15	45	0
9	11	22	2	12	7	30	12	52	58	13	38	26	14	23	54	15	9	22	15	54	51
10	11	29	4	12	15	0	13	0	56	13	46	52	14	32	49	15	18	45	16	4	41
11	11	36	6	12	22	30	13	8	54	13	55	19	14	41	43	15	28	7	16	14	32
12	11	43	7	12	30	0	13	16	52	14	3	45	14	50	37	15	37	30	16	24	22
13	11	50	9	12	37	30	13	24	51	14	12	11	14	59	32	15	46	52	16	34	13
14	11	57	11	12	45	0	13	32	49	14	20	37	15	8	27	15	56	15	16	44	4
15	12	4	13	12	52	30	13	40	47	14	29	4	15	17	21	16	5	37	16	53	54
16	12	11	15	13	0	0	13	48	45	14	37	30	15	26	15	16	15	0	17	3	45
17	12	18	17	13	7	30	13	56	43	14	45	56	15	35	9	16	24	22	17	13	36
18	12	25	19	13	15	0	14	4	41	14	54	22	15	44	4	16	33	45	17	23	26
19	12	32	21	13	22	30	14	12	39	15	2	49	15	52	58	16	43	7	17	33	17
20	12	39	22	13	30	6	14	20	37	15	11	15	16	1	52	16	52	30	17	43	7
21	12	46	24	13	37	30	14	28	36	15	19	41	16	10	47	17	1	52	17	52	58
22	12	53	26	13	45	0	14	36	34	15	28	7	16	19	41	17	11	15	18	2	49
23	13	0	28	13	52	30	14	44	33	15	36	34	16	28	36	17	20	37	18	12	39
24	13	7	30	14	0	0	14	52	30	15	45	0	16	37	30	17	30	0	18	22	30
25	13	14	32	14	7	30	15	0	28	15	53	26	16	46	24	17	39	22	18	32	21
26	13	21	34	14	15	0	15	8	26	16	1	52	16	55	19	17	48	45	18	42	11
27	13	28	36	14	22	30	15	16	24	16	10	19	17	4	13	17	58	7	18	52	2
28	13	35	37	14	30	0	15	24	22	16	18	45	17	13	7	18	7	30	19	1	52
29	13	42	39	14	37	30	15	32	21	16	27	11	17	22	2	18	16	52	19	11	43
30	13	49	41	14	45	0	15	40	19	16	35	37	17	30	56	18	26	15	19	21	34
31	13	56	43	14	52	30	15	48	17	16	44	4	17	39	51	18	35	37	19	31	24
32	14	3	45	15	0	0	15	56	15	16	52	30	17	48	45	18	45	0	19	41	15
33	14	10	47	15	7	30	16	4	13	17	0	56	17	57	39	18	54	22	19	51	6
34	14	17	49	15	15	0	16	12	11	17	9	22	18	6	34	19	3	45	20	0	56
35	14	24	51	15	22	30	16	20	9	17	17	49	18	15	28	19	13	7	20	10	47
36	14	31	52	15	30	0	16	28	7	17	26	15	18	24	22	19	22	30	20	20	37
37	14	38	54	15	37	30	16	36	6	17	34	41	18	33	17	19	31	52	20	30	28
38	14	45	56	15	45	0	16	44	0	17	43	7	18	42	11	19	41	15	20	40	19
39	14	52	58	15	52	32	16	52	2	17	51	34	18	51	6	19	50	37	20	50	9
40	15	0	0	16	0	0	17	0	0	18	0	0	19	0	0	20	0	0	21	0	0

Numerus ſiue ordo Quadrantum.

Partes	29			30			31			32			33			34			35		
	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S
1	29	0	0	30	0	0	31	0	0	32	0	0	33	0	0	34	0	0	35	0	0
2	20	23	26	21	5	37	21	47	49	22	30	0	23	12	11	23	54	22	24	36	34
3	20	37	2	21	19	41	22	2	21	22	45	0	23	27	39	24	10	19	24	52	58
4	20	50	37	21	33	45	22	16	52	23	0	0	23	43	7	24	26	15	25	9	22
5	21	4	13	21	47	49	22	31	24	23	15	0	23	58	36	24	42	11	25	25	47
6	21	17	49	22	1	52	22	45	56	23	30	0	24	14	4	24	58	7	25	42	11
7	21	31	24	22	15	56	23	0	28	23	45	0	24	29	32	25	14	4	25	98	36
8	21	45	0	22	30	0	23	15	0	24	0	0	24	45	0	25	30	0	26	15	0
9	21	58	36	22	44	4	23	29	32	24	15	0	25	0	28	25	45	56	26	31	24
10	22	12	11	22	58	7	23	44	4	24	30	0	25	15	56	26	1	52	26	47	49
11	22	25	47	23	12	11	23	58	36	24	45	0	25	31	24	26	17	49	27	4	13
12	22	33	22	23	26	15	24	13	7	25	0	0	25	46	52	26	33	45	27	20	37
13	22	52	58	23	40	19	24	27	39	25	15	0	26	2	21	26	49	41	27	37	2
14	23	6	34	23	54	22	24	42	11	25	30	0	26	17	49	27	5	37	27	53	26
15	23	20	9	24	8	26	24	56	43	25	45	0	26	33	17	27	21	34	28	9	51
16	23	33	45	24	32	30	25	11	50	26	0	0	26	48	45	27	37	30	28	26	15
17	23	47	21	24	36	34	25	25	47	26	15	0	27	4	13	27	53	26	28	42	39
18	24	0	56	24	50	37	25	40	19	26	30	0	27	19	41	28	9	22	28	59	4
19	24	14	32	25	4	41	25	54	51	26	45	0	27	35	9	28	25	19	29	16	24
20	24	28	7	25	18	45	26	9	22	27	0	0	27	50	37	28	41	15	29	31	52
21	24	41	43	25	32	49	26	23	54	27	15	0	28	6	6	28	57	11	29	48	17
22	24	55	19	25	46	52	26	38	26	27	30	0	28	21	34	29	13	7	29	4	41
23	25	8	54	26	0	50	26	52	58	27	45	0	28	37	2	29	29	4	30	21	6
24	25	22	30	26	15	0	27	7	30	28	0	0	28	52	30	29	45	0	30	37	30
25	25	36	6	26	29	4	27	22	2	28	15	0	29	7	58	30	0	56	30	53	54
26	25	49	41	26	43	7	27	36	34	28	30	0	29	23	26	30	16	52	30	10	19
27	26	3	17	26	57	21	27	51	6	28	45	0	29	38	54	30	32	49	31	26	43
28	26	16	52	27	11	15	28	5	37	29	0	0	29	54	22	30	48	45	31	43	7
29	26	30	28	27	25	19	28	20	9	29	15	0	30	9	51	31	4	41	31	59	32
30	26	44	4	27	39	22	28	34	41	29	30	0	30	25	19	31	20	37	32	15	5[illegible]
31	26	57	39	27	53	26	28	49	13	29	45	0	30	40	47	31	36	34	32	32	21
32	27	11	15	28	7	30	29	3	45	30	0	0	30	56	15	31	52	50	32	48	45
33	27	24	51	28	21	34	29	18	17	30	15	0	31	11	43	32	8	26	32	5	9
34	27	38	26	28	35	37	29	32	49	30	30	0	31	27	11	32	24	22	33	21	34
35	27	52	2	28	49	41	29	47	21	30	45	0	31	42	39	32	40	16	33	37	58
36	28	5	37	29	3	45	30	1	52	31	0	0	31	58	7	32	56	15	33	54	22
37	28	19	13	29	17	49	30	16	24	31	15	0	32	13	36	33	12	11	34	10	47
38	28	32	49	29	31	52	30	30	56	31	30	0	32	29	4	33	28	7	34	27	11
39	28	46	24	29	45	56	30	45	28	31	45	0	32	44	32	33	44	4	34	43	36
40	29	0	0	30	.0	0	31	0	0	32	0	0	33	0	0	34	0	0	35	0	0

Numerus ſiue ordo Quadrantum.

Partes.	36			37			38			39			40			41			42		
	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S
1	36	0	0	37	0	0	38	0	0	39	0	0	40	0	0	41	0	0	42	0	0
2	25	18	45	26	0	56	26	43	7	27	25	19	28	7	30	28	49	41	29	31	52
3	25	35	37	26	18	17	27	0	56	27	43	36	28	26	15	29	8	54	29	51	34
4	25	52	30	26	35	37	27	18	45	28	1	52	28	45	0	29	28	7	30	11	15
5	26	9	22	26	52	58	27	36	34	28	20	9	26	3	45	29	47	21	30	30	56
6	26	26	15	27	10	19	27	54	22	28	38	26	29	22	30	30	6	34	30	50	37
7	26	43	7	27	27	39	28	12	11	28	56	43	29	41	15	30	25	47	31	10	19
8	27	0	0	27	45	0	28	30	0	29	15	0	30	0	0	30	45	0	31	30	0
9	27	16	52	28	2	21	28	47	49	29	33	17	30	18	45	31	4	13	31	49	41
10	27	33	45	28	19	41	29	5	37	29	51	34	30	37	30	31	23	26	32	9	22
11	27	50	37	28	37	2	29	23	26	30	9	51	30	56	15	31	42	39	32	29	4
12	29	7	30	28	54	22	29	41	15	30	28	7	31	15	0	32	1	52	32	48	45
13	28	24	22	29	11	43	29	54	4	30	46	24	31	33	45	32	21	6	33	8	26
14	28	41	15	29	29	4	30	16	52	31	4	41	31	52	30	32	40	19	33	28	7
15	28	58	7	29	46	24	30	34	41	31	22	58	32	11	15	32	59	32	33	47	49
16	29	15	0	30	3	45	30	32	30	31	41	15	32	30	0	33	18	45	34	7	30
17	29	31	52	30	21	9	31	10	19	31	59	32	32	48	45	33	37	58	34	27	11
18	29	48	45	30	38	26	31	28	7	32	17	47	33	7	30	33	57	11	34	46	52
19	30	5	37	30	55	47	31	45	56	32	36	6	33	26	15	34	16	24	35	6	34
20	30	22	30	31	13	7	32	3	45	32	54	22	33	45	0	34	35	37	35	26	15
21	30	39	22	31	30	28	32	21	34	33	12	39	34	3	45	34	54	51	35	45	56
22	30	56	15	31	47	49	32	39	22	33	30	56	34	22	30	35	14	4	36	5	37
23	31	13	7	32	5	9	32	57	11	33	49	13	34	41	15	35	33	17	36	25	19
24	31	30	0	32	22	30	33	15	0	34	7	30	35	0	0	35	52	30	36	45	0
25	31	46	52	32	39	51	33	32	49	34	25	47	35	18	45	36	11	43	37	4	41
26	32	3	45	32	57	11	33	50	37	34	44	4	35	37	30	36	50	56	37	24	22
27	32	20	37	33	14	32	34	8	26	35	2	21	34	56	15	36	50	9	37	44	4
28	32	37	30	33	31	52	34	26	15	35	20	37	36	15	0	37	9	22	38	3	45
29	32	54	22	33	49	13	34	44	4	35	38	34	36	33	45	37	28	36	38	23	26
30	33	11	15	34	6	34	35	1	52	35	57	11	36	52	30	37	47	49	38	43	7
31	33	28	7	34	23	54	35	19	41	36	15	28	37	11	15	38	7	2	39	2	49
32	33	45	0	34	41	15	35	37	30	36	33	45	37	30	0	38	26	15	39	22	30
33	34	1	52	34	58	36	35	55	19	36	52	2	37	48	45	38	45	28	39	42	11
34	34	18	45	35	15	56	36	13	7	37	10	19	38	7	30	39	4	41	40	1	52
35	34	35	37	35	33	17	36	30	56	37	28	36	38	26	15	39	23	54	40	21	34
36	34	52	30	35	50	37	36	48	45	37	46	52	38	45	0	39	43	7	40	41	15
37	35	9	22	36	7	58	37	6	34	38	5	9	39	3	45	40	2	21	41	0	56
38	35	26	15	36	25	19	37	24	22	38	23	26	39	22	30	40	21	34	41	20	37
39	35	43	7	36	42	39	37	42	11	38	41	43	39	41	15	40	40	47	41	40	19
40	36	0	0	37	0	0	38	0	0	39	0	0	40	0	0	41	0	0	42	0	0

Numerus ſiue ordo Quadratorum.

Partes.	43			44			45			46			47			48			49		
	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S
1	43	0	0	44	0	0	45	0	0	46	0	0	47	0	0	48	0	0	49	0	0
2	30	14	4	30	56	15	31	38	26	32	20	37	33	2	49	33	45	0	34	27	11
3	30	34	13	31	16	52	31	59	32	32	42	11	33	24	51	34	7	30	34	50	9
4	30	54	22	31	37	30	32	20	37	33	3	45	33	46	52	34	30	0	35	13	7
5	31	14	32	31	58	7	32	41	43	33	25	19	34	8	54	34	52	30	35	36	6
6	31	34	41	32	18	45	33	2	49	33	46	52	54	30	56	35	15	0	35	59	4
7	31	54	51	32	39	22	33	23	54	34	8	26	34	52	58	33	37	30	36	22	2
8	32	15	0	33	0	0	33	45	0	34	30	0	35	15	0	36	0	0	36	45	0
9	32	35	9	33	20	37	34	6	6	34	51	34	35	37	2	36	22	30	37	7	58
10	32	55	19	33	41	15	34	27	11	35	13	7	35	59	4	36	45	0	37	30	56
11	33	15	28	34	1	52	34	48	17	35	34	41	36	21	6	37	7	30	37	53	54
12	33	35	37	34	22	30	35	9	22	35	56	15	36	43	7	37	30	0	38	16	52
13	33	55	57	34	43	7	35	30	28	36	17	49	37	5	9	37	52	30	38	39	51
14	34	15	56	35	3	45	35	51	34	36	39	22	37	27	11	38	15	0	39	2	49
15	34	36	6	35	24	22	36	12	39	37	0	56	37	49	13	38	37	30	39	25	47
16	34	56	15	35	45	0	36	33	45	37	22	30	38	11	15	39	0	0	39	48	45
17	35	16	24	36	5	37	36	54	51	37	44	4	38	33	17	39	22	30	40	11	43
18	35	36	34	36	26	15	37	15	56	38	5	37	38	55	19	39	45	0	40	34	41
19	35	56	43	36	46	52	37	37	2	38	27	11	39	17	21	40	7	30	40	57	39
20	36	16	52	37	7	30	37	58	7	38	48	45	39	39	22	40	30	0	41	20	37
21	36	37	2	37	28	7	38	19	13	39	10	19	40	1	24	40	52	30	41	43	36
22	36	57	11	37	48	45	38	40	19	39	31	52	40	23	26	41	15	0	42	6	34
23	37	17	21	38	9	22	39	1	24	39	53	26	40	45	28	41	37	30	42	29	32
24	37	37	30	38	30	0	39	22	30	40	15	0	41	7	30	42	0	0	42	52	30
25	37	57	39	38	50	37	39	43	36	40	36	34	41	29	32	42	22	30	43	15	28
26	38	17	49	39	11	15	40	4	41	40	58	7	41	51	34	42	45	0	43	38	26
27	38	37	58	39	31	52	40	25	47	41	19	41	42	13	36	43	7	30	44	1	24
28	38	58	7	39	52	30	40	46	52	41	41	15	42	35	37	43	30	0	44	24	22
29	39	18	17	40	13	7	41	7	58	42	2	49	42	57	39	43	52	30	44	47	21
30	39	38	26	40	33	45	41	29	4	42	24	22	43	19	41	44	15	0	45	10	19
31	39	58	36	40	54	22	41	50	9	42	45	56	43	41	43	44	37	30	45	33	17
32	40	18	45	41	15	0	42	11	15	43	7	30	44	3	45	45	0	0	45	56	15
33	40	38	54	41	35	37	42	32	21	43	29	4	44	25	47	45	22	30	46	19	13
34	40	59	4	41	56	15	42	53	26	43	50	37	44	47	49	45	45	0	46	42	11
35	41	19	13	42	16	52	43	14	32	44	12	11	45	9	51	46	7	30	47	5	9
36	41	39	22	42	37	30	43	35	37	44	33	45	45	31	52	46	30	0	47	28	7
37	41	59	32	42	58	7	43	56	43	44	55	19	45	53	54	46	52	30	47	51	6
38	42	19	41	43	18	45	44	17	49	45	16	52	46	15	56	47	15	0	48	14	4
39	42	39	51	43	39	22	44	38	54	45	38	26	46	37	58	47	37	30	48	37	2
40	43	0	0	44	0	0	45	0	0	46	0	0	47	0	0	48	0	0	49	0	0

Numerus ſiue ordo Quadrantum.

Partes.	50			51			52			53			54			55			56		
	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S
1	50	0	0	51	0	0	52	0	0	53	0	0	54	0	0	55	0	0	56	0	0
2	35	9	22	35	51	34	36	33	45	37	15	56	37	58	7	38	40	19	39	22	30
3	35	32	49	36	15	28	36	58	7	37	40	47	38	23	26	39	6	6	39	48	43
4	35	56	15	36	39	22	37	22	30	38	5	37	38	48	45	39	31	52	40	15	0
5	36	19	41	37	3	17	37	46	52	38	30	28	39	14	4	39	57	39	40	41	15
6	36	43	7	37	27	11	38	11	15	38	55	19	39	39	22	40	23	26	41	7	30
7	37	6	34	37	51	6	38	35	37	39	20	9	40	4	41	40	49	13	41	33	45
8	37	30	0	38	15	0	39	0	0	39	45	0	40	30	0	41	15	0	42	0	0
9	37	53	26	38	38	54	39	24	22	40	9	51	40	55	19	41	40	47	42	26	15
10	38	16	52	39	2	49	39	48	45	40	34	41	41	20	37	42	6	34	42	52	30
11	38	40	19	39	26	43	40	13	7	40	59	32	41	45	36	42	32	21	43	18	45
12	39	3	45	39	50	37	40	37	30	41	24	22	42	11	15	42	58	7	43	45	0
13	39	27	11	40	14	32	41	1	52	41	49	13	42	36	34	43	23	54	44	11	15
14	39	50	37	40	38	26	41	26	15	42	14	4	43	1	52	43	49	41	44	37	30
15	40	14	4	41	2	21	41	50	37	42	38	54	43	27	11	44	15	28	45	3	45
16	40	37	30	41	26	15	42	15	0	43	3	45	43	52	30	44	41	15	45	30	0
17	41	0	56	41	50	9	42	39	22	43	28	36	44	17	49	45	7	2	45	56	15
18	41	24	22	42	14	4	43	3	45	43	53	26	44	43	7	45	32	49	46	22	30
19	41	47	49	42	37	58	43	28	7	44	18	17	45	8	26	45	58	36	46	48	45
20	42	11	15	43	1	52	43	52	30	44	43	7	45	33	45	46	24	22	47	15	0
21	42	34	41	43	25	47	44	16	52	45	7	58	45	59	4	46	50	9	47	41	15
22	42	58	7	43	49	41	44	41	15	45	32	49	46	24	22	47	13	56	48	7	30
23	43	21	34	44	13	36	45	5	37	45	57	39	46	49	41	47	41	43	48	33	45
24	43	45	0	44	37	30	45	30	0	46	22	30	47	15	0	48	7	30	49	0	0
25	44	8	26	45	1	24	45	54	22	46	47	21	47	40	19	48	33	17	49	26	15
26	44	31	52	45	25	19	46	18	45	47	12	11	48	5	37	48	59	4	49	52	30
27	44	55	19	45	49	13	46	43	7	47	37	2	48	30	56	49	24	51	50	18	45
28	45	18	45	46	13	7	47	7	30	48	1	52	48	56	15	49	50	37	50	45	0
29	45	42	11	46	37	2	47	31	52	48	26	43	49	21	34	50	16	24	51	11	15
30	46	5	37	47	0	56	47	56	15	48	51	34	49	46	52	50	42	11	51	37	30
31	46	29	4	47	24	51	48	20	37	49	16	24	50	12	11	51	7	58	52	3	45
32	46	52	30	47	48	45	48	45	0	49	41	15	50	37	30	51	33	45	52	30	0
33	47	15	56	48	12	39	49	9	22	50	6	6	51	2	49	51	59	32	52	56	15
34	47	39	22	48	36	34	49	33	45	50	30	56	51	28	7	52	25	19	53	22	30
35	48	2	49	49	0	28	49	58	7	50	55	47	51	53	26	52	51	6	53	48	45
36	48	26	15	49	24	22	50	22	30	51	20	37	52	18	45	53	16	52	54	15	0
37	48	49	41	49	48	17	50	46	52	51	45	28	52	44	4	53	42	39	54	41	15
38	49	13	7	50	12	11	51	11	15	52	10	19	53	9	22	54	8	26	55	7	30
39	49	36	34	50	36	6	51	35	37	52	35	9	53	34	41	54	34	13	53	33	45
40	50	0	0	51	0	0	52	0	0	53	0	0	54	0	0	55	0	0	56	0	0

Numerus ſiue ordo Quadrantum.

Partes.	57			58			59			60			61			62			63		
	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S
1	57	0	0	58	0	0	59	0	0	60	0	0	61	0	0	62	0	0	63	0	0
2	40	4	41	40	46	52	41	29	4	42	11	15	42	53	26	43	35	37	44	17	49
3	40	31	24	41	14	4	41	56	43	42	39	22	43	2	2	44	4	41	44	47	21
4	40	58	7	41	41	15	42	24	22	43	7	30	43	50	37	44	33	45	45	16	52
5	41	24	51	42	8	26	42	52	2	43	35	37	44	19	13	45	2	49	45	46	24
6	41	51	34	42	35	37	42	19	41	44	3	45	44	47	49	45	31	52	46	15	56
7	42	18	17	43	2	49	43	47	21	44	31	52	45	16	24	46	0	56	46	45	28
8	42	45	0	43	30	0	44	15	0	45	0	0	45	45		46	30	0	47	15	0
9	43	11	43	43	57	11	44	42	39	45	28	7	46	13	36	46	59	4	47	44	32
10	43	38	26	44	24	22	45	10	19	45	56	15	46	42	11	47	28	7	48	14	4
11	44	5	9	44	51	34	45	37	58	46	24	22	47	10	47	47	57	11	48	43	36
12	44	31	52	45	18	45	46	5	37	46	52	30	47	32	22	48	26	15	49	13	7
13	44	58	36	45	45	56	46	33	17	47	20	37	48	7	58	48	55	19	49	42	39
14	45	25	19	46	13	7	47	0	56	47	48	45	48	36	34	49	24	22	50	12	11
15	45	52	2	46	40	19	47	28	36	48	16	52	49	5	9	49	53	26	50	41	43
16	46	18	45	47	7	30	47	56	15	48	45	0	49	33	45	50	22	30	51	11	15
17	46	45	28	47	34	41	48	23	54	49	13	7	50	2	21	50	51	34	51	40	47
18	47	12	11	48	1	52	48	51	34	49	41	15	50	30	56	51	20	37	52	10	19
19	47	38	54	48	29	4	49	19	13	50	9	22	50	59	32	51	49	41	52	39	51
20	48	5	37	48	56	15	49	46	52	50	37	30	51	28	7	52	18	45	53	9	22
21	48	32	21	49	23	26	50	14	32	51	5	37	51	56	43	52	47	49	53	38	54
22	48	59	4	49	50	37	50	42	11	51	33	45	52	25	19	53	16	52	54	8	26
23	49	25	47	50	17	49	51	9	51	52	1	52	52	53	54	53	45	56	54	37	58
24	49	52	30	50	45	0	51	37	30	52	30	0	53	22	30	54	15	0	55	7	30
25	50	19	13	51	12	11	52	5	9	52	58	7	53	51	6	54	44	4	55	37	2
26	50	45	56	51	33	22	52	32	49	53	26	15	54	19	41	55	13	7	56	6	34
27	51	12	39	52	6	34	53	0	28	53	54	22	54	48	17	55	42	11	56	36	6
28	51	39	22	52	33	45	53	28	7	54	22	30	55	16	52	56	11	15	57	5	37
29	52	6	6	53	0	56	53	55	47	54	50	37	55	45	28	56	40	19	55	35	9
30	52	32	49	53	28	7	54	23	26	55	18	45	56	14	4	57	9	22	58	4	41
31	51	59	32	53	55	19	54	51	6	55	46	52	56	42	39	57	38	26	58	34	13
32	53	56	15	54	22	30	55	18	45	56	15	0	57	11	15	58	7	30	59	3	45
33	53	52	58	54	49	41	55	46	24	56	43	7	57	39	51	58	36	34	59	33	17
34	54	19	41	55	16	52	56	14	4	57	11	15	58	8	26	59	5	37	60	2	49
35	54	46	24	55	44	4	56	41	43	57	39	22	58	37	2	59	34	41	60	32	21
36	55	13	7	56	11	15	57	9	22	58	7	30	59	5	37	60	3	45	61	1	52
37	55	39	51	56	38	26	57	37	2	58	35	37	59	34	13	60	32	49	61	31	24
38	56	9	34	57	5	37	58	4	41	59	3	45	60	2	49	61	1	52	62	0	56
39	56	33	17	57	32	49	58	32	21	59	31	52	60	31	24	61	30	56	62	30	28
40	57	0	0	58	0	0	59	0	0	60	0	0	61	0	0	62	0	0	63	0	0

Numerus ſiue ordo Quadrantum.

Partes.	71			72			73			74			75			76			77		
	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S
1	71	0	0	72	0	0	73	0	0	74	0	0	75	0	0	76	0	0	77	0	0
2	49	55	19	50	37	30	51	19	41	52	1	52	52	44	4	53	26	15	54	8	26
3	50	28	36	51	11	15	51	53	54	52	36	34	53	19	13	54	1	52	54	44	32
4	51	1	52	51	45	0	52	28	7	53	11	15	53	54	22	54	37	30	55	20	37
5	51	35	9	52	18	45	53	2	21	53	45	56	54	29	32	55	13	7	55	56	43
6	52	8	26	52	52	30	53	36	34	54	20	37	55	4	41	55	48	45	56	32	49
7	52	41	43	53	26	11	54	10	47	54	55	19	55	39	51	56	24	22	57	8	54
8	53	15	0	54	0	0	54	45	0	55	30	0	56	15	0	57	0	0	57	45	0
9	53	48	17	54	33	45	55	19	13	56	4	41	56	50	9	57	35	37	58	21	6
10	54	21	34	55	7	30	55	53	26	56	39	22	57	25	19	58	11	15	58	57	11
11	54	54	51	55	41	15	56	27	39	57	14	4	58	0	28	58	46	52	59	33	17
12	55	28	7	56	15	0	57	1	52	57	48	45	58	35	37	59	22	30	60	9	22
13	56	1	24	56	48	45	57	36	6	58	23	26	59	10	47	59	58	7	60	45	28
14	56	34	41	57	22	30	58	10	19	58	58	7	59	45	56	60	33	45	61	21	34
15	57	7	58	57	56	15	58	44	32	59	32	49	60	21	6	61	9	22	61	57	39
16	57	41	15	58	30	0	59	18	45	60	7	30	60	56	15	61	45	0	62	33	45
17	58	14	32	59	3	45	59	52	58	60	42	11	61	31	24	62	20	37	63	9	51
18	58	47	49	59	37	30	60	27	11	61	16	52	62	6	34	62	56	15	63	45	56
19	59	21	6	60	11	15	61	1	24	61	51	34	62	41	43	63	31	52	64	22	2
20	59	54	22	60	45	0	61	35	37	62	26	15	63	16	52	64	7	30	64	58	7
21	60	27	39	61	18	45	62	9	51	63	0	56	63	52	2	64	43	7	65	34	13
22	61	0	56	61	52	30	62	44	4	63	35	37	64	27	11	65	18	45	66	10	19
23	61	34	13	62	26	15	63	18	17	64	10	19	65	2	21	65	54	22	66	46	24
24	62	7	30	63	0	0	63	52	30	64	45	0	65	37	30	66	30	0	67	22	30
25	62	40	47	63	33	45	64	26	43	65	19	41	66	12	39	67	5	37	67	58	36
26	63	14	4	64	7	30	65	0	56	65	54	22	66	47	49	67	41	15	68	34	41
27	63	47	21	64	41	15	65	35	9	66	29	4	67	22	58	68	16	52	69	10	47
28	64	20	37	65	15	0	66	9	22	67	3	45	67	58	7	68	52	30	69	46	51
29	64	53	54	65	48	45	66	43	36	67	38	26	68	33	17	69	28	7	70	22	58
30	65	27	11	66	22	30	67	17	49	68	13	7	69	8	26	70	3	45	70	59	4
31	66	0	28	66	56	15	67	52	2	68	47	49	69	43	36	70	39	22	71	35	9
32	66	33	45	67	30	0	68	26	15	69	22	30	70	18	45	71	15	0	72	11	15
33	67	7	2	68	3	45	69	0	28	69	57	11	70	53	54	71	50	37	72	47	21
34	67	40	19	68	37	30	69	34	41	70	31	52	71	29	4	72	26	15	73	23	26
35	68	13	36	69	11	15	70	8	54	71	6	34	72	4	13	73	1	52	73	59	32
36	68	46	52	69	45	0	70	43	7	71	41	15	72	39	22	73	37	30	74	35	37
37	69	20	9	70	18	45	71	17	21	72	15	56	73	14	32	74	13	7	75	11	43
38	69	53	26	70	52	30	71	51	34	72	50	37	73	49	41	74	48	45	75	47	49
39	70	26	43	71	26	15	72	25	47	73	25	19	74	24	51	75	24	22	76	23	54
40	71	0	0	72	0	0	73	0	0	74	0	0	75	0	0	76	0	0	77	0	0

Numerus ſiue ordo Quadrantum.

Partes.	78			79			80			81			82			83			84		
	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S
1	78	0	0	79	0	0	80	0	0	81	0	0	82	0	0	83	0	0	84	0	0
2	54	50	37	55	32	49	56	15	0	56	57	11	57	39	22	58	21	34	59	3	45
3	55	27	11	56	9	51	56	52	30	57	35	9	58	17	49	59	0	28	59	43	7
4	56	3	45	56	46	52	57	30	0	58	13	7	58	56	15	59	39	22	60	22	30
5	56	40	19	57	23	54	58	7	30	58	51	6	59	34	41	60	18	17	61	1	52
6	57	16	52	58	0	56	58	45	0	59	29	4	60	13	7	60	57	11	61	41	15
7	57	53	26	58	37	58	59	22	30	60	7	2	60	51	34	61	36	6	62	20	37
8	58	30	0	59	15	0	60	0	0	60	45	0	61	30	0	62	15	0	63	0	0
9	59	6	34	59	52	2	60	37	30	61	22	58	62	8	26	62	53	54	63	39	22
10	59	43	7	60	29	4	61	15	0	62	0	56	62	46	52	63	32	49	64	18	45
11	60	19	41	61	6	6	61	52	30	62	38	54	63	25	19	64	11	43	64	58	7
12	60	56	15	61	43	7	62	30	0	63	16	52	64	3	45	64	50	37	65	37	30
13	61	32	49	62	20	9	63	7	30	63	54	51	64	42	11	65	29	32	66	16	52
14	62	9	22	62	57	11	63	45	0	64	32	49	65	20	37	66	8	27	66	56	15
15	62	45	56	63	34	13	64	22	30	65	10	47	65	59	4	66	47	21	67	35	37
16	63	22	30	64	11	15	65	0	0	65	48	45	66	37	30	67	26	15	68	15	0
17	63	59	4	64	48	17	65	37	30	66	26	43	67	15	56	68	5	9	68	54	22
18	64	35	37	65	25	19	66	15	0	67	4	41	67	54	22	68	44	4	69	33	45
19	65	12	11	66	2	21	66	52	30	67	42	39	68	32	49	69	22	58	70	13	7
20	65	48	45	66	39	22	67	30	0	68	20	37	69	11	15	70	1	52	70	52	30
21	66	25	19	67	16	24	68	7	30	68	58	36	69	49	41	70	40	47	71	31	52
22	67	1	52	67	53	26	68	45	0	69	36	34	70	28	7	71	19	41	72	21	15
23	67	38	26	68	30	28	69	22	30	70	14	32	71	6	34	71	58	36	72	50	37
24	68	15	0	69	7	30	70	0	0	70	52	30	71	45	0	72	37	30	73	30	0
25	68	51	34	69	44	32	70	37	30	71	30	28	72	23	26	73	16	24	74	9	22
26	69	28	7	70	21	34	71	15	0	72	8	26	73	1	52	73	55	19	74	48	45
27	70	4	41	70	58	36	71	52	30	72	46	24	73	40	19	74	34	13	75	28	7
28	70	41	15	71	35	37	72	30	0	73	24	22	74	18	45	75	13	7	76	7	30
29	71	17	49	72	12	39	73	7	30	74	2	21	74	57	11	75	52	2	76	46	52
30	71	54	22	72	49	41	73	45	0	74	40	19	75	35	37	76	30	56	77	26	15
31	72	30	56	73	26	43	74	22	30	75	18	17	76	14	4	77	9	51	78	5	37
32	73	7	30	74	3	45	75	0	0	75	56	15	76	52	30	77	48	45	78	45	0
33	73	44	4	74	40	47	75	37	30	76	34	13	77	30	56	78	27	39	79	24	22
34	74	20	37	75	17	49	76	15	0	77	12	11	78	9	22	79	6	34	80	3	45
35	74	57	11	75	54	51	76	52	30	77	50	9	78	47	49	79	45	28	80	43	7
36	75	33	45	76	31	52	77	30	0	78	28	7	79	26	15	80	24	22	81	22	30
37	76	10	19	77	8	54	78	7	30	79	6	6	80	4	41	81	3	17	82	1	52
38	76	46	52	77	45	56	78	45	0	79	44	4	80	43	7	81	42	11	82	41	15
39	77	23	26	78	22	58	79	22	30	80	22	2	81	21	34	82	21	6	83	20	37
40	78	0	0	79	0	0	80	0	0	81	0	0	82	0	0	83	0	0	84	0	0

Digitized by Google

Numerus ſiue ordo Quadrantum.

Partes.	85			86			87			88			89			90			91		
	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S
1	85	0	0	86	0	0	87	0	0	88	0	0	89	0	0	90	0	0	0	0	0
2	59	45	56	60	28	7	61	10	19	61	52	30	62	34	41	63	16	52	63	59	4
3	60	25	47	61	8	26	61	51	6	62	33	45	63	16	24	63	59	4	64	41	43
4	61	5	37	61	48	45	62	31	52	63	15	0	63	58	7	64	41	15	65	24	22
5	61	45	28	62	29	4	63	12	39	63	56	15	64	39	51	65	23	26	66	7	2
6	62	25	19	63	9	22	63	53	26	64	37	30	65	21	34	66	5	37	66	49	41
7	63	5	9	63	49	41	64	34	13	65	18	45	66	3	17	66	47	49	67	32	21
8	63	45	0	64	30	0	65	15	0	66	0	0	66	45	0	67	30	0	68	15	0
9	64	24	51	65	10	19	65	55	47	66	41	15	67	26	43	68	12	11	68	57	39
10	65	4	41	65	50	37	66	36	34	67	22	30	68	8	26	68	54	22	69	40	19
11	65	44	32	66	30	56	67	17	21	68	3	45	68	50	9	69	36	34	70	22	58
12	66	24	22	67	11	15	67	58	7	68	45	0	69	31	52	70	18	45	71	5	37
13	67	4	13	67	51	34	68	38	54	69	26	15	70	13	36	71	0	56	71	48	17
14	67	44	4	68	31	52	69	19	41	70	7	30	70	55	19	71	43	7	72	30	56
15	68	23	54	69	12	11	70	0	28	70	48	45	71	37	2	72	25	19	73	13	36
16	69	3	45	69	52	30	70	41	15	71	30	0	72	18	45	73	7	30	73	56	15
17	69	43	36	70	32	49	71	22	2	72	11	15	73	0	28	73	49	41	74	38	54
18	70	23	26	71	13	7	72	2	49	72	52	30	73	42	11	74	31	52	75	21	34
19	71	3	17	71	53	26	72	43	36	73	33	45	74	23	54	75	14	4	76	4	13
20	71	43	7	72	33	45	73	24	22	74	15	0	75	5	37	75	56	15	76	46	52
21	72	22	58	73	14	4	74	5	9	74	56	15	75	47	21	76	38	26	77	29	4
22	73	2	49	73	54	22	74	45	56	75	37	30	76	29	4	77	20	37	78	12	11
23	73	42	39	74	34	41	75	26	43	76	18	45	77	10	47	78	2	49	78	54	51
24	74	22	30	75	15	0	76	7	30	77	0	0	77	52	30	78	45	0	79	37	39
25	75	2	21	75	55	19	76	48	17	77	41	15	78	34	13	79	27	11	80	20	0
26	75	42	11	76	35	37	77	29	4	78	22	30	79	15	56	80	9	22	81	2	49
27	76	22	2	77	15	56	78	9	51	79	3	45	79	7	39	80	51	34	81	45	28
28	77	1	52	77	56	15	78	50	37	79	45	0	80	39	22	81	33	45	82	28	7
29	77	41	43	78	36	36	79	31	24	80	26	15	81	21	6	82	15	56	83	10	47
30	78	21	34	79	16	52	80	12	11	81	7	30	82	2	49	82	58	7	83	53	27
31	79	1	24	79	57	11	80	52	58	81	48	45	82	44	32	83	40	19	84	36	6
32	79	41	15	80	37	30	81	33	45	82	30	0	83	26	15	84	22	30	85	18	45
33	80	21	6	81	17	49	82	14	32	83	11	15	84	7	58	85	4	41	86	1	24
34	81	0	56	81	58	7	82	55	19	83	52	30	84	49	41	85	46	52	86	44	4
35	81	40	47	82	38	26	83	36	6	84	33	45	85	31	24	86	29	4	87	26	43
36	82	20	37	83	18	45	84	16	52	85	15	0	86	13	7	86	11	15	88	9	22
37	83	0	28	83	59	4	84	57	39	85	56	15	86	54	51	87	53	26	88	52	2
38	83	40	19	84	39	22	85	38	26	86	37	30	87	36	34	88	35	37	89	34	41
39	84	20	9	85	19	41	86	19	13	87	18	45	88	18	17	89	17	49	0	0	0
40	85	0	0	86	0	0	87	0	0	88	0	0	89	0	0	99	0	0	0	0	0

Numerus ſiue ordo Quadrantum.

Partes.	92			93			94			95			96			97			98		
	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	64	41	15	65	23	26	66	5	37	66	47	49	67	30	0	68	12	11	68	54	22
3	65	24	22	66	7	2	66	49	41	67	32	21	68	15	0	68	57	39	69	40	19
4	66	7	30	66	50	37	67	33	45	68	16	52	69	0	0	69	43	7	70	26	15
5	66	50	37	67	34	13	68	17	49	69	1	24	69	45	0	70	28	36	71	12	11
6	67	33	45	68	17	49	69	1	52	69	45	56	70	30	0	71	14	4	71	58	7
7	68	16	52	69	1	24	69	45	56	70	30	28	71	15	0	71	59	32	72	44	4
8	69	0	0	69	45	0	70	30	0	71	15	0	72	0	0	72	45	0	73	30	0
9	69	43	7	70	28	36	71	14	4	71	59	32	72	45	0	73	30	28	74	15	56
10	70	26	15	71	12	11	71	58	7	72	44	4	73	30	0	74	15	56	75	1	52
11	71	9	22	71	55	47	72	42	11	73	28	36	74	15	0	75	1	24	75	47	49
12	71	52	30	72	39	22	73	26	15	74	13	7	75	0	0	75	46	52	79	33	45
13	72	35	37	73	22	58	74	10	19	74	57	39	75	45	0	76	32	21	77	19	41
14	73	18	35	74	6	34	74	54	22	75	42	11	76	30	0	77	17	49	78	5	37
15	74	1	52	74	50	9	75	38	26	76	26	43	77	15	0	78	3	17	78	51	34
16	74	45	0	75	33	45	76	22	30	77	11	15	78	0	0	78	48	45	79	37	30
17	75	28	7	76	17	21	77	6	34	77	55	47	78	45	0	79	34	13	80	23	26
18	76	11	15	77	0	56	77	50	37	78	40	19	79	30	0	80	19	41	81	9	22
19	76	54	22	77	44	32	78	34	41	79	24	51	80	15	0	81	5	9	81	55	19
20	77	37	30	78	28	7	79	18	45	80	9	22	81	0	0	81	50	37	82	41	15
21	78	20	37	79	11	43	80	2	49	80	53	54	81	45	0	82	36	6	83	27	11
22	79	3	45	79	55	19	80	46	50	81	38	26	82	30	0	83	21	34	84	13	7
23	79	46	52	80	38	54	81	30	56	82	22	58	83	15	0	84	7	2	84	59	4
24	80	30	0	81	22	30	82	15	0	83	7	30	84	0	0	84	52	30	85	45	0
25	81	13	7	82	6	6	82	59	4	83	52	2	84	45	0	85	37	58	86	30	56
26	81	56	15	82	49	41	83	43	7	84	36	34	85	30	0	86	23	26	87	16	52
27	82	39	22	83	33	17	84	27	11	85	21	6	86	15	0	87	8	54	88	2	49
28	83	22	30	84	16	52	85	11	15	86	15	37	87	0	0	87	54	22	88	48	45
29	84	5	37	85	0	28	85	55	19	86	50	9	87	45	0	88	39	51	89	34	41
30	84	48	45	85	44	4	86	39	22	87	34	41	88	30	0	89	25	19	0	0	0
31	85	31	52	86	27	39	87	23	26	88	19	13	89	15	0	0	0	0			
32	86	15	0	87	11	15	88	7	30	89	3	45	90	0	0	0	0	0			
33	86	58	7	87	54	51	88	51	34	89	48	17	0	0	0	0	0	0			
34	87	41	15	88	38	26	89	35	37	0	0	0	0	0	0						
35	88	24	22	89	22	2	0	0	0												
36	89	7	30	0	0	0															
37	89	50	37	0	0	0															
38	0	0	0	0	0	0															

Numerus ſiue ordo Quadrantum.

Partes.	99			100			101			102			103			104			105		
	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	69	36	34	70	18	45	71	0	56	71	43	7	72	25	19	73	7	30	73	49	41
3	70	22	58	71	5	37	71	48	17	72	30	56	73	13	36	73	56	15	74	37	58
4	71	9	22	71	52	30	72	35	37	73	18	45	74	1	52	74	45	0	75	28	7
5	71	55	47	72	39	22	73	22	58	74	6	34	74	50	9	75	33	45	76	17	21
6	72	42	11	73	26	15	74	10	19	74	54	22	75	38	26	76	22	30	77	6	34
7	73	28	36	74	13	7	74	57	39	75	42	11	76	26	43	77	11	15	77	55	47
8	74	15	0	75	0	0	75	45	0	76	30	0	77	15	0	78	0	0	78	45	0
9	75	1	24	75	46	52	76	32	21	77	17	49	78	3	17	78	48	45	79	34	13
10	75	47	49	76	33	45	77	19	41	78	5	37	78	51	34	79	37	30	80	23	26
11	76	34	13	77	20	37	78	7	2	78	53	26	79	39	51	80	26	15	81	12	39
12	77	20	37	78	7	30	78	54	22	79	41	15	80	28	7	81	15	0	82	1	52
13	78	7	2	78	54	22	79	41	43	80	29	4	81	16	24	82	3	45	82	51	6
14	78	53	26	79	41	15	80	29	4	81	16	52	82	4	41	82	52	30	83	40	19
15	79	39	51	80	28	7	81	16	24	82	4	41	82	52	58	83	41	15	84	20	32
16	80	26	15	81	15	0	82	3	45	82	52	30	83	41	15	84	30	0	85	18	45
17	81	12	39	82	1	52	82	51	6	83	40	19	84	29	32	85	18	45	86	7	58
18	81	59	4	82	48	45	83	37	30	84	28	7	85	17	49	86	7	30	86	57	11
19	82	45	28	83	35	37	84	25	47	85	15	56	86	6	6	86	56	15	87	46	24
20	83	31	52	84	22	30	85	13	7	86	3	45	86	54	22	87	45	0	88	35	37
21	84	18	17	85	9	22	86	0	28	86	51	34	87	42	39	88	33	45	80	24	51
22	85	4	41	85	56	15	86	47	49	87	39	22	88	30	56	89	22	30	0	0	0
23	85	51	6	86	43	7	87	35	9	88	27	11	89	19	13	0	0	0	0	0	0
24	86	37	30	87	30	0	88	22	30	89	15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
25	87	23	54	88	16	52	89	9	51	0	0	0									
26	88	10	19	89	3	45	89	57	11	0	0	0									
27	88	56	43	89	50	37	0	0	0	0	0	0									
28	89	43	7	0	0	0															
29	0	0	0	0	0	0															
30	0	0	0																		

Numerus ſiue ordo Quadrantum.

Partes.	106			107			108			109			110			111			112		
	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	74	31	52	75	14	4	75	56	15	75	38	26	77	10	37	78	2	49	78	45	0
3	75	21	34	76	4	13	76	46	52	77	29	32	78	12	11	78	54	51	79	52	30
4	76	11	15	76	54	22	77	37	30	78	20	37	79	3	45	79	46	52	80	30	0
5	77	0	56	77	44	32	78	28	7	79	11	43	79	55	19	80	38	54	81	22	30
6	77	50	37	78	34	41	79	18	45	80	2	49	80	46	52	81	30	56	82	15	0
7	78	40	19	79	24	51	80	9	22	80	53	54	81	38	26	82	22	58	83	7	30
8	79	30	0	80	15	0	81	0	0	81	45	0	82	30	0	83	15	0	84	0	0
9	80	10	41	81	5	9	81	50	37	82	36	6	83	21	34	84	7	2	84	52	30
10	81	9	22	81	55	19	82	41	15	83	27	11	84	13	7	84	59	4	85	45	0
11	81	59	4	82	45	28	83	31	52	84	18	17	85	4	41	85	51	6	86	37	30
12	82	48	45	83	35	37	84	22	30	85	9	22	85	56	15	86	43	7	87	30	0
13	83	38	26	84	25	47	85	13	7	86	0	28	86	47	49	87	35	9	88	22	30
14	84	28	7	85	15	56	86	3	45	86	51	34	87	39	22	88	27	11	89	15	0
15	85	17	49	86	6	6	86	54	22	87	42	39	88	30	56	89	19	13	0	0	0
16	86	7	30	86	56	15	87	45	0	88	33	45	89	22	30	0	0	0			
17	86	57	11	87	46	24	88	35	37	89	24	51	0	0	0	0	0	0			
18	87	46	52	88	36	34	89	26	15	0	0	0	0	0	0	0	0	0			
19	88	36	34	89	26	43	0	0	0												
20	89	26	15	0	0	0	0	0	0												
21	0	0	0	0	0	0	0	0	0												

Numerus ſiue ordo Quadrantum.

Partes.	113			114			115			116			117			118			119		
	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	79	27	11	80	9	22	80	51	34	81	33	45	82	15	56	82	58	7	83	40	19
3	80	20	9	81	2	49	81	45	28	82	28	7	83	10	47	83	53	26	84	36	6
4	81	13	7	81	56	15	82	39	22	83	22	30	84	5	37	84	48	45	85	31	52
5	83	6	6	82	49	41	83	33	17	84	16	52	85	0	28	85	44	4	86	27	39
6	82	59	4	83	43	7	84	27	11	85	11	15	85	55	19	86	39	22	87	23	26
7	83	52	2	84	36	34	85	21	6	86	5	37	86	50	9	87	34	41	88	19	13
8	84	45	0	85	30	0	86	15	0	87	0	0	87	45	0	88	30	0	89	15	0
9	85	37	58	86	23	26	87	8	54	87	54	22	88	39	51	89	25	19	0	0	0
10	86	30	56	87	16	52	88	2	49	88	48	45	89	34	41	0	0	0	0	0	0
11	87	23	54	88	10	19	88	56	43	89	43	7	0	0	0	0	0	0			
12	88	16	52	89	3	45	0	0	0	0	0	0									
13	89	9	51	89	57	11	0	0	0												
14	0	0	0	0	0	0															
15	0	0	6																		

Partes.	120			121			122			123			124			125			126		
	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	84	22	30	85	4	41	85	46	52	86	29	4	87	11	15	87	53	27	88	35	37
3	85	18	45	86	1	24	86	44	4	87	26	43	88	9	22	88	52	2	89	34	41
4	86	15	0	86	58	7	87	41	15	88	24	22	89	7	30	89	50	37	0	0	0
5	87	11	15	87	54	51	88	38	26	89	22	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	88	7	30	88	51	34	89	35	37	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	89	3	45	89	48	17	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	90	0	0	0	0	0															
9	0	0	0																		

Partes.	127			128		
	G	M	S	G	M	S
1	0	0	0	0	0	0
2	89	17	49	90	0	0
3	0	0	0	0	0	0

Quo pacto per circinum deprehendatur Minuta, ac ſecunda in quauis propoſita gradus particula.

10 QVANDO intra Quadrantem non deſcripti ſunt plures quadrantes, ſed vnicus tantum adeſt in 90. gradus exquiſitè diſtributus, cognoſcemus ſolo circini beneficio, quot Minuta, ac ſecunda in quauis gradus particula contineantur: id quod etiam in Aſtrolabio fecimus, hoc ſcilicet modo. Sit data verbi gratia particula t u, in gradu 20. ſuperioris Quadrantis BC. Sumatur ea diligentiſſime beneficio circini, & à principio Quadrantis, id eſt, à puncto C, incipiendo, eadem apertura circini accipiantur 60. æquales particulæ vſque ad punctum X, ita vt arcus CX, ſexagecuplus ſit arcus t u: Quot enim gradus integri in hoc arcu ſexagecuplo comprehenduntur, tot minuta complectetur particula data t u. Et ſi vltra gradus integros in arcu CX, ſuperſit aliqua particula, accipiatur ea ſexagies quoque, initio facto à puncto C. Nam quot gradus integri in hoc arcu ſexagecuplo continentur, tot ſecunda vltra Minuta inuenta continebuntur in data particula t u. Quod ſi adhuc aliquid ſuperſit, reperientur eodem modo Tertia, &c. Itaque cum in arcu CX, qui ſexagecuplus eſt particulæ t u, contineantur 40. gradus integri, comprehendet particula t u, quadraginta Minuta, & inſuper tot ſecunda, quot gradus continentur in arcu, qui ſexagecuplus ſit particulæ vltra 40. gradus in arcu CX, contentæ, &c.

HOC autẽ ita demonſtro. Quam proportionem habet arcus 60. graduũ ad 1. gradum, eam habet arcus CX, ad particulam t u, cum vtrobique proportio ſit ſexagecupla. Igitur permutanda erit, vt arcus 60. graduum ad arcum CX, ita 1. gradus ad particulam t u: Ac proinde quot partes ſexageſimæ arcus 60. graduum, hoc eſt, quot gradus in arcu CX continentur, tot ſexageſimæ partes vnius gradus, id eſt, tot minuta in particula t u, exiſtent. Item quam proportionem habet arcus 60. Minutorum ad 1. Minutum, eam habet arcus ſexagecuplus particulæ, quæ vltra gradus integros vſq; ad X, ſupereſt ad hanc ipſam particulã. Permutando igitur erit, vt arc⁹ 60. Minutorum ad arcum ſexagecuplum dictæ particulæ reliquæ, ita 1. Minutum ad dictam particulam reliquam. Quare quot partes ſexageſimæ arcus 60. Minutorum, hoc eſt, quot minuta in arcu dictæ particulæ ſexagecuplo (ſumendo nunc gradus Quadrantis BC, pro Minutis) continentur, tot partes ſexageſimæ vnius Minuti, id eſt, tot Secunda, in reliqua illa particula includentur, & ſic deinceps, ſi opus ſit, de Tertijs, Quartis, &c. intelligatur. Sed ſatis eſt, meo iudicio, ſi minuta diligẽter inquirantur. Et ſi quidem particula remanens maior fuerit ſemiſſe gradus, pro illa vnum Minutum aſſumatur, Minutiſq; inuentis adijciatur, quod tunc in illa particula contineantur plura Secunda quam 30. Si vero eadem particula ſemiſſe gradus fuerit minor, nihil Minutis inuentis adijciatur, quod tunc in illa particula pauciora Secunda includantur, quam 30. Si deniq; dicta particula ſemiſſi gradus fuerit æqualis, liberum ſit addere Minutis inuentis vnum Minutum, vel non addere.

11 QVIA vero facile error cõmitti poteſt, ſi circino particulam dictam gradus, vel minuti ſexagies ordine ſumere velimus, rectius feceris, quando particula data ſemiſſe gradus minor eſt, ſi eam vna cũ præcedente gradu acceptam primo loco quintuples: deinde hunc arcum quintuplũ duples, tertio hunc arcũ duplũ triples, ac tandẽ quarto hunc arcum triplum iterum duples. Vltimus n. hic arcus erit datæ particulæ vna cum gradu accepto ſexagecuplus. Quare ſi ex eo demantur 60. gradus, indicabunt reliqui gradus numerum minutorũ in data particula contentorũ. Quod ſi per æſtimationem cognoueris, particulam ſemiſſe gradus minorem non ſuperare min. 24. (Nam ſi ſuperaret 24. minuta, non poſſemus ratione iam explicanda inquirere minuta; propterea quod circumducendo circinum, totum Quadrantem excederemus, vt patebit.) commodius minuta datæ particulæ cognoſcemus hoc modo. Datam particulã cum gradu præcedenti primo loco quadruplicabimus; deinde hunc arcũ quadruplũ duplabimus, vt habeamus octuplum arcus ex particula, & vno gradu compoſiti, tertio arcum hunc octuplũ iterum duplabimus, vt fiat arcus ſedecuplus arcus ex data particula, & vno gradu compoſiti; quarto hunc arcũ rurſus duplabimus; & quinto tandem hunc duplũ iterum duplabimus; vt habeatur arcus continens arcum ex particula propoſita, & vno gradu ſexagies & quater, cuius extremum punctum diligenter notetur. Nam ſi ex toto arcu ab eo puncto incipiendo, auferatur arcus quadruplus particulæ datæ vna cum vno gradu, ſupererit arc⁹ ſexagecuplus eiuſdẽ particulæ vnà cum vno gradu; ex quo deniq; ſi demantur 60. gradus, reliqui gradus numerum minutorum indicabunt. Quòd ſi data particula ſemiſſe gradus fuerit maior, explorabim⁹ eodẽ modo minuta in reliqua particula minore comprehenſa. Hæc namq; minuta ex 60. detracta relinquent minuta in particula illa maiore comprehẽſa. Bene autem vides, quando data particula minor parũ à ſemiſſe gradus differt, tutius eſſe quintuplare illam vnà cum vno gradu; deinde hunc arcum duplare, tertio hunc arcum triplare, & poſtremo hunc iterum duplare. Hac enim ratione ex vltimo arcu duplato auferendi tantum ſunt 60. gradus, & nunquam totus quadrans exhauritur, vt patet.

12 NEQVE vero ſemper opus eſt, vt particula illa gradus, vel particula minor vnà cum vno gradu ſexagies repetatur, ſed ſatis eſt; vt ea aliquoties repetita incidat pręciſe in aliquem gradum; quod non raro accidere ſolet. Nam tunc conſtituetur fractio, cuius numerator eſt numerus graduum percurſorum: Denominator autem numerus tot vnitatũ, quoties particula circino repetita fuerit. Verbi gratia, ſi aliqua grad⁹ particula vicies repetita incidat in 6. gradum, complectetur particula illa $\frac{6}{20}$. vnius gradus. Quare ſi numerator 6. per 60. multiplicetur, & productus numerus 360. per denominatorem 20. diuidatur indicabit Quotiens 18. particulam illam continere 18. minuta. Sic ſi alia particula ſepties repetita incidat in tertium gradum, comprehendet ea $\frac{3}{7}$. vnius gradus. Si igitur numerator 3. per 60. multiplicetur, & numer⁹ productus 180. per denominatorẽ 7. diuidatur, reperientur 25. min. Et quia in diuiſione ſuperſunt 5. ſi ea rurſum multiplicentur per 60. productuſque numerus 300. per eundem denominatorem 7. diuidatur, dabit quotiens adhuc 42$\frac{6}{7}$. ſecunda.

DEMONSTRATIO huius praxis hæc eſt. Quoniam in priori exemplo, ita ſe habent 20. gradus ad 1. gradum, vt particula vicies repetita ad vnam particulam; erit permutando arcus 20. graduum ad arcum continentem particulam vicies, hoc eſt, ad arcum 6. graduum, vt 1. gradus ad vnam particulam: & conuertendo 6. gr. ad 20. gr. vt 1. particula ad 1. grad. Cum ergo 6. grad. ſint $\frac{6}{20}$. graduum 20. continebit quoque vna particula $\frac{6}{20}$. vnius gradus. quod eſt propoſitum. In poſteriori vero exemplo; quia ita ſe habent 7. grad. ad 1. graduum, vt particula ſepties repetita, hoc eſt, vt 3. gradus ad 1 particulam; erit permutando arcus 7 graduum ad 3. gra. vt 1. grad. ad 1. particulam: & conuertendo 3. gradus ad 7. gr. vt vna particula ad 1. gra. Cum ergo 3. grad. ſint $\frac{3}{7}$. ſeptem graduum, complectetur quoq; 1. particula $\frac{3}{7}$. vnius gradus; quod eſt propoſitum. eademq; in cæteris ratio eſt.

QVANDO particula minor cũ vno gradu repetita incidit in gradũ aliquẽ præciſè auferendi erũt ex gradibus percurſis tot gradus, quoties particula illa cum vno gradu repetita fuit. Reliquus n. numerus erit Numerator fractionis: Denominator autem erit, qui pri⁹. Vt ſi particula illa minor cum 1. gradu repetita ſepties incidit

Quo pacto ex quouis gradu particula quotlibet Minutorum abſcindatur.

cidit in 10. gradum; demendi erunt 7. gradus repetiti. Atq; ita habebuntur iterū $\frac{3}{7}$. vnius gradus in data particula.

13 SI viciſſim ex quouis gradu auferre velimus particulam quotlibet minutorum, ita agendum erit. In quadrante ſuperiore BC, accipiatur circino arcus tot graduum, quot minuta deſiderantur; atq; (vt confuſionē vitemus) in arcuum interuallo ſemidiametri quadrantis BC, deſcriptum transferatur. Si enim hic arcus in 60. partes ęquales ſecetur, (primū, videlicet in duas: deinde vna harū iterū in duas: Tertio vna harū in tres: ac poſtremo vna harū in quinq;) continebit vna particula ſexageſima numerū minutorū propoſitū. Verbigratia, ſi particula quæratur continens 50. min. accipiemus in arcu FG, ad interuallū ſemidiametri AC, deſcripto arcum FG, arcui CZ, graduū 50. æqualē, eumq; in 60. partes æquales ſecabimus, primū in duas in puncto K: Deinde arcum FK, iterum in duas in puncto L, tertio arcū FL, in tres in punctis T, V. Ac tandē arcum FV, in quinq;. Vna namque harum 5. particularum comprehendet 50. min. ac proinde ſi transferatur circino in quemlibet gradū Quadrantis BC, abſciſſa erunt 50. Min. ex eo gradu Hoc ita demonſtro. Quoniam eſt, vt arcus 60. graduū ad 1. gradū, ita arcus CZ, ad FG, graduū 50. ad ſexageſimam partem eiuſdē arcus FG; erit permutando, vt arc⁹ 60. graduū ad arcum FG graduū 50; ita 1. gradus ad ſexageſimam particulā arcus FG: & conuertendo, vt arcus FG, graduū 50. ad arcum graduū 60, ita particula ſexageſima arcus FG, ad 1. gradum. Cum ergo arcus FG, contineat $\frac{50}{60}$ arc⁹ 60. graduū, continebit quoq; particula ſexageſima arcus FG, $\frac{50}{60}$. vnius gradus, hoc eſt, 50. Min. Quod eſt propoſitū.

SED hæc res incōmodiſſima eſt in paruis Quadrātib⁹, præſertim ſi pauca Minuta, vtpote 1. 2. vel 3. abſcindenda ſint. Quis n. in Quadrante exiguo arcū 1. grad⁹, vel 2. vel. 3. in 60. particulas diſtribuat? Quam ob rem cōmodius id, qđ proponitur, efficiemus hac ratione. Ex eodem quadrante ſuperiore BC, arcus grad. 61. transferatur in arcum XY ad interuallū ſemidiametri AC deſcriptum, ab X, vſq; ad Y. Atq; hic arc⁹ XY, in 6. partes æquales ſecetur; Primū ſcilicet in 2. deinde vtraq; ſemiſſis in 3. Deinde prima pars in 10. particulas ęquales diuidatur, ita vt quælibet harū particularū ſit $\frac{1}{60}$. arcus XY. Et quoniā vna harū particularū eſt ad arcum XY, vt 1. gradus Quadrantis BC, ad arcum 60. graduū; cum vtrobiq; proportio ſit ſubſexagecupla; erit permutando vna illarū particularum ad 1. grad. vt arcus XY, ad arcum 60. graduum. Quocirca quemadmodū arcus XY, arcum grad. 60. cōtinet ſemel, & inſuper vnam eius partem ſexageſimam, id eſt, 1. grad. ex cōſtructione; Ita quoq; vna illarum particularū cōprehendet 1. gradū ſemel, & inſuper vnam partē ſexageſimā vni⁹ grad⁹, hoc eſt. 1. Minutū. Ex quo fit, vt duæ particulæ complectantur 2. grad. Min. 2. At vero 3. particulæ contineant 3. grad. & 3. Min. & ſic deinceps.

ITAQVE ſi in Quadrantē BC, transferatur vna particula ſexageſima arcus XY. à puncto C, vel à quouis gradu, habebitur 1. Min. in 2. gradu, vel quouis alio. Et ſi duæ particulæ transferantur, habebuntur in tertio gradu duo Minuta: tria autem Min. in 4. gradu, ſi tres particulæ transferantur, & ſic de cæteris.

PARI ratione, ſi quis deſideret quotlibet gradus, ac Minuta, inquirenda prius erit particulā Minutorū, q̄ deſiderātur, eaq; ad gradus propoſitos adijciēda. Quod ſi particula minutorū inuētorū tā exigua fuerit, vt circino vix accipi poſſit, accipienda ea erit vna cum 1. gradu: & hic arcus ex 1. gradu & particula conflatus adijciendus ad numerum graduum propoſitum minus vno. Vt ſi velit quis grad. 89. Min. 59. Inuenienda prius erunt 59. Minuta, quod fiet, ſi 59. particulæ arcus, XY, in Quadrantem BC, transferantur. Nam particula in 60, gradu cōplectetur 59. Min. vt dictum eſt. Si igitur arcus ex illa particula. & 1. gradu conflatus adijciatur ad arcum 88. grad. conficietur arcus grad. 89. Min. 59. Eademq; ratio eſt de cæteris. Accipientur autem in arcu XY, particulæ 59. ſi vnus pes circini in puncto 50. ſtatuatur. & alter in nona particula primæ partis ſextæ totius arcus XY, verſus X. Ita accipientur quoque particulæ 49. 48. 39 34. &c. vt perſpicuum eſt.

IAM vero ſi Minuta non in Quadrante BC, ſed in maiori, minoriue accipienda ſint, inquirenda ea erūt in Quadrante BC, beneficio arcus XY, vt docuimus; Deinde arcui inter C, & finem particulæ inuentæ auferendus ex Quadrante propoſito arcus ſimilis, quod fiet, ſi ille Quadrans ex centro A, deſcribatur, rectaque ex A, per finem particulæ in BC, inuentæ educatur, &c.

Quo pacto reperiatur fractio cuiuſque particula in parte qualibet lineæ rectæ in partes æquales diuiſa.

14 QVAE Num. 10. 11. 12. & 13. pręcedentib⁹, dixim⁹, perbelle etiā quadrant in lineas rectas. Nam eadē ratione cognoſcem⁹. ſi linea recta in quotuis partes ęquales ſecetur, quantam fractionē quælibet particula vnius partis contineat: Et viciſſim quo pacto ex vna parte abſcindenda ſit quæcunq; fractio propoſita. Quę res incredibile eſt, quantam vtilitatem cum alijs rebus Geometricis; tum verò maxime Dimenſionibus, quæ per ſcalam altimetrā fieri ſolēt, afferat, vt lib. 3. cum de Quadrato Geometrico, vbi ſcalę altimetræ vſus apparebit, perſpicuū erit. Sit enim recta linea AB, vt ad pedem Quadrantis ſuperioris vides, ſecta in 10. partes æquales, (In tot n. partes libet tam vmbram rectam, quam verſam ſcalæ altimetræ diſtribuere: quamuis ab alijs vtraq; in 12. diuidatur: quod per illam diuiſionē facilius Dimenſiones perficiantur, vt ſuo loco patebit. Magis tamen probarem, ſi vtrumq; vmbræ latus in 100. partes ſecaretur, ſi id magnitudo inſtrumenti cōmode permittit) propoſitumq; ſit, quot partes decimas cōtineat particula DC, partis quintę, beneficio circini ſumpta particula DC, decupletur ab A, vſq; ad E. Et quoniā in AE, cōtinētur ſex partes totius lineæ AB, continebit propterea particula DC, $\frac{6}{10}$. vnius partis decimæ, hoc eſt, $\frac{6}{100}$. totius lineæ. Ita vt ſi recta AB, diuiſa cogitetur in 100. partes, tribuendo ſingulis decimis partib⁹ denas particulas, ſegmentū AC, cōprehendat $\frac{46}{100}$. Quia vero vltra $\frac{6}{10}$. ſupereſt adhuc particula FE, vnius decimæ, ſi ea rurſum decupletur ab A, vſq; ad G, reperientur in AG, octo partes totius lineæ AB, Continet ergo particula FE. $\frac{8}{10}$. vnius decimæ, hoc eſt. propoſita particula DC, vltra $\frac{6}{10}$. vnius partis rectæ AB, continet inſuper $\frac{8}{10}$ vnius decimæ, (vnius inquam decimæ ex illis $\frac{6}{10}$. quas in particula DC, diximus comprehendi) nimirum $\frac{8}{100}$. vnius partis, ſi ſingulæ partes decimæ rectæ AB, diuiſæ eſſent in 100. particulas; atq; adeo, ſi recta AB, ſecta intelligatur in 1000. partes, tribuendo ſingulis decimis partibus centenas particulas, ſegmentum AC, complectetur $\frac{468}{1000}$. quippe cum in AD, contineantur $\frac{400}{1000}$. Et in DC, $\frac{68}{100}$. vnius partis rectæ AB, ſiue $\frac{68}{1000}$ totius lineæ AB; cum quælibet centeſima particula vnius partis decimæ ſit $\frac{1}{1000}$. Atque in hunc modum progredi licebit ad decimas vnius decimæ ex illis $\frac{6}{10}$. quæ in particula DC, continentur, nimirum ad fractionem à 10000. denominatam, &c. ſed ſatis mihi videtur ad partes milleſimas peruenire.

DEMONSTRATIO hic eadem eſt, quæ in gradibus, ac Minutis. Eandem enim proportionem habet recta 10. partium ad 1. partem, quam recta AE. ad particulā DC, cum vtrobiq; proportio ſit decupla, ideoq; permutando erit vt recta 10. partium ad rectam AE, ita 1. pars ad particulam DC. Quamobrem ſicut in AE, cōtinentur $\frac{6}{10}$. rectæ AB, decem partium, & inſuper particula FE, reſpectu vnius partis lineæ AB, decem partium, ita quo-

ita quoque in particula data DC, continebuntur $\frac{8}{10}$. vnius partis, & inſuper talis particula reſpectu vnius decimæ qualis eſt FE, reſpectu vnius partis lineæ AB, decem partium, &c.

ITAQVE, vt vides, duab. operationib. ad milleſimas partes peruenitur, ac ſi latus totum AB, in 100. partes ſectum eſſet, quod conſideratione dignum eſt. Et duo quidem Numeratores decimarũ eo ordine poſiti, quo inuẽti ſunt, dant Numeratorẽ centeſimarũ: cui ſi præponatur ad ſiniſtrã numer⁹ integrarũ partiũ ante datam particulã exiſtentiũ, conflabitur Numerator milleſimarũ. Vt in ſuperiori exemplo, quia ante datã particulam DC, reperiuntur 4. partes, inuẽtæq; ſunt $\frac{8}{10}$. & $\frac{8}{10}$. erit tota fractio $\frac{488}{1000}$. Sic ſi inuentæ eſſent pro aliqua particula in octaua parte, $\frac{7}{10}$. $\frac{0}{10}$. conſtitueretur fractio $\frac{870}{1000}$. Item ſi in tertia parte inuentæ eſſent $\frac{0}{10}$. $\frac{7}{10}$. fieret fractio $\frac{307}{1000}$. & ſic de cæteris. Quod ſi recta AB, id eſt, latus vtriuſq; vmbræ diuideretur in 100 partes, reperirentur partes milleſimæ vnica operatione; ſi nimirum particula data in vna centeſima decuplaretur: quia tunc intelligerentur ſingulæ centeſimæ in denas particulas ſubdiuiſæ. Sed quia particula data in centeſima aliqua parte perparua eſt, vt vix circino capi poſſit, accipiemus eam cum vna centeſima, vel duabus, & ex decuplo abijciemus 10. vel 20. centeſimas, vt reliquæ cẽteſimæ exhibeant decimas vni⁹ centeſimæ. Eadẽ ratione, quãdo data particula in linea 10. partium eſt perpuſilla, accipienda erit reliqua particula maior decies. Nam reliqua pars rectæ AB, a B, vſq; ad finẽ illi⁹ particulę decuplę dabit numerũ decimarũ in ꝓpoſita minore particula, &c. Hac ratione, ſi particulã CH, decuples, incides in pũctũ K. Ergo ſegmẽtũ BK, dabit; $\frac{8}{10}$. & in ſuper particulã DK, vt ſupra; cũ DK, particulę FE, ſit ęqualis. Ratio hui⁹ rei eſt, ꝙ ambæ particulę DC, CH, decuplatę cõficere debeãt totã, AB. vt cõſtat.
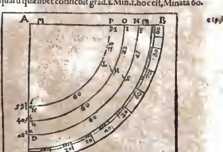
De nominatio facilis fractionum milleſimarum.

AD Maiorẽ quoq; commoditatem pro inueſtigandis partib⁹ decimis, hoc eſt, pro decuplanda particula propoſita, conſtrui poterit circinus duplicis aperturæ, in quo ſcilicet crura producta ſe mutuo interſecent, atq; vna apertura alterius ſit ſemper decupla, inſtar circini, quo linea duas in partes ęquales diuidi ſolet. Ita enim fiet, vt accepta per minorem aperturam particula abſciſſa, particula maior exhibeat eam particulam decies ſumptã, vt non opus ſit toties circinum circumducere: qua quidem in re facile error committi poteſt, qui illo circino, ſi recte fabricatus ſit, facilius vitatur. Sed ſine hoc circino idem fieri poteſt per inſtrumentum partiũ, quod capite præcedenti conſtruximus. Nam ſi particula data circino capiatur, & ſumma diligentia ei ſumatur in inſtrumento, interuallum inter 10. & 10. æquale, erit interuallum inter 100 & 100. datæ particulæ decuplum.

15 IAM vero ſi viciſſim ex qualibet parte rectæ AB, auferendæ ſint quotcunq; decimæ partes vni⁹, diuidendũ erit ſegmentũ cõtinens numerũ partiũ decimarũ in 10. partes æquales. Nã vna pars decima hui⁹ ſegmẽti continebit decimas partes q̃ſitas. Vt ſi cupiat quis $\frac{7}{10}$. diuidendum erit ſegmentum rectæ AB, includens 7. partes, in 10. particulas: Quęlibet namq; harum comprehendet $\frac{7}{10}$. vnius partis rectæ AB. Eademq; ratio eſt de cæteris. Sed commodius hunc vſum nobis præſtabit inſtrumentum partium ſupra conſtructum. Eius enim beneficio ex quauis recta abſcindemus non ſolum quotcunque decimas, ſed etiam centeſimas, nonageſimás nonas, nonageſimas octauas, & ſic deinceps, vſque ad centeſimam partem. Nam ſi velimus $\frac{3}{100}$. alicuius lineæ, capiem⁹ ei lineæ interuallum inter 100 & 100. æquale. Circinus namq; extenſus inter 3. & 3. dabit $\frac{3}{100}$. quæſitas. Ita quoq; circini pedes inter 50 & 50. dabunt $\frac{50}{100}$. id eſt, $\frac{1}{2}$. Rurſus pedes circini inter 20. & 20. dabunt $\frac{20}{100}$. hoc eſt, $\frac{1}{5}$. & ſic de cæteris, vt fuſius in vſu prædicti inſtrumenti partium cap. 1. expoſuimus.

Quo modo ex data linea auferenda ſint quotcunq; partes decimæ vel aliæ partes.

16 QVIA vero alios alijs inſtrumentis delectari ſcio, addam hoc loco duo alia inſtrumenta ab eodem illuſtri D. Iacobo Curtio mecum communicata, quæ ad vſus Geometricos & Aſtronomicos perquam ſunt vtilia. Primum eſt eiuſmodi: ſit quadrans BC, diuiſus in 90. gradus, quorum initium progrediatur à C, verſus B, & pinnacidia, in latere AB, collocentur. Nos eum ob ſpatij anguſtiam in quinos gradus partiti ſumus. Intra hunc ex eodem centro A, deſcribantur alij 59. quadrantes, qui diuidantur in gradus hoc modo. In primo, qui proximus eſt quadranti BC, in grad. 90. diuiſo, arcus continẽs grad. 61. ſecetur in partes 60. æquales, vel arc⁹ graduũ 30½. nimirũ ſemiſſis ipſius, in partes 30. æquales, quarũ quælibet cõtinebit grad. 1. Min. 1. hoc eſt, Minuta 60.



c Nam eadem proportio eſt partium 60. in quas arcus graduum 61. diuiſus eſt, ad gradus, 61. hoc eſt, ad Minuta 3660. quæ partis 1. ad Min. 61. Idem enim numerus producitur ex 60. primo numero, in 61, quartum numerũ, (producitur autem numerus minutorum 3660.) qui ex tertio numero in 3660. ſecũdum numerum producitur. Aut eandem ob cauſam, eadem eſt proportio partium 30. in quas arcus graduum 30½. diuiſus eſt, ad grad. 30.½. hoc eſt, ad Minuta 1830. quæ partis 1. ad Min. 61. Hæc autem diuiſio, vt confuſio punctorum in primo illo quadrante vitetur, facienda eſt ſeorſum in quadrante alio, qui illi æqualis eſt. Deinde vna pars continens Min. 61. transferatur beneficio circini in primum quadrantem prædictum, initio facto à ſemidiametro AC. Ex termino huius partis ad interuallũ ſemidiametri propriæ abſcindatur arcus grad. 60. quo diuiſo in 60. gradus, continebit reliquus arcus vſq; ad ſemidiametrum AB. grad. 28. Min. 59. ac proinde in eum transferendi ſunt grad. 28. ita vt ſuperſit particula Minutorum 59.

c 19. ſept.

IN ſecundo quadrante arcus graduum 62. in 60. partes, vel arcus graduum 31. in 30. partes ęquales ſecetur, vt quælibet contineat grad. 1. Min. 2.

IN tertio arcus graduũ 63. in 60 partes, vel arc⁹ graduũ 31½. in partes 30. æquales diuidatur. In quarto idẽ fiat de arcu graduũ 64. vel 32. & ſic deinceps. Reliqua aũt perficiãtur, vt de primo quadrãte dixim⁹. Quod vt plani⁹ fiat, ponam⁹ exẽplũ in quadrãte 20. 40. & 59. ſiue vltimo & intimo. Itaq; in quadrãte vigeſimo eN, ſit arc⁹ eD, pars ſexageſima arcus graduum 80. (nimirum tot graduum vltra 60. quotum locum ipſe quadrans occupat,) ita vt complectatur grad. 1. Min. 20. d, cum ſit, vt 60. arcus graduum 80. ad grad. 80. hoc eſt, ad min. 4800. ita 1. pars ad grad. 1. Min. 20, hoc eſt, ad Min. 80. Vel certe arcus eD, ſit pars trigeſima arcus graduum 40. Ita enim rur-

d 19. ſept.

ſus

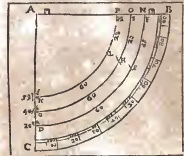
ſus continebit gradus 1⅔.hoc eſt, Min.80.Deinde ad interuallum ſemidiametri A c, abſcindatur arcus DE, grad. 60.qui propterea in 60.gradus diſtribuatur: arcus autem EF, contineat grad.28. & arcus I N, Min.40. quod arcus e F, complectatur grad.89.Min.20.Ita vt particula FN, ſit complementum Minutorum, quæ in e D, vltra vnum gradum continentur: complementum, inquam, vſque ad 60.

RVRSVS in quadrageſimo quadrante f O, arc⁹ f G, ſit ſexageſima pars arc⁹ graduũ 100.vel pars trigeſima arc⁹ graduũ 50.qui illius ſemiſſis eſt; ita vt cõtineat grad.1.Min.40.Arcus vero GH, cõtineat grad.60.& HI, 28.& deniq; IO, Min.20.nimirum complementũ Minutorum 40.quę in f G, vltra vnum gradum comprehẽduntur.

POSTREMO in quadrante p P, quinquageſimo nono ſit arcus p K, ſexageſima pars arcus graduum 119.vel pars trigeſima arcus graduum 59½.qui ſemiſſis illius eſt; ita vt contineat grad.1.Min.56.Arcus autem KL, ſit graduum 60.& LM.grad.28.& deniq; MP, Min.1.Ex his exemplis facile intelliges, quid faciendum ſit in alijs quadrantibus.Semper enim in quolibet quadrante ſecandus eſt in 60, partes æquales arcus, qui tot gradus vltra 60.complectatur, quotum locum quadrans ipſe tenet, excluſo extremo BC.Ita enim continebit particula ipſius prope ſemidiametrum AC, vltra vnum gradum totidem Minuta, quotus ipſe quadrans eſt inter quadrãtes, hoc eſt, quot gradus vltra 60.continentur in arcu diuiſo in 60.partes æquales. Vltima verò particula iuxta ſemidiametrum AB, includet reliqua Minuta ex 60.Idemq; aſſequeris, ſi ſemiſſem illius arcus, quem in 60.partes ſecandum diximus, partieris in 30.æquales partes.

PERACTA diuiſione omniũ quadrantũ, adſcribendi ſunt eorũ numeri iuxta ſemidiametrum AC, ita vt primus quadrans citra quadrantem BC, habeat numerum 1.ſecundus 2.tertius 3.vigeſimus 20. quadrageſimus 40.quinquageſimus nonus 59.&c.

17 VSVS quadrantis hoc modo conſtructi præclarus eſt, cũ eius beneficio in altitudinib. aſtrorum cognoſcamus etiam Minuta. Nã cadẽte filo in aliquẽ gradũ quadrantis BC, altitudo cõtinebit tot gradus ſine Minutis, quot à filo abſcindũtur. Quando aũt filum nõ abſcindit aliquẽ gradum ex quadrante BC.conſidera attente, ex quo quadrante partẽ integrã abſcindat; quod fere ſemper accidet, propter partiũ multitudinẽ. Nam altitudo tunc continebit vltra gradus ex quadrante BC, abſciſſos, tot inſuper Minuta, quot vnitates adſcriptę ſunt illi quadranti, cuius pars integra fuit abſciſſa. Vt cadente filo vltra gradũ 30.in particulam aliquam integram quadrantis quadrageſimi, complectetur altitudo Grad. 30..Min.40.



18 VERVM quia hac ratione cognoſcuntur ſolum Minuta vltra vnum, vel plures gradus; vt diſcernantur etiam Minuta citra vnum gradũ. transferantur ex terminis particularum illarum primarũ ſingulorum quadrantum, de quibus diximus, verſus ſemidiametrum AC, ſinguli gradus. Ita enim cu uſuis quadrantis particula prope eandem ſemidiametrum continebit tot Minuta, quot vnitates Quadranti adſcriptæ ſunt, totidem nimirum, quot prior particula vltra vnum gradum continebat. Verbi grat a, ſi arcus Da, Gb. Kl, contineant ſinguli ſingulos gradus, complectetur arcus e a, Min.20.f b, n b t.Verbi gratia ſi arcus Da Gb Kd, contineant ſinguli ſingulos gradus, complectetur arcus e a, Min. 20.f b; [illegible] 40.& pd.Min.59.Cadente ergo filo in aliquam particulam integrã citra puncta D, G, K, cõtinebit altitudo tot Min.quot vnitates quadranti, cuius particulam integram filum abſcindit, adſcriptæ ſunt.Itaq; quando filum nullum gradum integrũ ex quadrãte BC, abſcindit, caditq; in particulam primã integrã quadrãtis, verbi gratia e N, indicabitur arcus Min.20.quando aũt abſcindit vnum, vel plures gradus. & inſuper cadit in aliquam particulam integram eiuſdem quadrantis; offeretur arcus vnius gradus, vel pluriũ, & inſuper Minutorũ 20. Idemq; dicendum eſt de alijs quadrantibus, habita ſemper ratione numerorum adſcriptorũ: hi enim minuta numerant.

MANIFESTVM autem eſt, quo maior fuerit Quadrans ABC, eo magis exquiſite omnes quadrantes in partes, quas diximus poſſe diſtribui.

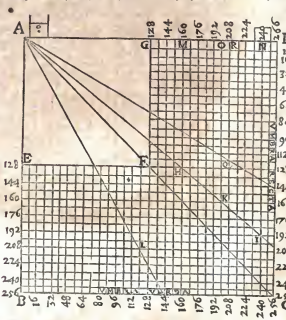
Ex quadr. sic arcum quotcunque graduum ac minutorum auferre & quot gradus, minutaq; in dato arcu contineantur, cognoſcere.

19 BENEFICIO hui⁹ quadrãtis cõmodiſsime quoq; accipi poteſt arcus quotcunq; graduũ ac Minutorũ, & viciſſim cognoſci, quot gradus, ac Minuta propoſitus arcus cõtineat. Nam ſi ex cẽtro A, per finẽ grad⁹ propoſiti in extimo quadrante BC, recta ducatur, vltra quam in alio quadrante, cui adſcriptus eſt numerus Minutorum datorum, accipiatur primum punctum occurrens verſus B, continebit arcus illius quadrantis inter dictum punctum & ſemidiametrum AC, interiectus gradus & Minuta, quæ deſiderantur. Huic ergo arcui ſimilis auferendus eſt ex circulo propoſito. Viciſſim, vt cognoſcamus, quot gradus ac Minuta in oblato quouis arcu contineantur, accipiemus ei ſimilem in aliquo quadrante intra quadrantem BC deſcripto, vel certe in ipſo quadrante, BC, & per eius ſinem ex centro A, rectam ducemus, quæ fere ſemper trãſibit per aliquam particulã integram alicuius quadrantis. Ea ergò particula dabit vltra gradus ab illa recta abſciſſos tot Minuta, quot vnitates illi quadranti adſcriptæ ſunt; atq; gradus illi ac Minuta in propoſito arcu continebuntur. Vides ergo, ſi huiuſmodi quadrans tantæ magnitudinis, quantam diuiſiones ſupradictæ exigunt, ſumma cura ac diligentia cõſtruatur, quàm præclare cum ipſa Aſtronomia agatur, cum non minus explorate Minuta beneficio ipſius comprehendamus, quam per ſinuum multiplicationes, diuiſionesq; :quæ res non parui facienda videtur.

Conſtructio quadrati, quo exquiſitiſſime etiã aſtrorum altitudines obſeruantur.

20 ALTERVM inſtrumentum eſt tale. Sit quadratum ABCD, tãtæ magnitudinis, vt cõmode ſingula latera recipere poſſint 256.partes æquales. Quãuis n. ipſe latus quodlibet in 200.partes ſecet, facilius tamẽ in 256 diuidetur, cũ primùm bifariã ſecetur, deinde vtraq; medietas iterũ bifariã, & quęlibet harũ partiũ rurſus bifariã, atq; ita deinceps vſq; ad octauã diuiſionẽ, qua ſingula latera in 256.partes diuiſa erũt. Accedit ad hãc diuiſionis facilitatẽ hæc etiã vtilitas, ꝙ plures particulæ in toto quadrato cõtineãtur. Certũ aũt eſt, quo plures partes ſunt, eò perfectius eſſe Inſtrumẽtũ; adeo vt quadratũ, ꝙ recipere poſſit adhuc alias ſubdiuiſiones, vt nimirũ in ſingulis laterib. reperiãtur partes 512.vel 1024.videatur eſſe omnib. numeris abſolutũ: ſed ſatis nũc ſit, ſingula latera in 256.part. ęquales diſtribuiſſe. In exẽplo, ob ſpatij anguſtias, ſecta ſũt ſingula in 32.part. ita vt ǭlibet pars intelligatur ſubdi-

ſubdiuiſa adhuc in 8. particulas. Ordo ſiue numerus partium progreditur ab A, verſus B, & D, & à B, & D, verſus C, vt in figura apparet. Puncta porro diuiſionum reſpondentia iungantur rectis lineis, quæ omnes quadrati lateribus [a] parallelæ erunt: Hæ tamen non omnes ad oppoſita vſque latera producãtur, ſed relinquant quadra- *a 33. primi.*
tum vacuum AEFG, quod totius quadrati quarta pars ſit Ita enim fiet, vt quomodocunque filum perpendiculi, vel linea fiduciæ ex A, egrediens cadat quaſi ſemper in partem aliquam integram dictarum parallelarum, hoc eſt, tranſeat præciſe per aliquem angulorum rectorum, qui ab interſectionibus illarum parallelarum efficiuntur, propter earum partium, angulorumve multitudinem. Relictum eſt autem quadratum AEFG, vacuum, propterea quod omnes partes in eo contentæ, ſi productæ eſſent lineæ, habent alias partes duplas, aut quadruplas, aut octuplas, &c. adeo vt filum perpendiculi in aliquam earum cadens cadat quoque neceſſario in aliquam aliam illius duplam, vel quadruplam, octuplamve, &c. vt neceſſe non ſit particulas illas in quadrato AEFG, exprimere. Verbi gratia. Si accipiatur in latere AD, portio continens 40. partes, & filum perpendiculi AH, abſcindat ex parallela à parte 40. lateris AD, ad partem 40. lateris BC, ducta partes 32. abſcindet idem filum ex parallela à parte 160. lateris AD, ad partem 160. lateris BC, ducta partes 128. in H, quæ quadruplæ ſunt partium 32. quemadmodum & partes 160. quadruplæ ſunt partium 40. Sic quoque idem filum AH, ex parallela à parte 240.



lateris AD, ad partem 240. lateris BC, ducta auferet partes 192. in I, quæ partium 32. ſextuplæ ſunt, quemadmodum & partes 240 in latere AD, partium 40. in eodem latere ſextuplæ ſunt. Denique idem filum ex parallela à parte 200. lateris AD, ad partem 200. lateris BC, ducta abſcindet partes 160. quæ quintuplæ ſunt partium 32. ſicut & partes 200. lateris AD, partium 40. eiuſdem lateris quintuplæ ſunt. Eademque ratio eſt de cæteris. Ratio huius rei eſt, quod parallela à parte 40. lateris AD, ad filum AH, ducta conſtituit cum filo triangulum ſimile triangulo, quod cum eodem filo conſtituit parallela quæ v g. à parte 160. lateris AD, demittitur, &c. Poteſt ergo quadratum AEFG, excindi, vt inſtrumentum minus reddatur ponderoſum.

Vſus quadrati cō-ſtructi in rebus Aſtronomicis. HÆC eſt quadrati conſtructio non ſolum, vt vides, facillima, ſed cuius etiam vſus immenſus eſt tam in rebus Aſtronomicis, quam in Geometricis, vt ex ijs, quæ ſequuntur, liquido conſtabit. Exordiemur autem à rebus Aſtronomicis Obſeruaturus ergo quiſpiam altitudinem alicuius ſtellæ notet diligenter, in quam partem linearum parallelarum præciſe filum perpendiculi cadat. Ex hac enim altitudo ſtellæ, hoc eſt, magnitudo anguli quam filum cum latere AB, facit, eruenda eſt. hoc modo. Ceciderit filum in punctum H, parallelæ à parte 160. lateris AD, nempe ex M ad partem 160. lateris BC, ductæ, & parallelæ à parte 128 lateris AB, ad partem 128. lateris CD, ductę. Quoniam igitur in triangulo rectilineo rectangulo AMH, duo latera circa rectum angulum nota ſunt, nempe AM, partium 160. & MH, partium 128. quos numeros iuxta parallelas per H, traiectas ſcriptos eſſe vides; notus fiet, ex praxi 5. noſtrorum triang rectil. angulus HAM, complementi altitudinis hac ratione. Fiat, vt 160. latus AM, circa angulum rectum M, ad 10000000. ſinum totũ. (Accuratior enim calculus in hoc negotio euadet, ſi ex ſinubus, & tangentibus non abijciantur duæ figuræ, vt facere ſolemus, cum ſolis ſinubus vtimur) ita 128. latus MH, angulo quæſito HAM, oppoſitum ad aliud, inuenieturque Tangens 8000000. anguli HAM. quæſiti, cui in tangentium tabula reſpondet arcus grad. 38. Min. 40. pro complemento altitudinis ſtellæ. Eandem Tangentem reperies ex lateribus AO, partium 200. & OK, partium 160. Item ex lateribus AN, partiũ

Partes.	50			51			52			53			54			55			56		
	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S
1	50	0	0	51	0	0	52	0	0	53	0	0	54	0	0	55	0	0	56	0	0
2	35	9	22	35	51	34	36	33	45	37	15	56	37	58	7	38	40	19	39	22	30
3	35	32	49	36	15	28	36	58	7	37	40	47	38	23	26	39	6	6	39	48	45
4	35	56	15	36	39	22	37	22	30	38	5	37	38	48	45	39	31	52	40	15	0
5	36	19	41	37	3	17	37	46	52	38	30	28	39	14	4	39	57	39	40	41	15
6	36	43	7	37	27	11	38	11	15	38	55	19	39	39	22	40	23	26	41	7	30
7	37	6	34	37	51	6	38	35	37	39	20	9	40	4	41	40	49	13	41	33	45
8	37	30	0	38	15	0	39	0	0	39	45	0	40	30	0	41	15	0	42	0	0
9	37	53	26	38	38	54	39	24	22	40	9	51	40	55	19	41	40	47	42	26	15
10	38	16	52	39	2	49	39	48	45	40	34	41	41	20	37	42	6	34	42	52	30
11	38	40	19	39	26	43	40	13	7	40	59	32	41	45	56	42	32	21	43	18	45
12	39	3	45	39	50	37	40	37	30	41	24	22	42	11	15	42	58	7	43	45	0
13	39	27	11	40	14	32	41	1	52	41	49	13	42	36	34	43	23	54	44	11	15
14	39	50	37	40	38	26	41	26	15	42	14	4	43	1	52	43	49	41	44	37	30
15	40	14	4	41	2	21	41	50	37	42	38	54	43	27	11	44	15	28	45	3	45
16	40	37	30	41	26	15	42	15	0	43	3	45	43	52	30	44	41	15	45	30	0
17	41	0	56	41	50	9	42	39	22	43	28	36	44	17	49	45	7	2	45	56	15
18	41	24	22	42	14	4	43	3	45	43	53	26	44	43	7	45	32	49	46	22	30
19	41	47	49	42	37	58	43	28	7	44	18	17	45	8	26	45	58	36	46	48	45
20	42	11	15	43	1	52	43	52	30	44	43	7	45	33	45	46	24	22	47	15	0
21	42	34	41	43	25	47	44	16	52	45	7	58	45	59	4	46	50	9	47	41	15
22	42	58	7	43	49	41	44	41	15	45	32	49	46	24	22	47	15	56	48	7	30
23	43	21	34	44	13	36	45	5	37	45	57	39	46	49	41	47	41	43	48	33	45
24	43	45	0	44	37	30	45	30	0	46	22	30	47	15	0	48	7	30	49	0	0
25	44	8	26	45	1	24	45	54	22	46	47	21	47	40	19	48	33	17	49	26	15
26	44	31	52	45	25	19	46	18	45	47	12	11	48	5	37	48	59	4	49	52	30
27	44	55	19	45	49	13	46	43	7	47	37	2	48	30	56	49	24	51	50	18	45
28	45	18	45	46	13	7	47	7	30	48	1	52	48	56	15	49	50	37	50	45	0
29	45	42	11	46	37	2	47	31	52	48	26	43	49	21	34	50	16	24	51	11	15
30	46	5	37	47	0	56	47	56	15	48	51	34	49	46	52	50	42	11	51	37	30
31	46	29	4	47	24	51	48	20	37	49	16	24	50	12	11	51	7	58	52	3	45
32	46	52	30	47	48	45	48	45	0	49	41	15	50	37	30	51	33	45	52	30	0
33	47	15	56	48	12	39	49	9	22	50	6	6	51	2	49	51	59	32	52	56	15
34	47	39	22	48	36	34	49	33	45	50	30	56	51	28	7	52	25	19	53	22	30
35	48	2	45	49	0	28	49	58	7	50	55	47	51	53	26	52	51	6	53	48	45
36	48	26	15	49	24	22	50	22	30	51	20	37	52	18	45	53	16	52	54	15	0
37	48	49	41	49	48	17	50	46	52	51	45	28	52	44	4	53	42	39	54	41	15
38	49	13	7	50	12	11	51	11	15	52	10	19	53	9	22	54	8	26	55	7	30
39	49	36	34	50	36	6	51	35	37	52	35	9	53	34	41	54	34	13	55	33	45
40	50	0	0	51	0	0	52	0	0	53	0	0	54	0	0	55	0	0	56	0	0

Numerus ſiue ordo Quadrantum.

Partes.	57			58			59			60			61			62			63		
	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S
1	57	0	0	58	0	0	59	0	0	60	0	0	61	0	0	62	0	0	63	0	0
2	40	4	41	40	46	52	41	29	4	42	11	15	42	53	26	43	35	37	44	17	49
3	40	31	24	41	14	4	41	56	43	42	39	22	43	2	2	44	4	41	44	47	21
4	40	58	7	41	41	15	42	24	22	43	7	30	43	50	37	44	33	45	45	16	52
5	41	24	51	42	8	26	42	52	2	43	35	37	44	19	13	45	2	49	45	46	24
6	41	51	34	42	35	37	42	19	41	44	3	45	44	47	49	45	31	52	46	15	56
7	42	18	17	43	2	49	43	47	21	44	31	52	45	16	24	46	0	56	46	45	28
8	42	45	0	43	30	0	44	15	0	45	0	0	45	45		46	30	0	47	15	0
9	43	11	43	43	57	11	44	42	39	45	28	7	46	13	36	46	59	4	47	44	32
10	43	38	26	44	24	22	45	10	19	45	56	15	46	42	11	47	28	7	48	14	4
11	44	5	9	44	51	34	45	37	58	46	24	22	47	10	47	47	57	11	48	43	36
12	44	31	52	45	18	45	46	5	37	46	52	30	47	32	22	48	26	15	49	13	7
13	44	58	36	45	45	56	46	33	17	47	20	37	48	7	58	48	55	19	49	42	39
14	45	25	19	46	13	7	47	0	56	47	48	45	48	36	34	49	24	22	50	12	11
15	45	52	2	46	40	19	47	28	36	48	16	52	49	5	9	49	53	26	50	41	43
16	46	18	45	47	7	30	47	56	15	48	45	0	49	33	45	50	22	30	51	11	15
17	46	45	28	47	34	41	48	23	54	49	13	7	50	2	21	50	51	34	51	40	47
18	47	12	11	48	1	52	48	51	34	49	41	15	50	30	56	51	20	37	52	10	19
19	47	38	54	48	29	4	49	19	13	50	9	22	50	59	32	51	49	41	52	39	51
20	48	5	37	48	56	15	49	46	52	50	37	30	51	28	7	52	18	45	53	9	22
21	48	32	21	49	23	26	50	14	32	51	5	37	51	56	43	52	47	49	53	38	54
22	48	59	4	49	50	37	50	42	11	51	33	45	52	25	19	53	16	52	54	8	26
23	49	25	47	50	17	49	51	9	51	52	1	52	52	53	54	53	45	56	54	37	58
24	49	52	30	50	45	0	51	37	30	52	30	0	53	22	30	54	15	0	55	7	30
25	50	19	13	51	12	11	52	5	9	52	58	7	53	51	6	54	44	4	55	37	2
26	50	45	56	51	33	22	52	32	49	53	26	15	54	19	41	55	13	7	56	6	34
27	51	12	39	52	6	34	53	0	28	53	54	22	54	48	17	55	42	11	56	36	6
28	51	39	22	52	33	45	53	28	7	54	22	30	55	16	52	56	11	15	57	5	37
29	52	6	6	53	0	56	53	55	47	54	50	37	55	45	28	56	40	19	55	35	9
30	52	32	49	53	28	7	54	23	26	55	18	45	56	14	4	57	9	22	58	4	41
31	51	59	32	53	55	19	54	51	6	55	46	52	56	42	39	57	38	26	58	34	13
32	53	56	15	54	22	30	55	18	45	56	15	0	57	11	15	58	7	30	59	3	45
33	53	52	58	54	49	41	55	46	24	56	43	7	57	39	51	58	36	34	59	33	17
34	54	19	41	55	16	52	56	14	4	57	11	15	58	8	26	59	5	37	60	2	49
35	54	46	24	55	44	4	56	41	43	57	39	22	58	37	2	59	34	41	60	32	21
36	55	13	7	56	11	15	57	9	22	58	7	30	59	5	37	60	3	45	61	1	52
37	55	39	51	56	38	26	57	37	2	58	35	37	59	34	13	60	32	49	61	31	24
38	56	9	34	57	5	37	58	4	41	59	3	45	60	2	49	61	1	52	62	0	56
39	56	33	17	57	32	49	58	32	21	59	31	52	60	31	24	61	30	56	62	30	28
40	57	0	0	58	0	0	59	0	0	60	0	0	61	0	0	62	0	0	63	0	0

Numerus ſiue ordo Quadrantum.

Numerus ſiue ordo Quadrantum.

Partes.	71			72			73			74			75			76			77		
	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S
1	71	0	0	72	0	0	73	0	0	74	0	0	75	0	0	76	0	0	77	0	0
2	49	55	19	50	37	30	51	19	41	52	1	52	52	44	4	53	26	15	54	8	26
3	50	28	36	51	11	15	51	53	54	52	36	34	53	19	13	54	1	52	54	44	32
4	51	1	52	51	45	0	52	28	7	53	11	15	53	54	22	54	37	30	55	20	37
5	51	35	9	52	18	45	53	2	21	53	45	56	54	29	32	55	13	7	55	56	43
6	52	8	26	52	52	30	53	36	34	54	20	37	55	4	41	55	48	45	56	32	49
7	52	41	43	53	26	11	54	10	47	54	55	19	55	39	51	56	24	22	57	8	54
8	53	15	0	54	0	0	54	45	0	55	30	0	56	15	0	57	0	0	57	45	0
9	53	48	17	54	33	45	55	19	13	56	4	41	56	50	9	57	35	37	58	21	6
10	54	21	34	55	7	30	55	53	26	56	39	22	57	25	19	58	11	15	58	57	11
11	54	54	51	55	41	15	56	27	39	57	14	4	58	0	28	58	46	52	59	33	17
12	55	28	7	56	15	0	57	1	52	57	48	45	58	35	37	59	22	30	60	9	22
13	56	1	24	56	48	45	57	36	6	58	23	26	59	10	47	59	58	7	60	45	28
14	56	34	41	57	22	30	58	10	19	58	58	7	59	45	56	60	33	45	61	21	34
15	57	7	58	57	56	15	58	44	32	59	32	49	60	21	6	61	9	22	61	57	39
16	57	41	15	58	30	0	59	18	45	60	7	30	60	56	15	61	45	0	62	33	45
17	58	14	32	59	3	45	59	52	58	60	42	11	61	31	24	62	20	37	63	9	51
18	58	47	49	59	37	30	60	27	11	61	16	52	62	6	34	62	56	15	63	45	56
19	59	21	6	60	11	15	61	1	24	61	51	34	62	41	43	63	31	52	64	22	2
20	59	54	22	60	45	0	61	35	37	62	26	15	63	16	52	64	7	30	64	58	7
21	60	27	39	61	18	45	62	9	51	63	0	56	63	52	2	64	43	7	65	34	13
22	61	0	56	61	52	30	62	44	4	63	35	37	64	27	11	65	18	45	66	10	19
23	61	34	13	62	26	15	63	18	17	64	10	19	65	2	21	65	54	22	66	46	24
24	62	7	30	63	0	0	63	52	30	64	45	0	65	37	30	66	30	0	67	22	30
25	62	40	47	63	33	45	64	26	43	65	19	41	66	12	39	67	5	37	67	58	36
26	63	14	4	64	7	30	65	0	56	65	54	22	66	47	49	67	41	15	68	34	41
27	63	47	21	64	41	15	65	35	9	66	29	4	67	22	58	68	16	52	69	10	47
28	64	20	37	65	15	0	66	9	22	67	3	45	67	58	7	68	52	30	69	46	51
29	64	53	54	65	48	45	66	43	36	67	38	26	68	33	17	69	28	7	70	22	58
30	65	27	11	66	22	30	67	17	49	68	13	7	69	8	26	70	3	45	70	59	4
31	66	0	28	66	56	15	67	52	2	68	47	49	69	43	36	70	39	22	71	35	9
32	66	33	45	67	30	0	68	26	15	69	22	30	70	18	45	71	15	0	72	11	15
33	67	7	2	68	3	45	69	0	28	69	57	11	70	53	54	71	50	37	72	47	21
34	67	40	19	68	37	30	69	34	41	70	31	52	71	29	4	72	26	15	73	23	26
35	68	13	36	69	11	15	70	8	54	71	6	34	72	4	13	73	1	52	73	59	32
36	68	46	52	69	45	0	70	43	7	71	41	15	72	39	22	73	37	30	74	35	37
37	69	20	9	70	18	45	71	17	21	72	15	56	73	14	32	74	13	7	75	11	43
38	69	53	26	70	52	30	71	51	34	72	50	37	73	49	41	74	48	45	75	47	45
39	70	26	43	71	26	15	72	25	47	73	25	19	74	24	51	75	24	22	76	23	54
40	71	0	0	72	0	0	73	0	0	74	0	0	75	0	0	76	0	0	77	0	0

Numerus ſiue ordo Quadrantum.

Partes.	78			79			80			81			82			83			84		
	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S
1	78	0	0	79	0	0	80	0	0	81	0	0	82	0	0	83	0	0	84	0	0
2	54	50	37	55	32	49	56	15	0	56	57	11	57	39	22	58	21	34	59	3	45
3	55	27	11	56	9	51	56	52	30	57	35	9	58	17	49	59	0	28	59	43	7
4	56	3	45	56	46	52	57	30	0	58	13	7	58	56	15	59	39	22	60	22	30
5	56	40	19	57	23	54	58	7	30	58	51	6	59	34	41	60	18	17	61	1	52
6	57	16	52	58	0	56	58	45	0	59	29	4	60	13	7	60	57	11	61	41	15
7	57	53	26	58	37	58	59	22	30	60	7	2	60	51	34	61	36	6	62	20	37
8	58	30	0	59	15	0	60	0	0	60	45	0	61	30	0	62	15	0	63	0	0
9	59	6	34	59	52	2	60	37	30	61	22	58	62	8	26	62	53	54	63	39	22
10	59	43	7	60	29	4	61	15	0	62	0	56	62	46	52	63	32	49	64	18	45
11	60	19	41	61	6	6	61	52	30	62	38	54	63	25	19	64	11	43	64	58	7
12	60	56	15	61	43	7	62	30	0	63	16	52	64	3	45	64	50	37	65	37	30
13	61	32	49	62	20	9	63	7	30	63	54	51	64	42	11	65	29	32	66	16	52
14	62	9	22	62	57	11	63	45	0	64	32	49	65	20	37	66	8	27	66	56	15
15	62	45	56	63	34	13	64	22	30	65	10	47	65	59	4	66	47	21	67	35	37
16	63	22	30	64	11	15	65	0	0	65	48	45	66	37	30	67	26	15	68	15	0
17	63	59	4	64	48	17	65	37	30	66	26	43	67	15	56	68	5	9	68	54	22
18	64	35	37	65	25	19	66	15	0	67	4	41	67	54	22	68	44	4	69	33	45
19	65	12	11	66	2	21	66	52	30	67	42	39	68	32	49	69	22	58	70	13	7
20	65	48	45	66	39	22	67	30	0	68	20	37	69	11	15	70	1	52	70	52	30
21	66	25	19	67	16	24	68	7	30	68	58	36	69	49	41	70	40	47	71	31	52
22	67	1	52	67	53	26	68	45	0	69	36	34	70	28	7	71	19	41	72	21	15
23	67	38	26	68	30	28	69	22	30	70	14	32	71	6	34	71	58	36	72	50	37
24	68	15	0	69	7	30	70	0	0	70	52	30	71	45	0	72	37	30	73	30	0
25	68	51	34	69	44	32	70	37	30	71	30	28	72	23	26	73	16	24	74	9	22
26	69	28	7	70	21	34	71	15	0	72	8	26	73	1	52	73	55	19	74	48	45
27	70	4	41	70	58	36	71	52	30	72	46	24	73	40	19	74	34	13	75	28	7
28	70	41	15	71	35	37	72	30	0	73	24	22	74	18	45	75	13	7	76	7	30
29	71	17	49	72	12	39	73	7	30	74	2	21	74	57	11	75	52	2	76	46	52
30	71	54	22	72	49	41	73	45	0	74	40	19	75	35	37	76	30	56	77	26	15
31	72	30	56	73	26	43	74	22	30	75	18	17	76	14	4	77	9	51	78	5	37
32	73	7	30	74	3	45	75	0	0	75	56	15	76	52	30	77	48	45	78	45	0
33	73	44	4	74	40	47	75	37	30	76	34	13	77	30	56	78	27	39	79	24	22
34	74	20	37	75	17	49	76	15	0	77	12	11	78	9	22	79	6	34	80	3	45
35	74	57	11	75	54	51	76	52	30	77	50	9	78	47	49	79	45	28	80	43	7
36	75	33	45	76	31	52	77	30	0	78	28	7	79	26	15	80	24	22	81	22	30
37	76	10	19	77	8	54	78	7	30	79	6	6	80	4	41	81	3	17	82	1	52
38	76	46	52	77	45	56	78	45	0	79	44	4	80	43	7	81	42	11	82	41	15
39	77	23	26	78	22	58	79	22	30	80	22	2	81	21	34	82	21	6	83	20	37
40	78	0	0	79	0	0	80	0	0	81	0	0	82	0	0	83	0	0	84	0	0

Numerus ſuo ordo Quadrantum.

Partes.	85			86			87			88			89			90			91		
	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S
1	85	0	0	86	0	0	87	0	0	88	0	0	89	0	0	90	0	0	0	0	0
2	59	45	56	60	28	7	61	10	19	61	52	30	62	34	41	63	16	52	63	59	4
3	60	25	47	61	8	26	61	51	6	62	33	45	63	16	24	63	59	4	64	41	43
4	61	5	37	61	48	45	62	31	52	63	15	0	63	58	7	64	41	15	65	24	22
5	61	45	28	62	29	4	63	12	39	63	56	15	64	39	51	65	23	26	66	7	2
6	62	25	19	63	9	22	63	53	26	64	37	30	65	21	34	66	5	37	66	49	41
7	63	5	9	63	49	41	64	34	13	65	18	45	66	3	17	66	47	49	67	32	21
8	63	45	0	64	30	0	65	15	0	66	0	0	66	45	0	67	30	0	68	15	0
9	64	24	51	65	10	19	65	55	47	66	41	15	67	26	43	68	12	11	68	57	39
10	65	4	41	65	50	37	66	36	34	67	22	30	68	8	26	68	54	22	69	40	19
11	65	44	32	66	30	56	67	17	21	68	3	45	68	50	9	69	36	34	70	22	58
12	66	24	22	67	11	15	67	58	7	68	45	0	69	31	52	70	18	45	71	5	37
13	67	4	13	67	51	34	68	38	54	69	26	15	70	13	36	71	0	56	71	48	17
14	67	44	4	68	31	52	69	19	41	70	7	30	70	55	19	71	43	7	72	30	56
15	68	23	54	69	12	11	70	0	28	70	48	45	71	37	2	72	25	19	73	13	36
16	69	3	45	69	52	30	70	41	15	71	30	0	72	18	45	73	7	30	73	56	15
17	69	43	36	70	32	49	71	22	2	72	11	15	73	0	28	73	49	41	74	38	54
18	70	23	26	71	13	7	72	2	49	72	52	30	73	42	11	74	31	52	75	21	34
19	71	3	17	71	53	26	72	43	36	73	33	45	74	23	54	75	14	4	76	4	13
20	71	43	7	72	33	45	73	24	22	74	15	0	75	5	37	75	56	15	76	46	52
21	72	22	58	73	14	4	74	5	9	74	56	15	75	47	21	76	38	26	77	29	4
22	73	2	49	73	54	22	74	45	56	75	37	30	76	29	4	77	20	37	78	12	11
23	73	42	39	74	34	41	75	26	43	76	18	45	77	10	47	78	2	49	78	54	51
24	74	22	30	75	15	0	76	7	30	77	0	0	77	52	30	78	45	0	79	37	39
25	75	2	21	75	55	19	76	48	17	77	41	15	78	34	13	79	27	11	80	20	0
26	75	42	11	76	35	37	77	29	4	78	22	30	79	15	56	80	9	22	81	2	49
27	76	22	2	77	15	56	78	9	51	79	3	45	79	7	39	80	51	34	81	45	28
28	77	1	52	77	56	15	78	50	37	79	45	0	80	39	22	81	33	45	82	28	7
29	77	41	43	78	36	36	79	31	24	80	26	15	81	21	6	82	15	56	83	10	47
30	78	21	34	79	16	52	80	12	11	81	7	30	82	2	49	82	58	7	83	53	27
31	79	1	24	79	57	11	80	52	58	81	48	45	82	44	32	83	40	19	84	36	6
32	79	41	15	80	37	30	81	33	45	82	30	0	83	26	15	84	22	30	85	18	45
33	80	21	6	81	17	49	82	14	32	83	11	15	84	7	58	85	4	41	86	1	24
34	81	0	56	81	58	7	82	55	19	83	52	30	84	49	41	85	46	52	86	44	4
35	81	40	47	82	38	26	83	36	6	84	33	45	85	31	24	86	29	4	87	26	43
36	82	20	37	83	18	45	84	16	52	85	15	0	86	13	7	86	11	15	88	9	22
37	83	0	28	83	59	4	84	57	39	85	56	15	86	54	51	87	53	26	88	52	2
38	83	40	19	84	39	22	85	38	26	86	37	30	87	36	34	88	35	37	89	34	41
39	84	20	9	85	19	41	86	19	13	87	18	45	88	18	17	89	17	49	0	0	0
40	85	0	0	86	0	0	87	0	0	88	0	0	89	0	0	99	0	0	0	0	0

Partes.	92			93			94			95			96			97			98		
	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	64	41	15	65	23	26	66	5	37	66	47	49	67	30	0	68	12	11	68	54	22
3	65	24	22	66	7	2	66	49	41	67	32	21	68	15	0	68	57	39	69	40	19
4	66	7	30	66	50	37	67	33	45	68	16	52	69	8	0	69	43	7	70	26	15
5	66	50	37	67	34	13	68	17	49	69	1	24	69	45	0	70	28	36	71	12	11
6	67	33	45	68	17	49	69	1	52	69	45	56	70	30	0	71	14	4	71	58	7
7	68	16	52	69	1	24	69	45	56	70	30	28	71	15	0	71	59	32	72	44	4
8	69	0	0	69	45	0	70	30	0	71	15	0	72	0	0	72	45	0	73	30	0
9	69	43	7	70	28	36	71	14	4	71	59	32	72	45	0	73	30	28	74	15	56
10	70	26	15	71	12	11	71	58	7	72	44	4	73	30	0	74	15	56	75	1	52
11	71	9	22	71	55	47	72	42	11	73	28	36	74	15	0	75	1	24	75	47	49
12	71	52	30	72	39	22	73	26	15	74	13	7	75	0	0	75	46	52	79	33	45
13	72	35	37	73	22	58	74	10	19	74	57	39	75	45	0	76	32	21	77	19	41
14	73	18	35	74	6	34	74	54	22	75	42	11	76	30	0	77	17	49	78	5	37
15	74	1	52	74	50	9	75	38	26	76	26	43	77	15	0	78	3	17	78	51	34
16	74	45	0	75	33	45	76	22	30	77	11	15	78	0	0	78	48	45	79	37	30
17	75	28	7	76	17	21	77	6	34	77	55	47	78	45	0	79	34	13	80	23	26
18	76	11	15	77	0	56	77	50	37	78	40	19	79	30	0	80	19	41	81	9	22
19	76	54	22	77	44	32	78	34	41	79	24	51	80	15	0	81	5	9	81	55	19
20	77	37	30	78	28	7	79	18	45	80	9	22	81	0	0	81	50	37	82	41	15
21	78	20	37	79	11	43	80	2	49	80	53	54	81	45	0	82	36	6	83	27	11
22	79	3	45	79	55	19	80	46	50	81	38	26	82	30	0	83	21	34	84	13	7
23	79	46	52	80	38	54	81	30	56	82	22	58	83	15	0	84	7	2	84	59	4
24	80	30	0	81	22	30	82	15	0	83	7	30	84	0	0	84	52	30	85	45	0
25	81	13	7	82	6	6	82	59	4	83	52	2	84	45	0	85	37	58	86	30	56
26	81	56	15	82	49	41	83	43	7	84	36	34	85	30	0	86	23	26	87	16	52
27	82	39	22	83	33	17	84	27	11	85	21	6	86	15	0	87	8	54	88	2	49
28	83	22	30	84	16	52	85	11	15	86	15	37	87	0	0	87	54	22	88	48	45
29	84	5	37	85	0	28	85	55	19	86	50	9	87	45	0	88	39	51	89	34	41
30	84	48	45	85	44	4	86	39	22	87	34	41	88	30	0	89	25	19	0	0	0
31	85	31	52	86	27	39	87	23	26	88	19	13	89	15	0	0	0	0			
32	86	15	0	87	11	15	88	7	30	89	3	45	90	0	0	0	0	0			
33	86	58	7	87	54	51	88	51	34	89	48	17	0	0	0	0	0	0			
34	87	41	15	88	38	26	89	35	37	0	0	0	0	0	0						
35	88	24	22	89	22	2	0	0	0												
36	89	7	30	0	0	0															
37	89	50	37	0	0	0															
38	0	0	0	0	0	0															

Numerus ſiue ordo Quadrantum.

Numerus ſiue ordo Quadrantum.

Partes	99			100			101			102			103			104			105		
	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	69	36	34	70	18	45	71	0	56	71	43	7	72	25	19	73	7	30	73	49	41
3	70	22	58	71	5	37	71	48	17	72	30	56	73	13	36	73	56	15	74	37	58
4	71	9	22	71	52	30	72	35	37	73	18	45	74	1	52	74	45	0	75	28	7
5	71	55	47	72	39	22	73	22	58	74	6	34	74	50	9	75	33	45	76	17	21
6	72	42	11	73	26	15	74	10	19	74	54	22	75	38	26	76	22	30	77	6	34
7	73	28	36	74	13	7	74	57	39	75	42	11	76	26	43	77	11	15	77	55	47
8	74	15	0	75	0	0	75	45	0	76	30	0	77	15	0	78	0	0	78	45	0
9	75	1	24	75	46	52	76	32	21	77	17	49	78	3	17	78	48	45	79	34	13
10	75	47	49	76	33	45	77	19	41	78	5	37	78	51	34	79	37	30	80	23	26
11	76	34	13	77	20	37	78	7	2	78	53	26	79	39	51	80	26	15	81	12	39
12	77	20	37	78	7	30	78	54	22	79	41	15	80	28	7	81	15	0	82	1	52
13	78	7	2	78	54	22	79	41	43	80	29	4	81	16	24	82	3	45	82	51	6
14	78	53	26	79	41	15	80	29	4	81	16	52	82	4	41	82	52	30	83	40	19
15	79	39	51	80	28	7	81	16	24	82	4	41	82	52	58	83	41	15	84	20	32
16	80	26	15	81	15	0	82	3	45	82	52	30	83	41	15	84	30	0	85	18	45
17	81	12	39	82	1	52	82	51	6	83	40	19	84	29	32	85	18	45	86	7	58
18	81	59	4	82	48	45	83	37	30	84	28	7	85	17	49	86	7	30	86	57	11
19	82	45	28	83	35	37	84	25	47	85	15	56	86	6	6	86	56	15	87	46	24
20	83	31	52	84	22	30	85	13	7	86	3	45	86	54	22	87	45	0	88	35	37
21	84	18	17	85	9	22	86	0	28	86	51	34	87	42	39	88	33	45	80	24	51
22	85	4	41	85	56	15	86	47	49	87	39	22	88	30	56	89	22	30	0	0	0
23	85	51	6	86	43	7	87	35	9	88	27	11	89	19	13	0	0	0	0	0	0
24	86	37	30	87	30	0	88	22	30	89	15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
25	87	23	54	88	16	52	89	9	51	0	0	0									
26	88	10	19	89	3	45	89	57	11	0	0	0									
27	88	56	43	89	50	37	0	0	0	0	0	0									
28	89	43	7	0	0	0															
29	0	0	0	0	0	0															
30	0	0	0																		

Numerus ſiue ordo Quadrantum.

Partes	106			107			108			109			110			111			112		
	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	74	31	52	75	14	4	75	56	15	75	38	26	77	20	37	78	2	49	78	45	0
3	75	21	34	76	4	13	76	46	52	77	29	32	78	12	11	78	54	51	79	52	30
4	76	11	15	76	54	22	77	37	30	78	20	37	79	3	45	79	46	52	80	30	0
5	77	0	56	77	44	32	78	28	7	79	11	43	79	55	19	80	38	54	81	22	30
6	77	50	37	78	34	41	79	18	45	80	2	49	80	46	52	81	30	56	82	15	0
7	78	40	19	79	24	51	80	9	22	80	53	54	81	38	26	82	22	58	83	7	30
8	79	30	0	80	15	0	81	0	0	81	45	0	82	30	0	83	15	0	84	0	0
9	80	10	41	81	5	9	81	50	37	82	36	6	83	21	34	84	7	2	84	52	30
10	81	9	22	81	55	19	82	41	15	83	27	11	84	13	7	84	59	4	85	45	0
11	81	59	4	82	45	28	83	31	52	84	18	17	85	4	41	85	51	6	86	37	30
12	82	48	45	83	35	37	84	22	30	85	9	22	85	56	15	86	43	7	87	30	0
13	83	38	26	84	25	47	85	13	7	86	0	28	86	47	49	87	35	9	88	22	30
14	84	28	7	85	15	56	86	3	45	86	51	34	87	39	22	88	27	11	89	15	0
15	85	17	49	86	6	6	86	54	22	87	42	39	88	30	56	89	19	13	0	0	0
16	86	7	30	86	56	15	87	45	0	88	33	45	89	22	30	0	0	0			
17	86	57	11	87	46	24	88	35	37	89	24	51	0	0	0	0	0	0			
18	87	46	52	88	36	34	89	26	15	0	0	0	0	0	0	0	0	0			
19	88	36	34	89	26	43	0	0	0												
20	89	26	15	0	0	0	0	0	0												
21	0	0	0	0	0	0	0	0	0												

Numerus ſiue ordo Quadrantum.

Partes.	113			114			115			116			117			118			119		
	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	79	27	11	80	9	22	80	51	34	81	33	45	82	15	56	82	58	7	83	40	19
3	80	20	9	81	2	49	81	45	28	82	28	7	83	10	47	83	53	26	84	36	6
4	81	13	7	81	56	15	82	39	22	83	22	30	84	5	37	84	48	45	85	31	52
5	83	6	6	82	49	41	83	33	17	84	16	52	85	0	28	85	44	4	86	27	39
6	82	59	4	83	43	7	84	27	11	85	11	15	85	55	19	86	39	22	87	23	26
7	83	52	2	84	36	34	85	21	6	86	5	37	86	50	9	87	34	41	88	19	13
8	84	45	0	85	30	0	86	15	0	87	0	0	87	45	0	88	30	0	89	15	0
9	85	37	58	86	23	26	87	8	54	87	54	22	88	39	51	89	25	19	0	0	0
10	86	30	56	87	16	52	88	2	49	88	48	45	89	34	41	0	0	0	0	0	0
11	87	23	54	88	10	19	88	56	43	89	43	7	0	0	0	0	0	0			
12	88	16	52	89	3	45	0	0	0	0	0	0									
13	89	9	51	89	57	11	0	0	0												
14	0	0	0	0	0	0															
15	0	0	6																		

Partes.	120			121			122			123			124			125			126		
	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	84	22	30	85	4	41	85	46	52	86	29	4	87	11	15	87	53	27	88	35	37
3	85	18	45	86	1	24	86	44	4	87	26	43	88	9	22	88	52	2	89	34	41
4	86	15	0	86	58	7	87	41	15	88	24	22	89	7	30	89	50	37	0	0	0
5	87	11	15	87	54	51	88	38	26	89	22	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	88	7	30	88	51	34	89	35	37	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	89	3	45	89	48	17	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	90	0	0	0	0	0															
9	0	0	0																		

Partes.	127			128		
	G	M	S	G	M	S
1	0	0	0	0	0	0
2	89	17	49	90	0	0
3	0	0	0	0	0	0

10 QVANDO intra Quadrantem non deſcripti ſunt plures quadrantes, ſed vnicus tantum adeſt in 90. gradus exquiſitè diſtributus, cognoſcemus ſolo circini beneficio, quot Minuta, ac ſecunda in quauis gradus particula contineantur: id quod etiam in Aſtrolabio fecimus, hoc ſcilicet modo. Sit data verbi gratia particula t u, in gradu 20. ſuperioris Quadrantis BC. Sumatur ea diligentiſſime beneficio circini, & à principio Quadrantis, id eſt, à puncto C, incipiendo, eadem apertura circini accipiantur 60. æquales particulæ vſque ad punctum X, ita vt arcus CX, ſexagecuplus ſit arcus t u: Quot enim gradus integri in hoc arcu ſexagecuplo comprehenduntur, tot minuta complectetur particula data t u. Et ſi vltra gradus integros in arcu CX, ſuperſit aliqua particula, accipiatur ea ſexagies quoque, initio facto à puncto C. Nam quot gradus integri in hoc arcu ſexagecuplo continentur, tot ſecunda vltra Minuta inuenta continebuntur in data particula t u. Quod ſi adhuc aliquid ſuperſit, reperientur eodem modo Tertia, &c. Itaque cum in arcu CX, qui ſexagecuplus eſt particulæ t u, contineantur 40. gradus integri, comprehendet particula t u, quadraginta Minuta, & inſuper tot ſecunda, quot gradus continentur in arcu, qui ſexagecuplus ſit particulæ vltra 40. gradus in arcu CX, contentæ, &c.

Quo pacto per circinum deprehendatur Minuta, ac ſecunda in quauis propoſita gradus particula.

HOC autē ita demonſtro. Quam proportionem habet arcus 60. graduū ad 1. gradum, eam habet arcus CX, ad particulam t u, cum vtrobique proportio ſit ſexagecupla. Igitur permutando erit, vt arcus 60. graduum ad arcum CX, ita 1. gradus ad particulam t u: Ac proinde quot partes ſexageſimæ arcus 60. graduum, hoc eſt, quot gradus in arcu CX, continentur, tot ſexageſimæ partes vnius gradus, id eſt, tot minuta in particula t u, exiſtent. Item quam proportionem habet arcus 60. Minutorum ad 1. Minutum, eam habet arcus ſexagecuplus particulæ, quæ vltra gradus integros vſq; ad X, ſupereſt ad hanc ipſam particulā. Permutando igitur erit, vt arc⁹ 60. Minutorum ad arcum ſexagecuplum dictæ particulæ reliquæ, ita 1. Minutum ad dictam particulam reliquam. Quare quot partes ſexageſimæ arcus 60. Minutorum, hoc eſt, quot minuta in arcu dictæ particulæ ſexagecuplo (ſumendo nunc gradus Quadrantis BC, pro Minutis) continentur, tot partes ſexageſimæ vnius Minuti, id eſt, tot Secunda, in reliqua illa particula includentur, & ſic deinceps, ſi opus ſit, de Tertijs, Quartis, &c. intelligatur. Sed ſatis eſt, meo iudicio, ſi minuta diligēter inquirantur. Et ſi quidem particula remanens maior fuerit ſemiſſe gradus, pro illa vnum Minutum aſſumatur, Minutiſq; inuentis adijciatur, quod tunc in illa particula contineantur plura Secunda quam 30. Si vero eadem particula ſemiſſe gradus fuerit minor, nihil Minutis inuentis adijciatur, quod tunc in illa particula pauciora Secunda includantur quam 30. Si deniq; dicta particula ſemiſſi gradus fuerit æqualis, liberum ſit addere Minutis inuentis vnum Minutum, vel non addere.

11 QVIA vero facile error cōmitti poteſt, ſi circino particulam dictam gradus vel minuti ſexagies ordine ſumere velimus, rectius feceris, quando particula data ſemiſſe gradus minor eſt, ſi eam vna cū præcedente gradu acceptam primo loco quintuples: deinde hunc arcum quintuplū duples, tertio hunc arcū duplū triples, ac tandē quarto hunc arcum triplum iterum duples. Vltimus n. hic arcus erit datæ particulæ vna cum gradu accepto ſexagecuplus. Quare ſi ex eo demantur 60. gradus, indicabunt reliqui gradus numerum minutorū in data particula contentorū. Quod ſi per æſtimationem cognoueris, particulam ſemiſſe gradus minorem non ſuperare min. 24. (Nam ſi ſuperaret 24. minuta, non poſſemus ratione iam explicanda inquirere minuta; propterea quod circumducendo circinum, totum Quadrantem excederemus, vt patebit.) commodius minuta datæ particulæ cognoſcemus hoc modo. Datam particulā cum gradu præcedenti primo loco quadruplicabimus: deinde hunc arcū quadruplū duplabimus, vt habeamus octuplum arcus ex particula, & vno gradu compoſiti, tertio arcum hunc octuplū iterum duplabimus, vt fiat arcus ſedecuplus arcus ex data particula, & vno gradu compoſiti; quarto hunc arcū rurſus duplabimus; & quinto tandem hunc duplū iterum duplabimus; vt habeatur arcus continens arcum ex particula propoſita, & vno gradu ſexagies & quater, cuius extremum punctum diligenter notetur. Nam ſi ex toto arcu ab eo puncto incipiendo, auferatur arcus quadruplus particulæ datæ vna cum vno gradu, ſupererit arc⁹ ſexagecuplus eiuſdē particulæ vnà cum vno gradu; ex quo deniq; ſi demantur 60. gradus, reliqui gradus numerum minutorum indicabunt. Quòd ſi data particula ſemiſſe gradus fuerit maior, explorabim⁹ eodē modo minuta in reliqua particula minore comprehenſa. Hæc namq; minuta ex 60. detracta relinquent minuta in particula illa maiore comprehēſa. Bene autem vides, quando data particula minor parū à ſemiſſe gradus differt, tutius eſſe quintuplare illam vnà cum vno gradu; deinde hunc arcum duplare, tertio hunc arcum triplare, & poſtremo hunc iterum duplare. Hac enim ratione ex vltimo arcu duplato auferendi tantum ſunt 60. gradus, & nunquam tótus quadrans exhauritur, vt patet.

12 NEQVE vero ſemper opus eſt, vt particula illa gradus, vel particula minor vnà cum vno gradu ſexagies repetatur, ſed ſatis eſt; vt ea aliquoties repetita incidat præciſe in aliquem gradum; quod non raro accidere ſolet. Nam tunc conſtituetur fractio, cuius numerator eſt numerus graduum percurſorum; Denominator autem numerus tot vnitatū, quoties particula circino repetita fuerit. Verbi gratia, ſi aliqua grad⁹ particula vicies repetita incidat in 6. gradum, complectetur particula illa $\frac{6}{20}$. vnius gradus. Quare ſi numerator 6. per 60. multiplicetur, & productus numerus 360. per denominatorem 20. diuidatur indicabit Quotiens 18. particulam illam continere 18. minuta. Sic ſi alia particula ſepties repetita incidat in tertium gradum, comprehendet ea $\frac{3}{7}$. vnius gradus. Si igitur numerator 3. per 60. multiplicetur, & numer⁹ productus 180. per denominatorē 7. diuidatur, reperientur 25. min. Et quia in diuiſione ſuperſunt 5. ſi ea rurſum multiplicentur per 60. productuſque numerus 300. per eundem denominatorem 7. diuidatur, dabit quotiens adhuc $42\frac{6}{7}$. ſecunda.

DEMONSTRATIO huius praxis hæc eſt. Quoniam in priori exemplo, ita ſe habent 20. gradus ad 1 gradum, vt particula vicies repetita ad vnam particulam; erit permutando arcus 20. graduum ad arcum continentem particulam vicies, hoc eſt, ad arcum 6. graduum, vt 1. gradus ad vnam particulam: & conuertendo 6. gr. ad 20. gr. vt 1. particula ad 1. grad. Cum ergo 6. grad. ſint $\frac{6}{20}$. graduum 20. continebit quoque vna particula $\frac{6}{20}$. vnius gradus. quod eſt propoſitum. In poſteriori vero exemplo; quia ita ſe habent 7. grad. ad 1. graduum, vt particula ſepties repetita, hoc eſt, vt 3. gradus ad 1. particulam; erit permutando arcus 7 graduum ad 3. gra. vt 1. grad. ad 1. particulam: & conuertendo 3. gradus ad 7. gr. vt vna particula ad 1. gra. Cum ergo 3. grad. ſint $\frac{3}{7}$. ſeptem graduum, complectetur quoq; 1. particula $\frac{3}{7}$. vnius gradus; quod eſt propoſitum. eademq; in cæteris ratio eſt.

QVANDO particula minor cū vno gradu repetita incidit in gradū aliquē præciſè, auferendi erūt ex gradibus percurſis tot gradus, quoties particula illa cum vno gradu repetita fuit. Reliquus n. numerus erit Numerator fractionis: Denominator autem erit, qui pri⁹. Vt ſi particula illa minor cum 1. gradu repetita ſepties incidit

Quo pacto ex quouis gradu particula quotlibet Minutorum abſcindatur.

cidit in 10.gradum;demendi erunt 7.gradus repetiti. Atq; ita habebuntur iterũ $\frac{3}{7}$.vnius gradus in data particula.

13 SI viciſſim ex quouis gradu auferre velimus particulam quotlibet minutorum,ita agendum erit. In quadrante ſuperiore BC,accipiatur circino arcus tot graduum, quot minuta deſiderantur; atq;(vt confuſionẽ vitemus)in arcuum interuallo ſemidiametri quadrantis BC, deſcriptum transferatur. Si enim hic arcus in 60. partes ęquales ſecetur,(primũ videlicet in duas:deinde vna harũ iterũ in duas:Tertio vna harũ in tres:ac poſtremo vna harũ in quinq;)continebit vna particula ſexageſima numerũ minutorũ propoſitũ. Verbi gratia,ſi particula quæratur continens 50.min. accipiemus in arcu FG,ad interuallũ ſemidiametri AC,deſcripto arcum FG, arcui CZ.graduũ 50.æqualẽ,eumq; in 60.partes æquales ſecabimus,primũ in duas in puncto K: Deinde arcum FK,iterum in duas in puncto L,tertio arcũ FL,in tres in punctis T,V. Ac tandẽ arcum FV,in quinq;. Vna namque harum 5.particularum comprehendet 50.min.ac proinde ſi transferatur circino in quemlibet gradũ Quadrantis BC,abſciſſa erunt 50.Min.ex eo gradu. Hoc ita demonſtro. Quoniam eſt,vt arcus 60.graduũ ad 1.gradũ, ita arcus CZ,ad FG.graduũ 50.ad ſexageſimam partem eiuſdẽ arcus FG;erit permutando,vt arc⁹ 60.graduũ ad arcum FG graduũ 50;ita 1.gradus ad ſexageſimam particulã arcus FG:& conuertendo,vt arcus FG,graduũ 50. ad arcum graduũ 60,ita particula ſexageſima arcus FG,ad 1.gradum. Cum ergo arcus FG,contineat $\frac{50}{60}$.arc⁹ 60. graduũ,continebit quoq; particula ſexageſima arcus FG,$\frac{50}{60}$. vnius gradus,hoc eſt,50.Min. Quod eſt propoſitũ.

SED hæc res incõmodiſſima eſt in paruis Quadrãtib⁹,præſertim ſi pauca Minuta,vtpote 1.2.vel 3.abſcindenda ſint. Quis n. in Quadrante exiguo arcũ 1.grad⁹,vel 2.vel.3.in 60.particulas diſtribuat? Quam ob rem cũmodius id,quod proponitur,efficiemus hac ratione. Ex eodem quadrante ſuperiore BC,arcus grad.61.transferatur in arcum XY ad interuallũ ſemidiametri AC.deſcriptum,ab X,vſq; ad Y. Atq; hic arc⁹ XY, in 6.partes æquales ſecetur;Primũ ſcilicet in 2. deinde vtraq; ſemiſſis in 3. Deinde prima pars in 10.particulas ęquales diuidatur,ita vt quælibet harũ particularũ ſit $\frac{1}{61}$.arcus XY. Et quoniã vna harũ particularũ eſt ad arcum XY, vt 1.gradus Quadrantis BC,ad arcum 61.graduũ;cum vtrobiq; proportio ſit ſubſexagecupla; erit permutando vna illarũ particularum ad 1.grad.vt arcus XY,ad arcum 60.graduum. Quocirca quemadmodũ arcus XY,arcum grad.60.cõtinet ſemel,& inſuper vnam eius partem ſexageſimam,id eſt,1.grad.ex cõſtructione;Ita quoq; vna illarum particularũ cõprehendet 1.gradũ ſemel,& inſuper vnam partẽ ſexageſimã vni⁹ grad⁹,hoc eſt.1.Minutũ. Ex quo fit,vt duæ particulæ complectantur 2.grad.Min.2. At vero 3.particulæ contineant 3.grad.& 3. Min.& ſic deinceps.

ITAQVE ſi in Quadrantẽ BC,transferatur vna particula ſexageſima arcus XY.à puncto C,vel à quouis gradu,habebitur 1.Min.in 2.gradu,vel quouis alio. Et ſi duæ particulæ transferantur, habebuntur in tertio gradu duo Minuta:tria autem Min.in 4.gradu,ſi tres particulæ transferantur,& ſic de cæteris.

PARI ratione,ſi quis deſideret quotlibet gradus,ac Minuta,inquirenda prius erit particula Minutorũ, quę deſiderãtur, eaq; ad gradus propoſitos adijciẽda. Quod ſi particula minutorũ inuẽtorũ tã exigua fuerit,vt circino vix accipi poſſit,accipienda ea erit vna cum 1.gradu:& hic arcus ex 1. gradu & particula conflatus adijciendus ad numerum graduum propoſitum minus vno. Vt ſi velit quis grad.89. Min.59. Inuenienda prius erunt 59. Minuta,quod fiet,ſi 59.particulæ arcus,XY,in Quadrantem BC,transferantur. Nam particula in 60, gradu cõplectetur 59..Min.vt dictum eſt. Si igitur arcus ex illa particula,& 1.gradu conflatus adijciatur ad arcum 88.grad. conficietur arcus grad.89..Min.59. Eademq; ratio eſt de cæteris. Accipientur autem in arcu XY, particulæ 59. ſi vnus pes circini in puncto 50. ſtatuatur, & alter in nona particula primæ partis ſextæ totius arcus XY, verſus X. Ita accipientur quoque particulæ 49.48.39 34.&c.vt perſpicuum eſt.

IAM vero ſi Minuta non in Quadrante BC,ſed in maiori,minoriue accipienda ſint, inquirenda ea erũt in Quadrante BC, beneficio arcus XY,vt docuimus; Deinde arcui inter C,& finem particulæ inuentæ auferendus ex Quadrante propoſito arcus ſimilis,quod fiet,ſi ille Quadrans ex centro A, deſcribatur, rectaque ex A,per finem particulæ in BC,inuentæ educatur,&c.

Quo pacto reperiatur fractio cuiuſque particulæ in parte qualibet lineæ rectæ in partes æquales diuiſæ.

14 QVAE Num.10.11.12.& 13.pręcedentib⁹,dixim⁹, perbelle etiã quadrant in lineas rectas. Nam eadẽ ratione cognoſcem⁹.ſi linea recta in quotuis partes ęquales ſecetur,quantam fractionẽ quælibet particula vnius partis contineat: Et viciſſim quo pacto ex vna parte abſcindenda ſit quæcunq; fractio propoſita. Quę res incredibile eſt,quantam vtilitatem cum alijs rebus Geometricis;tum verò maxime Dimenſionibus, quæ per ſcalam altimetrã fieri ſolẽt,afferat,vt lib.3.cum de Quadrato Geometrico,vbi ſcalę altimetræ vſus apparebit,perſpicuũ erit. Sit enim recta linea AB,vt ad pedem Quadrantis ſuperioris vides,ſecta in 10.partes æquales, (In tot n. partes libet tam vmbram rectam,quam verſam ſcalæ altimetræ diſtribuere:quamuis ab alijs vtraq; in 12. diuidatur: quod per illam diuiſionẽ facilius Dimenſiones perficiantur, vt ſuo loco patebit. Magis tamen probarem, ſi vtrumq; vmbræ latus in 100.partes ſecaretur,ſi id magnitudo inſtrumenti cõmode permittit)propoſitumq; ſit, quot partes decimas cõtineat particula DC,partis quintę,beneficio circini ſumpta particula DC,decupletur ab A,vſq; ad E. Et qnoniã in AE,cõtinẽtur ſex partes totius lineæ AB,continebit propterea particula DC.$\frac{6}{10}$.vnius partis decimæ,hoc eſt,$\frac{6}{100}$.totius lineæ. Ita vt ſi recta AB.diuiſa cogitetur in 100.partes,tribuendo ſingulis decimis partib⁹ denas particulas,ſegmentũ AC,cõprehendat $\frac{46}{100}$. Quia vero vltra $\frac{6}{10}$. ſupereſt adhuc particula FE, vnius decimæ,ſi ea rurſum decupletur ab A,vſq; ad G,reperientur in AG,octo partes totius lineæ AB, Continet ergo particula FE,$\frac{8}{10}$.vnius decimæ,hoc eſt propoſita particula DC,vltra $\frac{6}{10}$.vnius partis rectæ AB, continet inſuper $\frac{8}{10}$ vnius decimæ,(vnius inquam decimæ ex illis $\frac{6}{10}$.quas in particula DC, diximus comprehendi) nimirum $\frac{8}{100}$.vnius partis,ſi ſingulæ partes decimæ rectæ AB,diuiſæ eſſent in 100. particulas;atq; adeo, ſi recta AB,ſecta intelligatur in 1000.partes,tribuendo ſingulis decimis partibus centenas particulas, ſegmentum AC, complectetur $\frac{468}{1000}$.quippe cum in AD,contineantur $\frac{400}{1000}$. Et in DC,$\frac{68}{100}$.vnius partis rectæ AB, ſiue $\frac{68}{1000}$ totius lineæ AB;cum quælibet centeſima particula vnius partis decimæ ſit $\frac{1}{1000}$. Atque in hunc modum progredi licebit ad decimas vnius decimæ ex illis $\frac{6}{10}$.quæ in particula DC,continentur,nimirum ad fractionem à 10000. denominatam,&c.ſed ſatis mihi videtur ad partes milleſimas peruenire.

DEMONSTRATIO hic eadem eſt,quæ in gradibus,ac Minutis. Eandem enim proportionem habet recta 10.partium ad 1.partem,quam recta AE.ad particulã DC,cum vtrobiq; proportio ſit decupla, ideoq; permutando erit vt recta 10.partium ad rectam AE,ita 1.pars ad particulam DC. Quamobrem ſicut in AE,cõtinentur $\frac{6}{10}$.rectæ AB,decem partium,& inſuper particula FE, reſpectu vnius partis lineæ AB,decem partium, ita quo-

ita quoque in particula data DC, continebuntur $\frac{6}{10}$. vnius partis, & inſuper talis particula reſpectu vnius decimæ qualis eſt FE, reſpectu vnius partis lineæ AB, decem partium, &c.

ITAQVE, vt vides, duab. operationib. ad milleſimas partes peruenitur, ac ſi latus totum AB, in 100. partes ſectum eſſet, quod conſideratione dignum eſt. Et duo quidem Numeratores decimarũ eo ordine poſiti, quo inuẽti ſunt, dant Numeratorẽ centeſimarũ: cui ſi præponatur ad ſiniſtrã numer⁹ integrarũ partiũ ante datam particulã exiſtentiũ, conflabitur Numerator milleſimarũ. Vt in ſuperiori exemplo, quia ante datã particulam DC, reperiuntur 4. partes, inuẽtæq; ſunt $\frac{6}{10}$. & $\frac{8}{10}$. erit tota fractio $\frac{468}{1000}$. Sic ſi inuentæ eſſent pro aliqua particula in octaua parte, $\frac{7}{10}$. $\frac{0}{10}$. conſtitueretur fractio $\frac{870}{1000}$. Item ſi in tertia parte inuentæ eſſent $\frac{0}{10}$. $\frac{7}{10}$. fieret fractio $\frac{307}{1000}$. & ſic de cæteris. Quod ſi recta AB, id eſt, latus vtrinſq; vmbræ diuideretur in 100 partes, reperirentur partes milleſimæ vnica operatione; ſi nimirum particula data in vna centeſima decuplaretur: quia tunc intelligerentur ſingulæ centeſimæ in denas particulas ſubdiuiſæ. Sed quia particula data in centeſima aliqua parte perparua eſt, vt vix circino capi poſſit, accipiemus eam cum vna centeſima, vel duabus, & ex decuplo abijciemus 10. vel 20. centeſimas, vt reliquæ cẽteſimæ exhibeant decimas vni⁹ centeſimæ. Eadẽ ratione, quãdo data particula in linea 10. partium eſt perpuſilla, accipienda erit reliqua particula maior decies. Nam reliqua pars rectæ AB, aB, vſq; ad finẽ illi⁹ particulę decuplę dabit numerũ decimarũ in ꝓpoſita minore particula, &c. Hac ratione, ſi particulã CH, decuples, incides in pũctũ K. Ergo ſegmẽtũ BK, dabit; $\frac{6}{10}$. & inſuper particulã DK, vt ſupra; cũ DK, particulę FE, ſit ęqualis. Ratio hui⁹ rei eſt, ꝙ ambæ particulę DC, CH, decuplatę cõficere debeãt totã, AB. vt cõſtat.

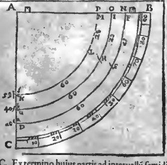
AD Maiorẽ quoq; commoditatem pro inueſtigandis partib⁹ decimis, hoc eſt, pro decuplanda particula propoſita, conſtrui poterit circinus duplicis aperturæ, in quo ſcilicet crura producta ſe mutuo interſecent, atq; vna apertura alterius ſit ſemper decupla, inſtar circini, quo linea duas in partes ęquales diuidi ſolet. Ita enim fiet, vt accepta per minorem aperturam particula abſciſſa, particula maior exhibeat eam particulam decies ſumptã, vt non opus ſit toties circinum circumducere: qua quidem in re facile error committi poteſt, qui illo circino, ſi recte fabricatus ſit, facilius vitatur. Sed ſine hoc circino idem fieri poteſt per inſtrumentum partiũ, quod capite præcedenti conſtruximus. Nam ſi particula data circino capiatur, & ſumma diligentia ei ſumatur in inſtrumento, interuallum inter 10. & 10. æquale, erit interuallum inter 100 & 100. datæ particulæ decuplum.

15 IAM vero ſi viciſſim ex qualibet parte rectæ AB, auferendæ ſint quotcunq; decimæ partes vni⁹, diuidendũ erit ſegmentũ cõtinens numerũ partiũ decimarũ in 10. partes æquales. Nã vna pars decima hui⁹ ſegmẽti continebit decimas partes q̃ſitas. Vt ſi cupiat quis $\frac{7}{10}$. diuidendum erit ſegmentum rectæ AB, includens 7. partes, in 10. particulas: Quęlibet namq; harum comprehendet $\frac{7}{100}$. vnius partis rectæ AB. Eademq; ratio eſt de cæteris. Sed commodius hunc vſum nobis præſtabit inſtrumentum partium ſupra conſtructum. Eius enim beneficio ex quauis recta abſcindemus non ſolum quotcunque decimas, ſed etiam centeſimas, nonageſimas nonas, nonageſimas octauas, & ſic deinceps, vſque ad centeſimam partem. Nam ſi velimus $\frac{3}{100}$. alicuius lineæ, capiem⁹ ei lineæ interuallum inter 100 & 100. æquale. Circinus namq; extenſus inter 3. & 3. dabit $\frac{3}{100}$. quæſitas. Ita quoq; circini pedes inter 50 & 50. dabunt $\frac{50}{100}$. id eſt, $\frac{1}{2}$. Rurſus pedes circini inter 20. & 20. dabunt $\frac{20}{100}$. hoc eſt, $\frac{1}{5}$. & ſic de cæteris, vt fuſius in vſu prædicti inſtrumenti partium cap. 1. expoſuimus.

De nominatio facilis fractionum milleſimarum.

Quo modo ex data linea auferenda ſint quotcunq; partes decimæ vel aliæ partes.

16 QVIA vero alios alijs inſtrumentis delectari ſcio, addam hoc loco duo alia inſtrumenta ab eodem illuſtri D. Iacobo Curtio mecum communicata, quæ ad vſus Geometricos & Aſtronomicos perquam ſunt vtilia. Primum eſt eiuſmodi: ſit quadrans BC, diuiſus in 90. gradus, quorum initium progrediatur à C, verſus B, & pinnacidia, in latere AB, collocentur. Nos eum ob ſpatij anguſtiam in quinos gradus partiti ſumus. Intra hunc ex eodem centro A, deſcribantur alij 59. quadrantes, qui diuidantur in gradus hoc modo. In primo, qui proximus eſt quadranti BC. in grad. 90. diuiſo, arcus continẽs grad. 61. ſecetur in partes 60. æquales, vel arc⁹ graduũ 30$\frac{1}{2}$. nimirũ ſemiſſis ipſius, in partes 30. æquales, quarũ quælibet cõtinebit grad. 1. Min. 1. hoc eſt, Minuta 60.



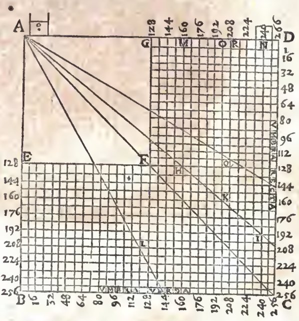
c Nam eadem proportio eſt partium 60. in quas arcus graduum 61. diuiſus eſt, ad gradus, 61. hoc eſt. ad Minuta 3660. quæ partis 1. ad Min. 61. Idem enim numerus producitur ex 60. primo numero, in 61, quartum numerũ, (producitur autem numerus minutorum 3660.) qui ex 1. tertio numero in 3660. ſecũdum numerum producitur. Aut eandem ob cauſam, eadem eſt proportio partium 30. in quas arcus graduum 30$\frac{1}{2}$. diuiſus eſt, ad grad. 30.$\frac{1}{2}$. hoc eſt, ad Minuta 1830. quæ partis 1. ad Min. 61. Hæc autem diuiſio, vt confuſio punctorum in primo illo quadrante vitetur, facienda eſt ſeorſum in quadrante alio, qui illi æqualis eſt. Deinde vna pars continens Min. 61. transferatur beneficio circini in primum quadrantem prædictum, initio facto à ſemidiametro AC. Ex termino huius partis ad interuallũ ſemidiametri propriæ abſcindatur arcus grad. 60. quo diuiſo in 60. gradus, continebit reliquus arcus vſq; ad ſemidiametrum AB. grad. 28. Min. 59. ac proinde in eum transferendi ſunt grad. 28. ita vt ſuperſit particula Minutorum 59. *c 19. ſept.*

IN ſecundo quadrante arcus graduum 62. in 60. partes, vel arcus graduum 31. in 30. partes ęquales ſecetur, vt quælibet contineat grad. 1. Min. 2.

IN tertio arcus graduũ 63. in 60 partes, vel arc⁹ graduũ 31$\frac{1}{2}$. in partes 30. æquales diuidatur. In quarto idẽ fiat de arcu graduũ 64. vel 32. & ſic deinceps. Reliqua aũt perficiãtur, vt de primo quadrãte dixim⁹. Quod vt plani⁹ fiat, ponam⁹ exẽplũ in quadrãte 20. 40. & 59. ſiue vltimo & intimo. Itaq; in quadrãte vigeſimo eN, ſit arc⁹ eD, pars ſexageſima arcus graduum 80. (nimirum tot graduum vltra 60. quotum locum ipſe quadrans occupat,) ita vt complectatur grad. 1. Min. 20. d, cum ſit, vt 60. arcus graduum 80. ad grad. 80. hoc eſt, ad min. 4800. ita 1. pars ad grad. 1. Min. 20, hoc eſt, ad Min. 80. Vel certe arcus eD, ſit pars trigeſima arcus graduum 40. Ita enim rur- *d 19. ſept.*

ſus

ſubdiuiſa adhuc in 8. particulas. Ordo ſiue numerus partium progreditur ab A, verſus B, & D, & à B, & D, verſus C, vt in figura apparet. Puncta porro diuiſionum reſpondentia iungantur rectis lineis, quæ omnes quadrati lateribus[a] parallelæ erunt: Hæ tamen non omnes ad oppoſita vſque latera producãtur, ſed relinquant quadra- a 33. primi.
tum vacuum AEFG, quod totius quadrati quarta pars ſit. Ita enim fiet, vt quomodocunque filum perpendiculi, vel linea fiduciæ ex A, egrediens cadat quaſi ſemper in partem aliquam integram dictarum parallelarum, hoc eſt, tranſeat præciſe per aliquem angulorum rectorum, qui ab interſectionibus illarum parallelarum efficiuntur, propter earum partium, angulorumve multitudinem. Relictum eſt autem quadratum AEFG, vacuum, propterea quod omnes partes in eo contentæ, ſi productæ eſſent lineæ, habent alias partes duplas, aut quadruplas, aut octuplas, &c. adeo vt filum perpendiculi in aliquam earum cadens cadat quoque neceſſario in aliquam aliam illius duplam, vel quadruplam, octuplamue, &c. vt neceſſe non ſit particulas illas in quadrato AEFG, exprimere. Verbi gratia. Si accipiatur in latere AD, portio continens 40. partes, & filum perpendiculi AH, abſcindat ex parallela à parte 40. lateris AD, ad partem 40. lateris BC, ducta partes 32. abſcindet idem filum ex parallela à parte 160. lateris AD, ad partem 160. lateris BC, ducta partes 128. in H, quæ quadruplæ ſunt partium 32. quemadmodum & partes 160. quadruplæ ſunt partium 40. Sic quoque idem filum AH, ex parallela à parte 240.



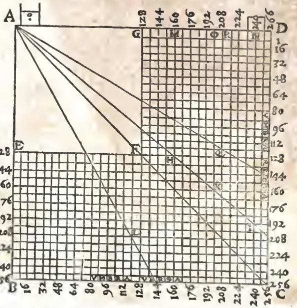
lateris AD, ad partem 240. lateris BC, ducta auferet partes 192. in I, quæ partium 32. ſextuplæ ſunt, quemadmodum & partes 240. in latere AD, partium 40. in eodem latere ſextuplæ ſunt. Denique idem filum ex parallela à parte 200. lateris AD, ad partem 200. lateris BC, ducta abſcindet partes 160. quæ quintuplæ ſunt partium 32. ſicut & partes 200. lateris AD, partium 40. eiuſdem lateris quintuplæ ſunt. Eademque ratio eſt de cæteris. Ratio huius rei eſt, quod parallela à parte 40. lateris AD, ad filum AH, ducta conſtituit cum filo triangulum ſimile triangulo, quod cum eodem filo conſtituit parallela quæ v. g. à parte 160. lateris AD, demittitur, &c. Poteſt ergo quadratum AEFG, excindi, vt inſtrumentum minus reddatur ponderoſum.

HÆC eſt quadrati conſtructio non ſolum, vt vides, facillima, ſed cuius etiam vſus immenſus eſt tam in rebus Aſtronomicis, quam in Geometricis, vt ex iis, quæ ſequuntur, liquido conſtabit. Exordiemur autem à rebus Aſtronomicis. Obſeruaturus ergo quiſpiam altitudinem alicuius ſtellæ notet diligenter, in quam partem linearum parallelarum præciſe filum perpendiculi cadat. Ex hac enim altitudo ſtellæ, hoc eſt, magnitudo anguli quam filum cum latere AB, facit, eruenda eſt. hoc modo. Ceciderit filum in punctum H, parallelæ à parte 160. lateris AD, nempe ex M ad partem 160. lateris BC, ductæ, & parallelæ à parte 128. lateris AB, ad partem 128. lateris CD, ductæ. Quoniam igitur in triangulo rectilineo rectangulo AMH, duo latera circa rectum angulum nota ſunt, nempe AM, partium 160. & MH, partium 128. quos numeros iuxta parallelas per H, traiectas ſcriptos eſſe vides; notus fiet, ex praxi 5. noſtrorum triang. rectil. angulus HAM, complementi altitudinis, hac ratione. Fiat, vt 160. latus AM, circa angulum rectum M, ad 10000000. ſinum totũ. (Accuratior enim calculus in hoc negotio euadet, ſi ex ſinubus, & tangentibus non abiiciantur duæ figuræ, vt facere ſolemus, cum ſolis ſinubus vtimur) ita 128. latus MH, angulo quæſito HAM, oppoſitum ad aliud, inuenieturque Tangens 8000000. anguli HAM, quæſiti, cui in tangentium tabula reſpondet arcus grad. 38. Min. 40. pro complemento altitudinis ſtellæ. Eandem Tangentem reperies ex lateribus AO, partium 200. & OK, partium 160. Item ex lateribus AN, partiũ

Vſus quadrati cõſtructi in rebus Aſtronomicis.

 240. &

240. & NI, partium 192. vt patet: ita vt, quando filum in plures partes plurium parallelarum præciſe cadit, vt hic contingit in punctis H, K. I, aſſumi poſſit quæcunque illarum, ſine vllo diſcrimine. Per ſolos ſinus ex eadem praxi 5. noſtrorum triang. rectil. idem prædictus angulus HAM, elici poteſt, ſed non tam facile. Nam ſi quadrata laterum AM, & MH, hoc eſt, quadrata partium 160. & 128. ſimul addantur, & ſummæ 41984. radix quadrata eruatur, dabit hæc radix latus AH, recto angulo M, oppoſitum partium 204[illegible]. fere. Quare ſi fiat, vt 204[illegible]. latus AH, recto angulo oppoſitum ad 100000. ſinum totum, ita 128. latus MH, quæſito angulo oppoſitum ad aliud, inuenietur ſinus anguli HAM, quæſiti 62470. cui in tabula ſinuum reſpondent iterum grad. 38. Min. 40. Ponamus rurſus filum perpendiculi cecidiſſe in partem 208. parallelæ à parte 120. lateris AD, ad partem 120. lateris BC, ductæ, nimirum in punctum L: quem numerum 120. in latere BC, ſolum inuenies, cum minor ſit, quam 128. atque adeo in latere AD, non reperiatur. Sic etiam numerus minor, quam 128. in ſolo latere CD, quærendus eſt, vt ex figura patet. Si igitur rurſum fiat, vt 120. latus circa angulum rectum ad 10000000. ſinum totum, ita 208. latus angulo quæſito LAD, oppoſitum ad aliud, producetur tangens quæſiti anguli 17333333. cui reſpondet in tangentium tabula arcus grad 60. Min. 1. Vel ſi fiat, vt 208. latus AP, circa angulum rectum P, ad 10000000. ſinum totum, ita 120. latus LP, angulo LAP, oppoſitum ad aliud. (Quando enim filum in latus BC, cadit, aſſumemus triangulum ad latus AB, applicatum: quemadmodum eodem filo cadente in latus CD, aſſumptum fuit triangulum ad latus AD, applicatum, ſed tunc angulus inuentus LAP, detrahendus non erit à recto, vt reliquus fiat altitudinis angulus, ſed ipſemet altitudinem indicabit) procreabitur tangens 5769231. anguli LAP, cui



tangenti reſpondet in tangentium tabula arcus grad. 29. Min. 59. Tantus ergo tunc eſt altitudinis angulus quæſitus LAP, complementum ſcilicet gr. 60. Min. 1. vt prius. Cadente filo in punctum C, non opus eſt calculo, ſed altitudo ſtellæ comprehendet tunc grad. 45. præciſe, propter angulum ſemirectum CAB.

Qua ratione ſit conſtruenda tabula pro quadrato prædicto.

HAC via ſupputari poterit. (Id quod libenter hic præſtitiſſem, ſi per tempus licuiſſet) tabula continens gradus & Minuta ſingulis particulis parallelarum reſpondentia, quemadmodum præcedens tabula à nobis ſupputata eſt pro ſingulis particulis quadrantum intra quadrantem principalem deſcriptorum. Satis autem erit tabulam ſupputare pro particulis parallelarum à latere AB, BC, ductarum in trapezio CBEF, comprehenſis. Iidem namque prorſus arcus reſpondebunt particulis trapezii CDGF, vt perſpicuum eſt, cum eadem omnino triangula fiant ad latus AD, quæ ad latus AB, conſtituuntur. Verum tunc, cum deprehenſum fuerit, filum cecidiſſe in latus CD, ſumendum erit complementum anguli in tabula inuenti pro altitudine quæſita: Id quod patuit in angulo HAM, cuius complementum HAB, angulus fuit altitudinis quæſitæ. Eſſe autem triangula ad latus AD, applicata triangulis ad latus AB, applicatis omnino æqualia, manifeſtum eſt in triangulis AQR, ALP, in quorum primo filum perpendiculi tranſit per partem 120. parallelæ à parte 208. lateris AD, ad partem 208. lateris BC, nempe à puncto R, ductæ; in ſecundo vero filum perpendiculi ducitur per partem 120. parallelæ à parte 208. lateris AB. h. e. à puncto P, ad partem 208. lateris CD, ductæ. Quoniã n. latera AR, RQ. partium 208. 120. æqualia ſunt lateribus AP, PL. partium 208. 120. anguloſq; continent rectos, [a] erunt triangula ipſa æqualia, & anguli QAR, LAP, æquales. Quare cadente filo in parte 120. parallelæ ex parte 208. lateris AD, ductæ ſi in tabula conſtructa erutus fuerit per partem 120. parallelę 208. angulus gr. 29. Mi. 59. dabit eius complementũ gr. 60. Mi. 1. angulũ QAB, altitudinis quæſitæ. Eademq; ratio eſt de cæteris. In tabula porro (vt hoc etiam ſtudioſum moneamus) numerus parallelarum, incipiendo in noſtro exemplo à 128. progrediendoq; vſq; ad 256. ponatur in vertice tabulæ, numerus vero partiũ cuiuſq; parallelæ ab 1 vſq; ad 256. in ſiniſtro latere eiuſdem tabulæ, in angulis deniq; communibus ſcribantur gradus & Minuta.

a 4 primi.

IAM

IAM vero in ſcala altimetra (vt vſum quoque dicti quadrati in rebus Geometricis explicemus) dici non poteſt, quam præſtantem vſum habeat idem quadratum hactenus conſtructum: vbi latus CD, vmbræ rectæ & BC, vmbræ verſæ deputabitur, & omnis operatio vel per ſolam vmbram rectam, (quod periucundum eſt, & huius inſtrumenti proprium) vel per ſolam verſam ſine alterius ad alteram reductione, & ſine v. la fractionum moleſtia fieri commodiſſime poterit. Solum gnomon hic non eſt idem ſemper, ſed alius atque alius. Exempli gratia. Filo perpendiculi AQ. abſcindente in Q. partem 120. vmbræ rectæ RQ, erit gnomon AR, partium 208. Quod ſi idem punctum Q. ponatur pertinere ad partem 208. vmbræ verſæ, erit gnomon partium 120. Et quoniam, vt in quadrato Geometrico demonſtrabimus, eſt vt vmbra recta ad gnomonem, ita diſtantia oculi à re, cuius altitudinem menſuramus, ad ipſam altitudinem: Item vt gnomon ad vmbram verſam, ita eadem diſtãtia ad altitudinem; ſi fiat vt vmbra recta 120. ad gnomonem 208. Vel, vt gnomon 120. ad vmbram verſam 208. ita diſtantia dicta ad aliud, reperietur altitudo rei menſurandæ Sic etiam, cadente filo in punctum L, erit vmbra recta partium 208. & gnomon partium 120. Vmbra autem verſa erit partium 120. & gnomon partium 208. atque ita de reliquis. *Vſus eiuſdem quadrati in rebus Geometricis.*

PROBLEMATA VARIA
Triangulorum rectilineorum.

CAPVT III.

TERTIO loco præmiſſuros nos polliciti ſumus varia problemata triangulorum rectilineorum, vt & latera eorum, atque anguli ex quibuſdam datis, & cognitis prompte, atque expedite, cum id res poſtulauerit, poſſint erui: quod hoc tertio capite exequemur. Priori autem loco de triangulis rectangulis: poſteriori vero de obliquangulis agemus. In margine porro adſcripſimus propoſitiones noſtri tractatus triangulorum rectilineorum, in Theodoſio noſtro editi, in quibus problemata hæc demonſtrantur, vt ſtudioſi intelligant, vnde eorum demonſtrationes, quando libuerit, petere debeant.

TRIANGVLORVM RECTILINEORVM
Rectangulorum problemata.

I. PROPORTIONES LATERVM

Ex datis omnibus angulis cuiuſuis trianguli patefacere.

Singulis lateribus adſcribantur ſinus angulorum oppoſitorum. Latera enim eaſdem proportiones habent, quæ inter ſinus angulorum lateribus oppoſitorum reperiuntur. *1. Triang. rectil.*

II. LATVS

Ex baſe, & alterutro angulorum acutorum, ac proinde & altero, notum efficere.

Vt ſinus totus.	*ad baſem*	*Ita ſinus anguli lateri quæſito oppoſiti*	*ad latus quæſitum in partibus baſis.*	*2. Triang. rectil*

III. LATVS

Ex baſe, & altero latere cognoſcere.

Vt baſis	*ad ſinum totum.*	*Ita datum latus.*	*ad ſinum anguli dato lateri oppoſiti.*	*3. Triang. rectil.*

Deinde, ſumpto complemento anguli inuenti pro reliquo angulo.

Vt ſinus totus	*ad baſem*	*Ita ſinus anguli, qui lateri quæſito opponitur,*	*Ad latus quæſitum in partibus baſis, & alterius lateris.*

IV. LATVS

Ex altero latere, & alterutro angulo acuto, ac proinde & altero, eruere.

Vt ſinus totus	*ad latus datum*	*Ita tangens anguli quæſito lateri oppoſiti*	*Ad latus quæſitum in partibus dati lateris.*	*2. Triang. rectil.*

Vel

Vt ſinus anguli dato lateri oppoſiti.	*ad latus datum,*	*Ita ſinus alterius anguli.*	*ad latus quæſitum in partibus dati lateris.*	*2. Triang. rectil.*

V. BASEM

Ex vno latere, & vno angulo acuto, ac proinde & altero, inueſtigare.

Vt ſinus totus	*ad latus datum.*	*Ita ſecans anguli dato lateri adiacentis*	*Ad baſem in partibus lateris dati.*	*2. Triang. rectil.*

Vel

Vt ſinus anguli dato lateri oppoſiti.	*ad ſinum totum*	*Ita latus datum*	*Ad baſem in partibus lateris dati.*	*2. Triang. rectil.*

 VI. BA-

VI. BASEM

Ex vtroque latere perſcrutari, vna cum angulis acutis.

3. Triang. rectil.	*Vt latus alterutrum datum*	*ad ſinum totum:*	*Ita alterum latus datum*	*ad tangentem anguli huic alteri lateri oppoſiti.*

Deinde, ſumpto complemento anguli inuenti pro reliquo angulo.

	Vt ſinus totus	*ad latus alterutrum datum:*	*ita ſecans anguli accepto lateri adiacentis*	*ad baſem in partibus lateris dati.*

VII. ANGVLVM

Ex baſe, & vno latere inquirere.

1. Triang. rectil.	*Vt baſis*	*ad ſinum totum*	*ita latus datum*	*ad ſinum anguli dato lateri oppoſiti.*

Complementum anguli inuenti dabit alterum angulum.

VIII. ANGVLVM

Ex vtroque latere reddere cognitum.

3. Triang. rectil.	*Vt latus alterutrum*	*ad ſinum totum:*	*ita alterum latus datum*	*ad tangentem anguli huic alteri lateri oppoſiti*

Complementum anguli inuenti dabit alterum angulum.

TRIANGVLORVM RECTILINEORVM obliquangulorum Problemata.

IX. SEGMENTA LATERIS à Perpendiculari facta.

Ex datis tribus lateribus cognoſcere.

9. Triang. rectil.	*Vt latus, in quod cadit perpendicularis*	*ad ſummam alterum duorum laterum:*	*ita differentia eorundem duorum laterum*	*ad quartum quendam numerum.*

ET ſi quidem quartus numerus inuentus minor fuerit latere, in quod cadit perpendicularis, auferendus is erit ex illo latere. Semiſſis enim reliqui numeri dabit minus ſegmentum, quod ex toto latere ſubductum relinquet ſegmentum maius.

SI vero quartus numerus inuentus maior fuerit latere, in quod cadit perpendicularis, auferendum erit hoc latus ex illo numero. Semiſſis enim reliqui numeri dabit ſegmentum minus, exterius videlicet inter perpendicularem, & angulum obtuſum: quod additum eidem lateri conflabit aliud ſegmentum maius inter perpendicularem, & angulum acutum.

X. LATERA DVO

EX tertio latere, & duobus quibuſuis angulis, ac proinde omnibus tribus, cum tertius ſit aliorum complementum ad ſemicirculum, hoc eſt, ad grad. 180. inuenire.

10. Triang. rectil.	*1. Vt ſinus anguli dato lateri oppoſiti*	*ad latus datum:*	*ita ſinus alterutrius reliquorum angulorum*	*ad latus huic angulo oppoſitum.*

Ruſus

2. Triang. rectil.	*Vt ſinus anguli dato lateri oppoſiti*	*ad latus datum:*	*ita ſinus tertij anguli*	*ad latus huic tertio angulo oppoſitum.*

2 IN Iſoſcele vnius tantum lateris inuentione opus eſt, cum vnum datum ſit cum angulis. In æquilatero vero triangulo, ſi vnum latus datum ſit, erunt & reliqua illi æqualia, data.

XI. LATVS

EX duobus reliquis lateribus, & duobus quibuſuis angulis, ac proinde omnibus tribus, cum tertius ſit aliorum complementum ad ſemicirculum, id eſt, ad grad. 180. addiſcere.

10. Triang. rectil.	*Vt ſinus anguli alterutri lateri dato oppoſiti*	*ad latus oppoſitum datum:*	*ita ſinus anguli quæſito lateri oppoſiti*	*ad latus quæſitum.*

XII. LATVS

EX duobus lateribus, & angulo ab ipſis comprehenſo colligere.

Problema 17. triang. ſphæric.	*1. Vt ſinus totus*	*ad ſecantem complementi arcus, qui ſemiſſi aggregati datorum laterum ad ſinus reuocatorum, vt ſinus, debetur:*	*Ita differentia inter eam ſemiſſem, & alterutrum datorum laterum ad ſinus reuocatorum*	*ad quartum quendam numerum.*

Latera data ad ſinus reuocabuntur, ſi vtrumque multiplicetur per 10. vel 100. vel 1000. &c. ita vt maioris lateris numerus habeat tot figuras, quot continentur in maioribus ſinubus tabulæ ſinuum, nimirum 5. ſi ſinus totus ſtatuatur 100000. vel 7. ſi ſinus totus ponatur 10000000.

Deinde

Google

Deinde.

Vt ſinus totus.	*ad tangentem ſemiſsis arcus qui detracto dato angulo ex ſemicirculo relinquitur:*	*ita quartus numerus inuentus*	*ad tangentem differentiæ inter ſemiſſem eiuſdem arcus, & alterutrum angulorum non datorum.*

Hæc autem tangens hoc etiam modo inuenietur, qui priori præferendus videtur.

2 *Vt ſemiſſis aggregati duorum laterum datorum.*	*ad tangentem ſemiſsis arcus, qui detracto dato angulo ex ſemicirculo relinquitur:*	*ita differentia inter ſemiſſem aggregati duorum datorum laterum, & vtrūlibet laterū*	*ad tangentem differentiæ inter ſemiſſem arcus prædicti, & alterutrum angulorum non datorum.*	*Alio modo qui priori præferendus videtur*

Arcus huius tangentis inuentæ additus ad ſemiſſem eiuſdem arcus (eſt autem hic arcus ſumma duorum angulorum non datorum, nimirum dati anguli complementum ad ſemicirculum, hoc eſt, ad grad. 180.) dabit maiorem angulum non datum, qui videlicet maiori lateri dato opponitur: ex eadem vero ſemiſſe detractus reliquum faciet minorem angulum non datum, qui nimirum lateri minori dato opponitur.

Poſt hæc.

Vt ſinus vtriuslibet anguli inuenti	*ad latus oppoſitum:*	*ita angulus datus*	*ad latus oppoſitum quod quæritur.*	*1. triang. rectil.*

Itaque antequam tertium latus inueniatur, diſquirendi prius ſunt reliqui duo anguli: qui commodius videntur poſteriori via Num. 2. expoſita indagari, quam priori illa ratione Num 1. explicata.

3. Si duo latera ſint æqualia;[a] erunt reliqui duo anguli æquales. Semiſſis ergo arcus, qui detracto angulo dato ex ſemicirculo relinquitur, dabit vtrumque, &c. *a 5. primi.*

XIII. LATVS.

EX duobus lateribus; & angulo vni eorum oppoſito (ſi modo conſtet ſpecies anguli alteri lateri dato oppoſiti, quando datus angulus acutus eſt) exquirere.

1 *Vt latus datum dato angulo oppoſitum*	*ad ſinum anguli dati:*	*ita alterum latus datum,*	*ad ſinum anguli huic alteri lateri oppoſiti.*	*13. triang. rectil.*

Hic ſinus inuentus dabit angulum alteri dato lateri oppoſitum, ſi acutus fuerit: (erit autem ſemper acutus, quando datus angulus eſt obtuſus) ſi vero fuerit obtuſus, arcus ſinus inuenti ex ſemicirculo demptus, reliquum faciet eum angulum. Propterea quando datus angulus eſt acutus, oportet dari huius alterius ſpeciem, vt ſciamus, num acutus ſit, vel obtuſus. Summa autem horum angulorum ex ſemicirculo ſubtracta relinquet tertium angulum quæſito lateri oppoſitum. Ergo

Vt ſinus dati anguli.	*ad datum latus ei oppoſitum;*	*ita ſinus tertij anguli inuenti quæſito lateri oppoſiti*	*ad latus quæſitum.*	*1. triang. rectil.*

2. SI duo latera data ſint æqualia:[b] erit angulus alteri dato lateri oppoſitus, dato angulo æqualis. *b 5. primi.*

XIV. ANGVLOS DVOS.

EX duobus lateribus, & angulo ab ipſis comprehenſo, reperire.

Inuenientur ex ijs, quæ data ſunt, duo anguli, vt in priori parte problematis 12. dictum eſt: ſi nimirum inquiratur tangens differentiæ inter ſemiſſem arcus, qui detracto angulo dato ex ſemicirculo relinquitur, & alterutrum angulorum, qui quæruntur, &c. quæ quidem tangens duobus modis inuenta eſt in priori parte problematis 12. in quo latus proponitur inueſtigandum ex duobus lateribus, & angulo ab ipſis comprehenſo. Quod vt fieret, inuenti prius fuerunt alij duo anguli, qui in hoc problemate 14. quæruntur.

XV. ANGVLOS DVOS

EX duobus lateribus, & angulo vni eorum oppoſito (ſi modo conſtet ſpecies anguli alteri lateri dato oppoſiti, quando datus angulus acutus eſt) expiſcari.

Hic etiam adhibenda eſt prior operatio problematis 13. in quo latus opponitur inquirendum ex ijſdem datis: quod vt fieret, inuenti prius fuere reliqui duo anguli, qui in hoc problemate 15. indagandi proponuntur.

XVI. ANGVLOS OMNES TRES

EX tribus omnibus lateribus perueſtigare.

11. triang. rectil. 1 *Ducta ad maximum latus perpendiculari ex angulo oppoſito 2 (vt nimirum perpendicularis ſemper intra triangulum cadat) inueniantur per problema 9. ſegmenta duo maximi lateris facta à perpendiculari. Deinde.*

1. triangul. rectil.	*Vt minimum latus*	*ad ſinum totum:*	*ita minus ſegmentum maximi lateris*	*ad ſinum complementi anguli medio lateri oppoſiti.*

Rurſus.

1. triangul. rectil.	*Vt medium latus*	*ad ſinum totum:*	*ita maius ſegmentum maximi lateris*	*ad ſinum complementi anguli minimo lateri oppoſiti.*

Inuentis duobus angulis ad maximum latus, qui medio lateri, & minimo opponuntur; ſi eorum ſumma ex ſemicirculo dematur, reliquus fiet tertius angulus lateri maximo oppoſitus.

a Schol 26. lib. 1. Eucl. 2 In Iſoſcele, ducta perpendiculari ad baſem [a], quam bifariam ſecabit,

Vt alterum laterum æqualium	*ad ſinum totum:*	*ita ſemiſsis baſis*	*ad ſinum complementi vnius angulorum æqualium ad baſem.*

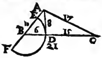
Summa duorum angulorum æqualium inuentorum ex ſemicirculo detracta, reliquum faciet tertium angulum.

3 IN æquilatero triangulo dabuntur anguli, etiamſi latera non dentur, cum quilibet gradus 60. tertiam videl. partem duorum rectorum, vel duas tertias partes vnius recti, complectatur.

XVII. PERPENDICVLAREM IN LATVS QVODCVNQVE ex angulo oppoſito cadentem.

EX tribus omnibus lateribus efficere notam.

Per problema 9. inquirantur ſegmenta lateris facta à perpendiculari. Deinde differentia inter vtrumuis ſegmentum, & latus adiacens ducatur in ſummam eiuſdem ſegmenti, & lateris adiacentis. Radix namque quadrata numeri producti perpendicularem quæſitam indicabit.



In triangulo enim ABC, ſit AB, 10. AC, 17. BC, 21 inueſtigandaq; ſit perpendicularis AD. Per problema 9. reperietur ſegmentum BD, 6. & CD, 15. Differentia inter BD, & AB, eſt 4. quæ ducta in 16. ſummam rectarum BD, & AB, faciet 64. cuius radix quadrata 8. dat perpendicularem AD. Quod quia in noſtro tractatu triangulorum rectilineorum demonſtratum non eſt, demonſtro hoc propoſito theoremate.

Theorema. In triangulo rectangulo rectangulum ſub differentia baſis, & alterutrius lateris circa rectũ angulum & ſub ſumma baſis, & eiuſdem lateris, æquale eſt quadrato alterius lateris circa angulum rectum.

a Coroll. 16 tertij. b 36. tertij. *Nam in triangulo rectangulo ABD, cuius angulus D, rectus, ſi ex B, per D, ſemicirculus deſcribatur EFD, erit AE, differentia inter baſem AB: & latus BD: At AF, ſumma erit baſis AB, & eiuſdem lateris BD, cum BD, BE, BF, recta ſint æquales. Dico igitur rectangulum ſub AE, AF, æquale eſſe quadrato lateris AD. Recta enim AD, cum perpendicularis ſit ad ſemidiametrum BD, [a] ſemicirculum tanget in D. [b] Igitur rectangulum ſub AE, AF, quadrato tangentis AD, æquale erit, quod erat demonſtrandum.*

FINIS LIBRI PRIMI.

GEOMETRIÆ PRACTICÆ

LIBER II.

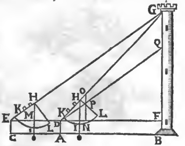
Linearum Rectarum per Quadrantem Aſtronmicum Dimenſionem explicans.

NOMINE linearum rectarum intelligimus diſtantias locorum, ſeu interualla, longitudineſue: altitudines turrium, ædificiorum, arborum, & montium: ac poſtremo profunditates puteorum, vallium, atque foſſarum. Ad harum Dimenſiones varii varia adhibent inſtrumenta, quibuſdam enim placet ſcala altimetra in dorſo Aſtrolabii, ſeu planiſphærii deſcripta. Aliis radius Aſtronomicus Gemmæ Friſii, vel radius dictus Latinus, quod à Domino Latino Vrſino nobili Romano excogitatus ſit; vel baculus Iacob: Aliis Annulus Aſtronomicus, vel Holometrum; Aliis denique alia inſtrumenta arrident. Mihi vero præ cæteris probatur Quadrans Aſtronomicus in 90. gradus diſtributus: & Quadratum Geometricum tum ſtabile, tum pendulum, cuius duo latera in certas quaſdam partes æquales ſint diuiſa. Hoc autem 2. lib. qua ratione per Quadrantem Aſtronomicum Dimenſio linearum rectarum perficiatur, docebimus. Quæ ratio vt intelligatur, in promptu, & ad manum eſſe debent tabulæ ſinuum, Tangentium atque ſecantium in noſtro Theodoſio, & in aliorum auctorum libris deſcriptæ, vnde petendæ erunt. Superuacaneum enim eſſe duximus, eaſdem hic repetere, ne opus in maiorem formam excreſcat.

DISTANTIAM in plano, ſiue acceſſibilis ea ſit, ſiue inacceſſibilis, per duas ſtationes in eodem plano factas per Quadrantem metiri, quando in eius extremo erecta eſt altitudo aliqua perpendicularis, etiamſi infimum eius extremum non cernatur. Atque hinc altitudinem quoque ipſam elicere.

PROBLEMA I.

SIT diſtantia, ſiue longitudo inueſtiganda AB, in plano CB, erectaque ſit in extremo B, altitudo quæpiam perpendicularis BG, licet extremum B, non appareat. Statura menſoris ſit DA, ab oculo ad pedes vſque. Ne autem hæc ſtatura mutetur, ſed eadem ſemper maneat, recte feceris, ſi pro ea ſtatura baculum eidem æqualem accipias, ad cuius extremum oculum applices. Ducta autem cogitatione per D, ipſi CB, parallela EF, fiat prima ſtatio in D, Secunda vero in E, puncto remotiore: ſitque recta DE, quæ differentia ſtationum dicitur, nota ſecundum aliquam menſuram vulgarẽ. Deinde dirigatur latus quadrantis HK, in quo ſunt pinnacidia, verſus faſtigium G, ita vt oculus in D, poſitus per vtriuſq; pinnacidii foramina, faſtigium G, videat, libere pendente perpendiculo HI: diligenterque per ea, quæ cap. 2. lib. 1. Num. 7. & 10. tradita ſunt, notetur in gradibus, ac minutis angulus GDF, quem arcus IL, in Quadrante manifeſtabit, complementum videlicet arcus IK, Cum enim filum perpendiculi HI, ſit ad DF, rectum, erit angulus GDF, complementum anguli DHI, æqualis nimirũ angulo IHL, qui eiuſdẽ anguli DHI, complemẽtũ etiã eſt. Atq; hũc angulũ GDF, angulũ obſeruationis dicem⁹. Eodẽ modo obſeruet̃ in ſecũda ſtatione angul⁹ GEF, p radiũ viſualẽ ab oculo, & per pinnacidia Quadrãtis ad faſtigiũ G, directũ. Sumptis autem EM, DN,



Differentia ſtationum

Angulus obſeruationis.

æqualibus,

producetur tam DG, quam EG, nota in partibus differentiæ ſtationum. Igitur [a] ſi fiat,

Inuentio Hypotenuſarum.

a 10. triangul. rectil.

Vt ſinus totus anguli recti F,	*ad hypotenuſam DG, proxime inuentam*	*Ita ſinus anguli DGF, complementi anguli obſeruationis in propinquiore ſtatione*	*ad DF,*

nota fiet diſtantia DF, cui ſi adiiciatur differentia ſtationum ED, cognita etiam erit longior diſtantia EF, quam inuenies quoque, [b] ſi fiat,

Diſtantia inuentio per ſolos ſinus.

b 10. Trian. rectil.

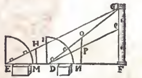
Vt ſinus totus anguli recti F,	*ad hypotenuſam EG, nuper inuentam:*	*Ita ſinus anguli EGF, complementi anguli obſeruationis in remotiore ſtatione*	*ad EF.*

Altitudo autem FG, per ſolos ſinus inuenietur, [c] ſi fiat,

c 10. Triã. rectil.

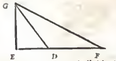
Altitudinis inuentio per ſolos ſinus.

Vt ſinus totus anguli recti F,	*ad hypotenuſam EG, vel ad hypotenuſam DG:*	*Ita ſinus anguli E, obſeruati minoris, vel ita ſinus anguli GDF, obſeruati maioris*	*ad FG, ad FG.*



5 PER Quadrantem ſtabilem eodem modo dimenſio fit: ſolum anguli obſeruationum in duabus ſtationibus hac ratione inueſtigãtur. Collocato quadrante ſupra baſem aliquam planam Horizonti æquidiſtantem, ita vt rectus ſit ad Horizontem, quod beneficio alicuius perpendiculi efficies. Collocato, inquam, hoc modo Quadrante, eleua dioptram, donec per foramina pinnacidiorum faſtigium G, videas. Ita enim in propinquiore ſtatione D, angulus obſeruationis erit GDF; In remotiore vero GEF. Vtrumque autem metietur arcus quadrantis inter rectam EF, & dioptræ lineam fiduciæ. Reliqua omnia fient, ſicut in quadrante pendulo, vt figura demonſtrat. Solum ad alitudinem FG, inuentam adiicienda erit altitudo baſis, cui impoſitus eſt quadrans, non autem ſtatura menſoris, niſi altitudini baſis ſit æqualis.

Problema hoc 1. quo pacto ſine numeris abſoluatur.

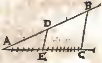


6 IAM vero ſine numeris, id eſt, ſine multiplicatione ac diuiſione numrorũ omnia hæc explorari poterunt (quod iis, qui parum in numeris & vſu ſinuum, tangentium, ac ſecantium exerçitati ſunt, pergratum fore non dubito) hoc modo. In charta aliqua, vel plano conſtruatur figura, illi omnino ſimilis, quam ab oculo, vſque ad altitudinem ſupra concepimus eſſe conſtructam: quod ita fiet. Ex inſtrumento partium cap. 1. ſuperioris libri fabricato, vel (ſi inſtrumentum non adſit) ex aliqua recta in particulas plurimas æquales diuiſa capiantur circino tot particulæ æquales, quot palmi, vel pedes inter duas ſtationes comprehendũtur; transferaturq; interuallum illud circini in rectam quamcunq; ex E, in D: atq; in D, & E, omni adhibita diligentia, anguli obſeruationũ GDF, GEF, primæ & ſecundæ ſtationis fiant: Punctumq; G, in quo rectæ DG, EG, cõueniunt, diligenter notetur (ne in hoc puncto erretur, propter aliquam ſectionem, docebimus in ſequenti lemmate, quo pacto exquiſitiſſime deprehendi poſſit. Niſi enim hoc fiat, menſuræ non inuenientur accurate) ex quo perpendicularis demittatur GF. Figura ita conſtructa, ſi rectæ DF, EF, FG, DG, EG, per circinum tranſportentur in latus 100. partium prædicti inſtrumenti, vel in dictam rectam in plurimas partes æquales diuiſam, illico apparebit, quot particulæ inter pedes circini includantur. Atque tot palmos aut pedes quælibet illarum rectarum complectetur, quot particulæ in earum interuallis deprehenſæ fuerint.

ALITER.

7 IDEM aſſequemur via quadam generali, quæ in omnes dimenſiones quadrat, videlicet. Fiat angulus quicunque BAC. Deinde ſumpta verbi gratia, in exemplum regula trium Num. 1. huius propoſitionis accipiatur primæ quantitati OP, (hoc eſt, differentiæ Tangentium angulorum obſeruatorum) æqualis; vel ſi nimis parua eſt, multiplex AD. (Nos duplam accepimus) Item ſecundæ PN, (hoc eſt, Tangenti minoris anguli) æqualis, vel æque multiplex cum AD, nimirum DB. Poſt hæc ex inſtrumento partium capiantur tot particulæ AE, quot palmi, aut pedes in ED, differentia ſtationum continentur. Ducta autem recta DE, agatur ei parallela BC. Nam quot partes inſtrumẽti partium includet interuallum EC, tot palmos, aut pedes diſtantia DF, complectetur; [d] cum quatuor quantitates AD, DB, AE, EC, proportionales ſint.

Problema hoc 1. qua ratione aliter ſine numeris abſoluatur.



d 4. ſexti.

EODEM modo procedes in alijs exemplis, hoc obſeruato, vt quando ſinus alicuius anguli in regula trium reperitur, accipias ex tabula ſinuũ ſinum, abiectis quinq; figuris, vt ſinus totus ſit 100. v. g In vltimo exemplo Num. 4. recta AD, ſumenda eſſet æqualis 100. particulis inſtrumenti partiũ, nimirũ ſinui toti. At DB, æqualis hypotenuſæ EG, vel DG, in figura Nũ. 6. Et AE, ſi angulus E, eſt gr. 30. min. 15. æqualis $50\frac{4}{10}$. fere partic. quia tantus

tantus eſt ſinus grad. 30. Min. 15. Vel ſi angulus GDF, eſt grad. 53. Min. 20. accipienda eſſet AE, æqualis particulis 80$\frac{1}{7}$. fere. Ita enim interuallum EC, dabit tot palmos, aut pedes rectæ FG, quot particulæ in eo comprehenduntur. Et ſic de cæteris.

QVANDO autem tota regula 100. partium eſt nimis longa, ſumi poteſt pro ſinu toto quoduis interuallum inter 100. & 100. dummodo reſpectu huius ſinus totius accipiantur poſtea ſinus, vt cap. 1. lib. 1. Num. 12. declarauimus.

POTERIS autem nonnunquam ordinem immutare, ponendo nimirum ſecundam quantitatem DB, in recta AC; & tertiam AE, in recta DB, prout videlicet id expedire cognoueris ad parallelas DE, BC, ducendas.

L E M M A.

DATIS duabus rectis ad inuicem inclinatis, punctum, in quo conueniant, inuenire.

QVOD hic proponitur, demonſtratum à nobis fuit lemmate 13. lib. 1. noſtri Aſtrolabii pluribus viis. Sed quia eius inſignis eſt vtilitas in puncto concurſus duarum rectarum exquirendo, demonſtrabimus illud ipſum hoc loco paulo aliter. Sint ergo duæ rectæ AB, CD, oblique ſe in concurſu B, ſecantes. Ex quotlibet punctis E, F, G, vtcunque in altera earum aſſumptis deſcribantur verſus alteram ad quodcunque idem interuallum arcus HI, KL, MN, ex quibus arcus quadrante minores abſcindantur in I, L, N, punctis, per quæ ex centris rectæ egrediantur ſecantes CD, in O, P, Q. Sumptis deinde in EI, producta ipſi EO, tot partibus æqualibus vſque ad R, quot ſatis eſſe videbuntur, vt recta ex R, verſus concurſum ducta non valde oblique ipſas rectas ſecet, accipiantur in FL, GN, productis totidem partes ipſis FP, PQ, æquales vſque ad S, T. Dico tam rectam RS, quā RT, & quā ST, in punctum B, concurſus cadere, ita vt puncta R, S, T, B, in vna recta linea iaceant. [a] *Quoniam enim anguli E, F, G, æquales ſunt,* [b] *erunt rectæ ER, FS, GT, parallelæ.* [c] *Cum ergo ER, FS, GT, eaſdem proportiones habeant, quas EO, FP, GQ, hoc eſt,* [d] *FB, FB, GB, habent,* [e] *cadent rectæ RS, RT, ST, in punctum B, quod eſt propoſitum.*



a 27. tertij.
b 28 prim.
c 15. quint.
d 4. Sexti, & permutando.
e Schol. 4. ſexti.

HOC ergo lemma ſi adhibeatur ſatis exquiſite in ſuperiore figura Num. 6. punctum concurſus G, deprehendetur, proindeq; menſuræ rectarum, quas ſine numeris inuenire docuimus, non multum à vero aberunt.

Quo pacto in fig. Num. 6. obliqua ſectio in puncto concurſus G, vitetur.

8 *VERVM commode obliquam illam ſectionem in concurſu G, vitabimus, ſi figuram, hoc alio modo conſtruemus, Fiat in figura Num. 6. angulus rectus EFG, & in quolibet puncto G, vbi concurſum eſſe volumus, conſtituantur anguli FGD, FGE, æquales complementis angulorum obſeruationum. Ita enim DE, reſpondebit differentiæ ſtationum, &c. Quocirca ſi cogitetur DE, ſecta in tot partes æquales, quot palmi, vel pedes in differentia ſtationum fuerunt aſſumpti, cognoſcemus per ea, quæ ad finem num. 1. cap. 1. lib. 1. docuimus, quot ex iis partibus in diſtantiis DF, EF, & in altitudine FG, atque hypotenuſis GD, GE, comprehendantur. Atque hoc modo punctum concurſus G, dubium, aut incertum eſſe non poteſt, cum illud ante omnia elegerimus.*

S C H O L I V M.

Vt etiam pro tyronibus ſemel explicemus, quid per noſtrum loquendi modum intelligamus, cum dicimus verbi gratia, Num. 1. huius problematis, Fiat.

Altitudinis inuentio per vnica ſtationē quando diſtantia nota eſt.

Vt OP, differentia inter tangentes angulorū obſeruationum	*ad PN, vel HM, Tangentem minorem.*	*Ita ED, differentia ſtationum*	*ad DF:*

Sciendum eſt, nos hoc modo redigere opus ad terminos regulæ trium. Quapropter ſi iuxta tenorem regulæ numerus in tertio loco poſitus ducatur in eum, qui ſecundum locum occupat, hoc eſt, differentia ſtationum in propoſito exemplo multiplicetur per Tangentem minorem, productuſque numerus per eum, qui in primo loco collocatur, id eſt, per differentiam Tangentium, diuidatur: (niſi quando primus numerus eſt ſinus totus. Tunc enim diuiſio non fit, ſed ex producto quinque figuræ abiiciuntur, vel ſeptem, prout ſinus totus ſtatuitur 100000. vel 10000000.) procreabitur in quotiente quartus numerus, qui quæritur, nimirum diſtantia DF. Eademque eſt ratio de cæteris.

C O R O L L A R I V M. I.

ITAQVE quando diſtantia à loco menſoris vſque ad altitudinem ignotam cognita eſt, inuenietur altitudo per vnicam ſtationem. [f] Si fiat

f 4. triangul. rectil.

Vt ſinus totus	*ad Tangentem anguli obſeruationis:*	*Ita diſtantia nota*	*ad altitudinem.*

Hoc enim demonſtratum eſt Num. 3. huius problematis 1. tam per angulum obſeruationis GDF, & diſtantiam DF, quam per angulum obſeruationis GEF, & diſtantiam EF. Vtroque enim modo inuenta eſt altitudo GF.

COROL.

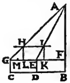
COROLLARIVM II.

PERSPICVVM etiam eſt, ſi G, ſit cacumen alicuius montis, nos per hoc problema 1. eius altitudinem poſſe metiri per duas ſtationes D, E, in plano factas: ſi nimirum prius inueſtigetur recta DF, vel EF, ab oculo menſoris vſque ad perpendicularem GF, quæ à cacumine G, in planum Horizontis cadit, etiamſi eius extremum F, non videamus. *Altitudo montis quo pacto inueſtigetur.*

ALTITVDINEM inacceſſibilem, quando diſtantia à loco menſoris ad baſem altitudinis ignota eſt, per duas ſtationes in plano factas, per quadrantem dimetiri. Atque hinc diſtantiam quoque ipſam eruere etiam ſi extremus eius terminus non cernatur.

PROBLEMA II.

1. SIT inquirenda altitudo AB, ſiue ea turris ſit, ſiue mons, ſiue aliquid aliud, licet non cernatur eius perpendiculi infimus terminus B, vt in omni monte contingit: planum autem, cui perpendicularis eſt altitudo, ſit CB. Statura menſoris DE. Ducta autem cogitatione per E, ipſi CB, parallela GF, fiat prima ſtatio in D, propinquior; ſecunda vero in G, remotior, vt differentia ſtationum ſit GE. Deinde per radios viſuales EA, GA, ad verticem A, directos diligenter obſeruentur anguli AEF, AGF, ſiue per quadrantem pendulum, vt Num. 1. problematis præcedentis docuimus, ſiue per ſtabilem, vt Num. 5. eiuſdem problematis præcepimus. Eodem enim ſemper modo dicti anguli obſeruantur, quando è loco inferiori altitudinis faſtigium inſpicitur. Cogitetur quoque ducta HI, ipſi GF, parallela, [a] vt demiſſæ perpendiculares HL, IK, in parallelogrammo LI. ſint æquales, pro ſinubus totis: quorum tangentes ſunt EK, GL, angulis I, H, qui complementa ſunt angulorum obſeruationum E, G, debitæ. Et quoniam angulus GAF, maior eſt angulo EAF, [b] eſtque priori angulus GHL, & poſteriori angulus EIK, æqualis: erit quoque GHL, maior quam EIK, ideoque tangens GL, maior Tangente EK, quod ſinus toti HL, IK, æquales ſint. Abſcindatur LM, ipſi EK, æqualis, vt GM, ſit differentia Tangentium GL, EK, [c] Et quia eſt vt GL, ad LH, ita GF, ad FA, erit permutando, vt GL, ad GF, ita LH, vel IK, ad FA; [d] Vt autem IK, ad FA, ita quoque eſt EK, ad EF. Igitur erit, vt tota GL, ad totam GF, ita EK, vel LM, ex GL, ablata, ad EF, ex GF, ablatam: [e] ac proinde erit etiam vt GM, ex GL, reliqua ad GE, ex GF, reliquam; ita tota GL, ad totam GF, hoc eſt, [f] ita LH, ſinus totus, ad FA. Quamobrem ſi fiat



a 34. primi.
b 29. prim.
c 4. ſexti.
d 4. ſexti & permutando.
e 19. quint.
f 4. ſexti. & permutando.

Vt GM, differentia Tangentium GL, EK, complementorum angulorum obſeruationum	*ad GE, differentiam ſtationum.*	*ita LH, ſinus totus*	*ad FA,*

inuenta erit altitudo FA, in partibus differentiæ ſtationum, cui ſi adijciatur FB, ſtatura menſoris, tota altitudo AB, nota euadet. *Altitudinis inuētio per Tangentes.*

2. ITEM ſi fiat

Vt GM, differentia Tangentium complementorum angulorum obſeruationum	*ad GE, differentiam ſtationum:*	*ita GL, Tangens complementi anguli obſeruationis in remotiori ſtatione*	*ad GF,*

efficietur nota GF, diſtantia maior, quandoquidem paulo ante demonſtratum eſt, eſſe GM, ad GE, vt GL, ad GF. Quod ſi ex GF, inuenta detrahatur GE, differentia ſtationum, nota relinquetur EF, diſtantia minor. *Diſtantia inuentio.*

ALITER.

3. SI per ſolos ſinus dimenſio inſtituatur, inueſtiganda primum erit alterutra hypotenuſarum GA, EA, vel vtraque, hoc ſcilicet modo. [g] Quoniam angulus AEF, duobus G, GAE, æqualis eſt, ſi angulus G, in remotiore ſtatione tollatur ex angulo AEF, in ſtatione propinquiore, reliquus fiet angulus GAE, differentia inter duos angulos G, AEF, obſeruationum. *g 32. primi.*

[h] Ergo ſi fiat, *h 10. triangul. rectil.*

Vt ſinus anguli GAE, differentia inter duos angulos obſeruationum	*ad GE, differentiam ſtationum:*	*ita ſinus anguli AGE,*	*ad AE,*
		vel	
		ita ſinus anguli GEA, complementi anguli AEF, ad duos rectos.	*ad GA,*

nota fiet tam AE, quam AG, in partibus differentiæ ſtationum. *Hypotenuſarum inuentio*

[i] Si igitur fiat *i 10. Trian. rectil.*

Vt ſinus totus anguli recti F,	*ad rectam EA:*	*ita ſinus anguli AEF, in propinquiore ſtatione,*	*ad AF,*
	vel	*vel*	
	ad rectam GA, proxime inuentam.	*ita ſinus anguli AGF, in remotiore ſtatione*	*ad AF,*

Altitudinis inuentio per ſolos ſinus.

gignetur altitudo AF, & ſi adiungetur FB, ſtatura menſoris, tota altitudo AB, efficietur nota.

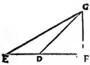
DISTANTIA autem vtraque EF, GF, per ſolos etiam ſinus inuenietur, [a] ſi fiat

a 10. triangul. rectil.

Diſtantia inuentio per ſolos ſinus.

Vt ſinus totus anguli recti F,	*ad hypotenuſam EA.*	*ita ſinus anguli EAF, complementi anguli in propinquiore ſtatione,*	*ad EF,*
	vel	*vel*	
	ad hypotenuſam GA:	*ita ſinus anguli GAF. complementi anguli in remotiore ſtatione*	

Problema quo pacto ſine numeris ſoluatur.



4 SINE numerorum multiplicatione ac diuiſione eadem inueſtigabuntur, ſi illi figuræ, quam ab oculo menſoris ad altitudinem vſque concepimus eſſe conſtruendam, ſimilem omni diligentia conſtituamus, vt Num. 6. & 8. præcedentis problematis 1. diximus, vt manifeſtum eſt, ſi in ea figura Num. 6. altitudo intelligatur FG, & diſtantiæ FD, FE, &c. Idemque efficies per ea, quæ Num. 7. eiuſdem problematis 1. tradita ſunt.

COROLLARIVM. I.

Diſtantia inuentio per vnicã ſtationem, quando altitudo nota eſt.

b 4 triang. rect. l.

ITAQVE ſi altitudo fuerit nota, inuenietur diſtantia per vnicam ſtationem, [b] ſi fiat

Vt ſinus totus AF,	*ad Tangentem FE, complementi anguli in propinquiore ſtatione:*	*ita altitudo nota AF,*	*ad diſtantiam FE,*
	vel		*vel*
	ad Tangentem FG, complementi anguli in remotiore ſtatione:		*ad diſtantiam FG.*

ITEM ſi diſtantia nota fuerit, reperietur altitudo per vnicam quoque ſtationem, ſi fiat

Vt ſinus totus GF,	*ad AF, Tangentem anguli G, obſeruati in remotiori ſtatione:*	*ita GF, diſtantia nota*	*ad AF, altitudinem*
	Vel		
Vt ſinus totus EF,	*ad AF, Tangentem anguli E, obſeruati in ſtatione propinquiore:*	*ita EF, diſtantia nota,*	*ad AF, altitudinẽ.*

COROLLARIVM. II.

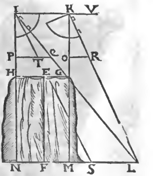
MANIFESTVM etiam eſt, ſi punctum A, ſit cacumen alicuius montis, eodem pacto inueſtigari poſſe lineam perpendicularem AF, quæ ex cacumine in Horizontis planum demittitur: ſi nimirum duæ ſtationes fiant in E, G.

EX vertice montis, aut turris, in cuius ſummitate duæ ſtationes fieri poſſint, è quibus ſignum aliquod in Horizonte appareat, altitudinem ipſius montis, turriſue dimetiri. Atq; hinc ipſam quoq; diſtantiam à turris baſi, vel perpendiculo montis ad ſignum illud inueſtigare.

PROBLEMA III.

1 SIT mons, aut turris GHNM, cuius altitudo perpendiculum EF, vel etiam latus turris GM, vel HN. Eligantur duæ ſtationes in G, H; & ab oculo menſoris tam in I, quam in K, poſito cerni poſſit ſignum L, in Horizonte, vel plano, cui turris, aut mons inſiſtit. Dirigatur latus Quadrantis penduli, in quo pinnacidia, verſus L, diligenterque angulus K, notetur, quem arcus Quadrantis inter latus pinnacidiorum, & filum perpendiculi libere pendentis determinat. Eodemque pacto angulus I, obſeruetur. Per Quadrantem ſtabilem vterque obſeruabitur, ſi vnum eius latus ad Horizontem ſit rectum, (quod tum demum fiet, quando filum perpendiculi ex centro pendentis illi lateri adhærebit) & dioptra attollatur, donec per pinnacidiorum foramina ſignũ L, cerni poſſit. Nam arcus inter dictum latus, & lineam fiduciæ in dioptra angulum obſeruationis metietur. Intelligitur quoque filum perpendiculi in vtroque ſitu Quadrantis penduli, vel latus quadrantis ſtabilis ad Horizontem rectum productum vſq; ad baſem montis, aut turris ad M, N. Sumptus deinde rectis æqualibus KO, IP, pro

Digitized by Google



IP, pro ſinubus totis, ducantur PQ. OR, ad IN, KM, perpendiculares, [a] quæ parallelæ erunt plano Horizontis, hoc eſt, rectæ NL; & Tangentes angulorum obſeruationum I, K. [b] Ipſæ autem HN, GM, altitudini EF, æquales erunt. Et quoniam in triangulis INL, KML, anguli recti N, M, ſunt æquales, & ILN, minor quam KLM, pars toto; erit reliquus NIL, reliquo MKL, maior, ideoq; & Tangẽs PQ, Tangente OR, maior. Abſciſſa ergo PT, ipſi OR, æquali; [c] quia eſt, vt IP, ſinus totus ad PQ, Tangentem maioris anguli obſeruationis, ita IN, ad NL: erit permutando, vt IP, ad IN, ita PQ. ad NL. Eademq; ratione erit vt KO, ad KM, hoc eſt, vt IP, ad IN, [d] (cum KO. KM, ipſis IP, IN, ſint æquales) ita OR hoc eſt, ita PT, ad ML; atque ideo erit, vt PQ, ad NL, ita PT, ad ML. Quia ergo eſt, vt tota PQ. ad totam NL, ita PT, ablata ad ML, ablatam, [e] erit quoq; reliqua TQ differentia Tangentium, ad reliquam NM, differentiam ſtationum, [f] (quod NM, HG, æquales ſint) vt tota PQ, ad totam NL, [g] hoc eſt, vt IP, ad IN. Quamobrem ſi fiat,

a 28. primi.
b 34. primi.
c 4. ſexti.
d 34. primi.
e 19. quint.
f 34. primi.
g 4. ſexti.

Vt TQ, differentia inter Tangentes angulorum obſeruationum	*ad NM, vel HG, differentiam ſtationum:*	*ita ſinus totus IP,*	*ad IN,*

reperietur recta IN, ex qua ſi dematur IH, ſtatura menſoris, nota relinquetur HN, vel EF, altitudo quæſita. Et ſi rurſus fiat, *Altitudinis inuentio.*

VT TQ, differentia Tangentium	*ad NM, vel GH, differentiam ſtationum:*	*ita PQ. Tangens maior*	*ad NL, diſtantiam.*

nota fiet diſtantia NL. à qua ſi ſubtrahatur NF, vel HE, quam metiri licebit, cognita relinquetur FL, diſtantia à perpendiculo montis. Vel ſi dematur NM, differentia ſtationum, nota relinquetur diſtantia ML, à turri vſq; ad L. Item [h] ſi fiat, *Diſtantiæ inuentio.* h 4. ſexti.

Vt IP, ſinus totus	*ad PQ, Tangentem maiorem:*	*ita IN, paulo ante inuenta*	*ad NL, diſtantiam,*

inuenietur rurſus diſtantia NL, &c.

2 VERVM ita eſſe TQ differentiam Tangentium ad NM, vel HG, differentiam ſtationum, vt eſt PQ, Tangens maior ad diſtantiam NL, vt paulo ante oſtenſum eſt, facilius demonſtrabimus, ſi ducatur recta IT, quæ producta ſecet NL, in S. Nam in triangulis IPT, KOR, duo latera IP, PT, duobus lateribus KO, OR, æqualia ſunt, anguloſque continent æquales, vtpote rectos. [i] Igitur anguli T, R, æquales ſunt, [k] ideoq; KL, IS, parallelæ. [l] Et quia ducta IK, æqualis eſt & ipſi SL, & differentiæ ſtationum HG. vel NM, [m] liquido conſtat, ita eſſe TQ, differentiam Tangentium ad SL, quæ differentiæ ſtationum IK, vel HG, æqualis eſt, vt eſt PQ, Tangens maior ad diſtantiam NL,

i 4. primi.
k 28. primi.
l 34. primi.
m ſchol. 4. ſexti.

ALITER

3 PER ſolos ſinus ita Problema efficiemus. Primum inquiremus hypotenuſas IL, KL, hoc modo. [n] Quoniam angulus LKV, duobus angulis LIK, ILK, æqualis eſt; ſi LIK, angulus complementi maioris anguli obſeruationis LIN, auferatur ex LKV, angulo complementi minoris anguli obſeruationis LKM, reliquus fiet angulus ILK. [o] Si ergo fiat,

n 32. primi.
o 10. Triang. rectil.

Vt ſinus anguli ILK, differentiæ inter duos angulos complemẽtorum angulorum obſeruationum	*ad IK, differentiam ſtationum:*	*Ita ſinus anguli IKL, conſtati ex recto, & angulo obſeruationis minore,*	*ad IL,*
		vel	
		Ita ſinus anguli LIK, complementi maioris anguli obſeruationis	*ad KL,*

euadet nota tam IL, quam KL, in menſura differentiæ ſtationum. [p] Igitur ſi fiat, *Hypotenuſarum inuentio.* p 10. Triang. rectil.

Vt ſinus totus anguli recti N,	*ad Hypotenuſam proxime inuentam IL,*	*Ita ſinus anguli ILN, complementi maioris anguli obſeruationis*	*ad IN,*

Vel

Vt ſinus totus anguli recti M,	*ad Hypotenuſam KL, nuper inuentam:*	*Ita ſinus anguli KLM, complementi minoris anguli obſeruationis*	*ad KM,*

Altitudinis inuentio per ſolos ſinus.

cognita fiet altitudo IN, vel KM, ex qua ſi dematur ſtatura menſoris, altitudo quæſita relinquetur HN, vel CM; hoc eſt, EF.

DISTANTIA autem vtraque NL, ML, reperietur, [a] ſi fiat,

a 10. Triang. rectil.

Diſtantia inuentio per ſolos ſinus.

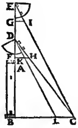
Vt ſinus totus anguli recti N, vel M,	*ad hypotenuſam inuentam IL, vel KL,*	*Ita ſinus anguli maioris obſeruati NIL, vel*	*ad NL, diſtantiam.*
		Ita ſinus anguli minoris obſeruati MKL,	*ad ML, diſtantiam.*

Quo pacto problema conficiatur ſine numeris.

4 SINE numeris eædem rectæ IN, NL, IL, KL, &c. reperientur, vt in ſuperioribus: ſi nimirum (vtemur figura huius problematis, ne nouam conſtruere cogamur) ſumpta recta IK, tot partium, quot palmi pedeſue in differentia ſtationum exiſtunt, fiant anguli VKL, VIL, complementorum angulorum MKL, NIL, obſeruationum, & concurſus L notetur, ex quo ducatur LN, ipſi IK, parallela, & ad hanc perpẽdicularis in I, excitetur IN, &c. Vel ſi angulus rectus conſtituatur INL, & in aſſumpto puncto L, vbi concurſum eſſe volumus, fiat tam angulus NLI, complementi maioris anguli obſeruationis, quam angulus NLK, complementi minoris anguli obſeruationis, &c. Reliqua autem fiant, vt in problemate 1. Num. 6. & 8. dictum eſt. Idemque efficies per ea, quæ Num. 7. in eodem problemate 1. ſcripſimus.

EX vertice montis, vel turris per duas ſtationes in aliqua haſta erecta, vel in duabus feneſtris turris, quarum vna ſupra aliam exiſtat, factas, è quibus ſignum aliquod in Horizonte videri poſſit, altitudinem ipſius montis, aut turris metiri. Atque hinc diſtantiam quoque à perpendiculo montis, vel turris vſque ad ſignum viſum cognoſcere.

PROBLEMA IV.



1 NON poſſunt aliquando commode duæ ſtationes in ſummitate montis, vel turris fieri. Quare tunc ita agendum erit. Sit altitudo AB, ſupra planum BC, menſuranda ex ſummitate A. Erigatur haſta aliqua quotlibet palmorum, aut pedum. Et primum inſpiciatur ſignum C, in plano per angulum BDC; Deinde idem inſpiciatur ex loco ſuperiore haſtæ per angulum BEC. Vterque autem angulus obſeruabitur vel per quadrantem pendulum, vt in priori angulo vides, vel per ſtabilem cum dioptra, vt in poſteriori. Sumptis quoque æqualibus DF, EG, pro ſinubus totis, ducantur ad EB. perpendiculares FH, GI, pro Tangentibus angulorum obſeruationum. Ducta autem DL, ipſi EC, parallela ſecante FH, in K: [a] quoniam anguli BDL, & E, æquales ſunt, & F, G, recti, nec non & latera adiacentia DF, EG, æqualia; [b] erunt latera FK, GI, æqualia: atque adeo KH, differentia Tangentium. Quia vero ex ſchol. propoſitionis 4. lib. 6. Euclid. eſt, vt KH, ad FK, ita LC, ad BL: [c] Vt autem LC, ad BL, ita eſt, ED, ad BD; erit quoque vt KH, ad FK, ita ED, ad DB. Si igitur fiat,

a 29. prim.
b 26. prim.
c 2. ſexti.

Vt KH, differentia inter Tangentes angulorum obſeruationum	*ad FK, vel ad GI, Tangentem minorem:*	*Ita ED, ſpatium inter angulos obſeruationum, quod notum eſſe poteſt per aliquam menſuram,*	*ad DB,*

Altitudinis inuentio.

inuenietur DB, ex qua ſi dematur portio haſtæ AD, inter altitudinis faſtigium A, & inferiorem angulum obſeruationis D, nota relinquetur altitudo propoſita AB.

EODEMQVE modo in turri eadem altitudo deprehendetur, ſi pro haſta AE, duæ feneſtræ eligantur, è quibus ſignum C, ſub iiſdem angulis videatur, vt patet. Sed tunc altitudini DB, inuentæ (ſi feneſtræ ſint D, E,) adicienda eſt portio turris inter punctum D, feneſtræ inferioris, & turris faſtigium E, vt tota altitudo turris habeatur EB. [d] Et ſi fiat,

d 4. ſexti.

Diſtantia inuentio.

Vt DF, ſinus totus	*ad FH, Tangentem maiorem:*	*Ita DB, altitudo inuenta*	*ad BC,*

inuenta erit diſtantia BC.

ALITER.

2 POSITO ſinu toto CB, erit BE, Tangens anguli BCE, complementi minoris anguli obſeruationis E, & BD, Tangens anguli BCD, complementi maioris anguli obſeruationis D; ideoque DE, differentia illarum Tangentium. Quamobrem ſi fiat,

Vt DE, differentia Tangentium complementorum angulorum obſeruationum	*ad DB, Tangentem minorem:*	*Ita DE, differentia ſtationum oculorum*	*ad DB,*

Altitudinis inuentio alia.

prodibit altitudo DB, cognita ab oculo in prima ſtatione vſque ad baſem altitudinis, &c.

ALI-

ALITER.

3 VT per ſolos ſinus inſtituatur operatio, inueſtiganda prius eſt vtraque hypotenuſa CD, CE. vel alterutra earum, hoc modo:[a] Quoniam angulus BDC, duobus E, & DCE, æqualis eſt, ſi minor aogulus obſeruationis E, ex maiori angulo obſeruationis BDC, ſubtrahatur, notus, relinquetur angulus DCE, [b] Itaque ſi fiat.

a 29 prim.
b 10. Triã. rectil.

Vt ſinus anguli DCE, differentia angulorum obſeruationum	*ad DE, differentiam ſtationum oculorum:*	*Ita ſinus minoris anguli obſeruationis E,*	*ad CD,*
		Vel	
		Ita ſinus anguli EDC, complementi maioris anguli obſeruationis ad duos rectos,	*ad CE,*

Hypotenuſarum inuentio.

reperietur tam hypotenuſa CD, quam CE, in partibus differentiæ ſtationum DE. [c] Quapropter ſi iam fiat

c 10. Trian. rectil.

Vt ſinus totus anguli recti B,	*ad hypotenuſam CD,*	*Ita ſinus anguli BCD, complementi maioris anguli obſeruationis BDC,*	*ad DB,*
	Vel	*Vel*	
	ad hypotenuſam CE, proxime inuentam:	*Ita ſinus anguli BCE, complementi minoris anguli obſeruationis E:*	*ad EB,*

cognita erit vtraque altitudo DB, EB, &c. Si autem fiat

Altitudinis inuentio per ſolos ſinus.

Vt ſinus totus anguli recti B,	*ad Hypotenuſam CD,*	*Ita ſinus anguli D, maioris obſeruati,*	*ad BC,*
	Vel	*Vel*	
	ad hypotenuſam CE, nuper inuentam	*Ita ſinus anguli E, minoris obſeruati.*	*ad BC,*

cognoſcetur quoque diſtantia BC, per ſolos ſinus.

4 ABSQVE numeris problema efficiemus, vt in præcedentibus, ſi nimirum in recta EB, ſumatur portio ED, tot partium æqualium, quot palmi pedeſue in ED, differentia ſtationum oculorum exiſtunt, & tam angulus E, minor obſeruationis, quam BDC, maior conſtituatur, concurſusque C, notetur, à quo ad EB, perpendicularis ducatur CB, &c. vel ſi angulus rectus efficiatur B, & in quouis puncto C, vbi optamus eſſe concurſum, conſtituatur tam angulus BCD, complemẽto maioris anguli obſeruationis, quam angulus BCE, complemento minoris anguli obſeruationis æqualis, &c. Reliqua autem abſoluantur, vt in Problemate 1. Num. 6. & 8. dictum eſt. Idemque efficies per ea, quæ ibidem Num. 7. explicata ſunt.

Diſtantia inuentio per ſolos ſinus.
Problematis ſolutio ſine numeris.

COROLLARIVM.

5 IGITVR ſi diſtantia ſigni ex turre viſi vſque ad turrim nota fuerit, nimirum recta CB, reperietur altitudo turris per voicam ſtationem in faſtigio A, factam:[d] ſi videlicet fiat,

d 4. trian. rectil.

Vt ſinus totus CB,	*ad BD, Tangentem anguli BCD, qui complementum eſt anguli obſeruationis D,*	*Ita diſtantia nota CB,*	*ad BD,*

Et ſi ex inuenta BD, auferatur menſoris ſtatura AD, nota relinquetur altitudo turris BA.

VEL PER SOLOS SINVS.

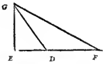
Vt ſinus anguli obſeruationis D,	*ad diſtantiam CB, notam*	*Ita ſinus anguli BCD, complementi anguli obſeruationis D.*	*ad BD,*

Altitudinis inuentio per vnicã ſtationẽ quando diſtantia nota eſt.

QVOD ſi oculus D, ſtatuatur in aliqua feneſtra turris, adiicienda erit portio turris inter oculum & faſtigium ad altitudinem DB, inuentam. Ita namque conficietur tota altitudo turris EB, ſi faſtigium ſit E, vt perſpicuum eſt.

EX vertice montis aut turris altitudinem ipſius, ſi in plano, cui inſiſtit, ſpacium aliquod è directo menſoris notum ſit, deprehendere.

PROBLEMA V.



1 QVANDO ſpatium aliquod DE, è directo menſoris à monte vel turri remotum fuerit notum, metiemur ipſam altitudinem FG, è faſtigio G, hac ratione. Inſpiciantur termini D, E, per angulos FGD, FGE, ſiue per Quadrantem pendulum, ſiue per ſtabilem. Et quoniam, poſito ſinu toto GF, Tangentes angulorum obſeruationum ſunt DF, EF, ipſarumque differentia DE, ſpatium propoſitum: Si fiat,

Vt DE, differentia Tangentium angulis obſeruationum debitarum	*ad ſinum totum GF:*	*Ita DE, ſpatium notum*	*ad GF?*

manifeſta erit altitudo GF, quæſita in partibus ſpatii noti DE,

ALITER.

2 PER ſolos ſinus eandem altitudinem GF, adipiſcemur, ſi prius hypotenuſam GD, venabimur, hoc modo.[a] Fiat,

a 10. Tria. rectil.

Vt ſinus anguli DGE, differentiæ angulorum obſeruationum	*ad DE. ſpatium cognitum:*	*Ita ſinus anguli E, complementi maioris anguli obſeruationis*	*ad hypotenuſam GD,*

Numerus enim productus dabit hypotenuſam GD, in partibus ſpatii DE, notam. [b] Si ergo rurſus fiat,

b 10. Trian. rectil.

Vt ſinus totus anguli recti F,	*ad hypotenuſam GD, proxime inuentam:*	*Ita ſinus anguli D, complementi minoris anguli obſeruationis*	*ad GF, altitudinem,*

producetur altitudo GF, in partibus hypotenuſæ GD, ſiue ſpatii DE, nota.

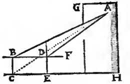
Solutio problematis ſine numeris.

3 SINE numeris agendum erit, vt in problemate 1. declaratum eſt.

DISTANTIAM ab oculo, vel pede menſoris ad quoduis punctum in aliqua altitudine notatum, per duas ſtationes in plano factas metiri.

PROBLEMA VI.

1 SIT inquirenda diſtantia puncti A, in muro GH, ſiue perpendiculari ad Horizontem, ſiue inclinato, vel etiam in tecto quopiam; ab oculo B, vel pede C, poſita ſtatura menſoris BC. Concipiatur ducta BD, ipſi plano CE, parallela, ſitque primo punctum A, altius, quam oculus B. Inſpecto puncto A, notetur angulus ABD, quem latus pinnacidiorum in quadrante pendulo, vel linea fiduciæ in dioptra Quadrantis ſtabilis cum recta BD, facit. Deinde accede verſus punctum A, quotlibet palmis aut pedibus vſque ad D, vt BD, differentia ſtationum nota ſit. Rurſumq; ex D, punctum A, inſpiciatur, notato diligenter angulo ADF, exiſtentque rectæ AB, AD, BD, BC, DE, in eodem plano, in eo videlicet, quod per ſtaturas menſoris BC, DE, & per punctum A, ducitur.[a] Et quia angulus ADF, duobus B, & BAD, eſt æqualis: ſi angulus B, in remotiore ſtatione auferatur ex angulo D, in propinquiore, notus fiet reliquus angulus A. [b] Si igitur fiat,



a 32. primi.
b 10. triangul. rectil.

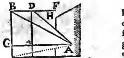
Vt ſinus anguli A, quo angulus minor B, a maiori differt,	*ad BD, differentiam ſtationum:*	*Ita ſinus anguli ADB, qui complementum eſt maioris anguli D, ad duos rectos,*	*ad AB, diſtantiam quæſitam*

reperta erit quæſita diſtantia AB, in partibus differentiæ ſtationum.

QVOD ſi oculus exiſtet in D, & recedatur à puncto D, vſque ad B, inuenietur eadem arte diſtantia DA, ſi loco anguli ADB, ſumatur angulus B, in remotiore ſtatione, vt liquet.[c] Eſt enim vt ſinus anguli A, quo angulus minor B, à maiori ADF, differt ad BD, differentiam ſtationum: ita ſinus anguli B, in remotiori ſtatione ad DA.

c 10. Trian. rectil.

2 DISTANTIA vero à puncto A, ad pedem menſoris C, hoc eſt, recta AC, cognoſcetur per Problema 12. triang. rectil. cap 3 lib. 1. cum in triangulo obliquangulo ABC, duo latera AB, BC, nota ſint, nimirum diſtantia inuenta, & ſtatura menſoris, comprehendantque angulum ABC, notum, vtpote conflatum ex recto CBD, & angulo obſeruationis ABD.



3 SIT deinde punctum A, in muro HI, infra oculum B. Inſpecto puncto A, obſeruetur angulus CBA, quem latus pinnacidiorum cum perpendiculi filo, vel dioptræ linea fiduciæ cũ BC, facit: Deinde accede verſus A, vſq; ad D, & iterum conſidera angulum EDA: exiſtentq; rectæ AB, AD, BD, BC, DE, in vno eodemq; plano, in eo videlicet, quod per ſtaturas menſoris BC, DE, & per punctum A, ducitur. [d] Et quoniam angulus FDA, complementi anguli obſeruationis in propinquiore ſtatione æqualis eſt duobus DBA, DAB; ſi DBA, angulus complementi anguli remotioris ſtationis dematur ex angulo ADF, complementi anguli ſtationis propinquioris, reliquus fiet notus BAD.[e] Si ergo fiat,

d 32. primi.
e 10. Trian. rectil.

Vt ſinus anguli BAD, differentia inter angulos complementorum angulorum obſeruationum	*ad BD, differentiam ſtationum:*	*Ita ſinus anguli ADB, conſtati ex recto BDE, & ex angulo obſeruationis ADE, in propinquiore ſtatione*	*ad AB, diſtantiã quæſitã.*

cognita erit diſtantia AB, quam quærimus, in partibus differentiæ ſtationum BD.

QVOD ſi oculus ponatur in D, & recedatur à puncto D, vſque ad B, reperietur eodem modo diſtantia DA, ſi pro angulo BDA, aſſumes angulum DBA, complementi anguli ABC, obſeruationis in remotiore ſtatione, vt manifeſtum eſt. [f] Nam eſt, vt ſinus anguli BAD, differentiæ inter angulos complementorum angulorum obſeruationum, ad BD, differentiam ſtationum: ita ſinus anguli DBA, complementi anguli ABC, in remotiore ſtatione, ad DA. *f 10. triang. rectil.*

4 VT autem diſtantia CA, à pede ad punctum A, inueniatur, ita progrediemur. Quoniam in triangulo rectangulo ABG, (ſi ex puncto A. concipiatur ducta ad BC, ſtaturam menſoris perpendicularis AG,) baſis AB, nota eſt per inuentionem, & angulus BAG, notus, quippe cum ſit complementum anguli obſeruationis ABG; [g] Si fiat, *g 2. triang. rectil.*

Vt ſinus totus	*ad baſem AB, proxime inuentam:*	*Ita ſinus anguli BAG, complementi anguli obſeruationis,*	*ad BG,*

cognoſcetur BG, in partibus baſis AB, hoc eſt in partibus differentiæ ſtationum BD, in quibus AB, inuenta fuit. Ablata autem BG, ex menſoris ſtatura BC, nota fiet reliqua CG. [h] Item ſi fiat, *h 2. triang. rectil.*

Vt ſinus totus	*ad baſem AB, nuper inuentam:*	*Ita ſinus anguli obſeruationis ABG,*	*ad AG,*

nota etiam fiet AG, in partibus eiuſdem baſis AB, vel differentiæ ſtationum BD. Quia ergo in triangulo rectangulo ACG, duo latera AG, GC, per inuentionem nota facta ſunt, [i] cognoſcetur quoque baſis AC, quod eſt propoſitum. *i 3. triang. rectil.*

5 MANIFESTVM autem eſt, eodem pacto vtramque diſtantiam AB, AC, reperiri, etiam ſi punctum A, in plano ſit, in quo menſor conſiſtit, nimirum in Horizonte, qui ponatur tranſire per rectam AG, ita vt ſtatura menſoris ſit BG. Immo tunc per vnicam ſtationem vtraque diſtantia AB, AG, reperietur. Nam poſito ſinu toto BG, ſtaturæ menſoris; AB, ſecans eſt anguli obſeruationis ABG, & AG, Tangens. Quocirca ſi fiat.

Vt BG, ſinus totus	*ad BA, ſecantem anguli obſeruationis ABG,*	*Ita BG, ſtatura menſoris*	*ad BA,*
	Vel		
	ad GA, Tangentem anguli obſeruationis ABG:		*ad GA,*

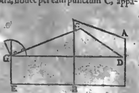
vtraque diſtantia & BA, ab oculo B, & GA, à G. pede menſoris cognita fiet.

6 IAM vero ſine numeris operabimur, vt in præcedentibus, vt manifeſtum eſt, ſi recte figura conſtruatur, quemadmodum Num. 6. & 8. problematis 1. dictum eſt. *Problema quo pacto ſine numeris ſoluendum ſit.*

INTERVALLVM inter duo puncta in quolibet plano eleuato, ſiue illud ad Horizontem rectum ſit, ſiue inclinatum, metiri.

PROBLEMA VII.

1 IN plano quolibet eleuato AB, propoſitum ſit interuallum CD, quod ex plano EB, inueſtigandum ſit. Poſito oculo in G, vt ſtatura menſoris ſit, GE, inueſtigetur per præcedens problema 6. vtraq; diſtantia GC, GD, in partibus ſtaturæ menſoris GE. ſiue differentiæ duarum ſtationum, è quibus ipſæ diſtantiæ inueſtigantur. Deinde applicato Quadrante ſtabili ad oculum G, ita vt eius planum per puncta C, D, tranſeat, & vna eius ſemidiameter ad punctum D, vergat, (quod fiet, ſi poſita linea fiduciæ dioptræ ſupra illam ſemidiametrum, punctum D, per foramina pinnacidiorum conſpiciatur) vertatur dioptra, donec per eam punctum C, appareat, arcuſque inter dictam ſemidiametrum, & lineam fiduciæ interceptus notetur, hic enim angulum G. metietur. Quod ſi altera ſemidiameter Quadrantis vltra rectam GC, exiſtat, erit angulus acutus CGD: Si vero altera illa ſemidiameter citra rectam GC, extiterit, dictus angulus erit obtuſus, qui cognoſcetur, ſi ad rectum adiiciatur reliquus angulus inter alteram illam ſemidiametrum, & rectam GC, quem quidem reliquum inueſtigabimus per Quadrãtem, vt de acuto CGD. diximus, ſi videlicet in recta CD, mente notemus punctum, in quod altera illa ſemidiameter incurreret producta. Si



namq; tunc ſemidiameter illa rectæ GC, congruat, & dioptra ad illud punctum mente notatum dirigatur, indicabunt gradus inter illam ſemidiametrum, & dioptram prædictum angulum reliquum. Si deniq; altera illa ſemidiameter preciſe in C, tendat angulus CGD, rectus erit. Quia ergo in triangulo GCD, obliquangulo latera nota GC, GD, continent angulum notum G; cognoſcetur latus CD, per problema 12. triang. rectil. c. 3. lib. 1.

Problematis ſolutio ſine numeris. 2. ABSQVE numeris facile problema ſoluetur, ſi fiat angulus G, æqualis ei, qui per Quadrantem obſeruatus fuit, & in rectis GC, GD, ex inſtrumento partium tot particulę ſumantur, quot palmi, aut pedes in diſtantiis GC, GD, inuenti ſunt, &c.

LONGITVDINEM lineæ rectæ, quando menſor in vno eius extremo, vel in aliqua altitudine nota, quæ perpendicularis ſit in eo extremo ad planum, in quo linea iacet, exiſtens alterum extremum videre poteſt, per Quadrantem comprehendere.

PROBLEMA VIII.



1 SIT exquirenda longitudo AB, hoc eſt, diſtantia inter A, & B, etiamſi puncta intermedia ſiue propter tumores interiectos, ſiue propter valles, cerni nequeant, dummodo in extremo A, exiſtens menſor, vel in aliqua altitudine cognita ad planum, in quo linea AB, perpendiculari, ita vt AC, ſit vel ſtatura menſoris, vel haſta aliqua erecta, vel turris. Inſpecto extremo B, obſeruetur angulus C. Et quia poſito ſinu toto AC, diſtantia AB, eſt Tangens anguli obſeruati C, ſi fiat,

Vt ſinus totus AC,	*ad AB, tangentem anguli obſeruati C.*	*Ita AC, ſtatura menſoris, vel altitudo nota,*	*ad AB, longitudinem.*

a 4. Triang. rectil. procreabitur longitudo AB, in partibus altitudinis notæ AC. Quæ per ſolos ſinus etiam producetur, [a] ſi fiat,

Vt ſinus anguli B, complementi anguli C, obſeruati	*Ad AC, ſtaturam menſoris, vel altitudinem notam:*	*Ita ſinus anguli C, obſeruationis*	*ad AB, longitudinem*

Solutio problematis ſine numeris. 2 SINE numeris eadem longitudo AB, cognoſcetur, vt in præcedentibus dictum eſt: ſi videlicet ex inſtrumento partium accipiatur AC, tot particularum, quot palmi, pedeſue in altitudine AC, exiſtunt, conſtituaturq; angulus obſeruationis C, ac tandem ad AC, perpendicularis excitetur AB, &c.

LONGITVDINEM, ad cuius extrema accedere non liceat, dummodo ea appareant, & ipſa longitudo producta ad pedes menſoris pertingat, ex altitudine aliqua nota dimetiri.

PROBLEMA IX.



1 SIT longitudo AB, è directo menſoris in C, exiſtentis, ita vt recta BA, producta tranſeat per C. Sit quoque CD, vel ſtatura menſoris, vel altitudo quæpiam nota. Si igitur per præcedens problema 8. inquiratur vtraq; longitudo CB, CA, & CA, ex CB, detrahatur, reliqua fiet AB, ac proinde cognita.

ALITER

2 POSITO ſinu toto CD, ſi termini A, B, per angulos CDA, CDB, ſpectentur, erit CA, Tangens minoris anguli, & CB, maioris, at AB, differentia earum Tangentium. Quare ſi fiat,

Vt ſinus totus CD,	*Ad AB, differentiam Tangentium angulorum obſeruationum:*	*Ita CD, altitudo nota*	*Ad AB, longitudinem,*

efficietur longitudo AB, nota in partibus altitudinis notæ CD.

ALITER.

a 5 Triang. rectil. 3. PER ſolos ſinus eandem longitudinem AB, cognoſcemus: ſed prius inuenienda eſt AD, [a] hac ratione fiat,

Vt ſinus anguli CAD, complementi minoris anguli obſeruationis	*ad CD, altitudinem notam:*	*Ita ſinus totus anguli recti C,*	*ad AD,*

b 10. Triã. rectil. Productus enim numerus dabit AD, notam in partibus altitudinis notæ CD. [b] Si ergo rurſus fiat,

Vt ſinus anguli CBD, complementi maioris anguli obſeruationis	*Ad AD, proxime inuentam*	*Ita ſinus anguli ADB, differentia inter duos angulos obſeruatos*	*ad AB, longitudinem,*

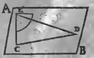
prodibit nota longitudo AB, in partibus rectæ AD, hoc eſt, altitudinis notæ CD, in quibus recta AD, fuit inuenta.

4 SINE numeris rem perficies, quemadmodum in præcedentibus, vt liquet.

LONGITVDINEM tranſuerſam in Horizonte, cuius vtrumq; extremum inſpici poteſt, notam efficere.

PROBLEMA X.

1 SIT planum Horizontis AB, in quo iaceat longitudo CD, in tranſuerſum, pes autem menſoris ſit in E, ita vt recta DC, per pedes menſoris in E, non tranſeat. Quando namque longitudo DC, è directo menſoris ſita eſt, inueſtigabitur ea per problema 9. præcedens. Vt ergo tranſuerſa longitudo CD, nota efficiatur, inueſtiganda primum erit vtriuſque puncti extremi CD, diſtantia à pede menſoris E, & quidem per vnicam ſtationem in E, factam, vt problemate 6. Numer. 5. dictum eſt. Deinde per quadrantem cum dioptra angulus CED, exquirendus in plano Horizontis, quod fiet, ſi Quadrantis planum erectum tranſeat ſemel per puncta E, C, & iterum per puncta E, D, vt deſignari poſſint partes rectarum EC, ED. Quadrantis enim vno latere incumbente rectæ EC, dioptra vero rectæ ED, ſi angulus eſt acutus, indicabit arcus inter illud latus, ac dioptram angulum CED. Quod ſi alterum Quadrantis latus rectæ ED, congruet, erit angulus CED, rectus: Si vero recta ED, vltra alterum latus Quadrantis extiterit; dictus angulus obtuſus erit: qui cognitus erit, ſi recto angulo addatur reliquus inter alterum latus & rectam ED: Qui quidem reliquus angulus per Quadrantem explorabitur, vt de acuto diximus in problemate 7. Atque ita habebimus triangulum ECD, cuius duo latera nota ſunt EC, ED, angulumque notum comprehendunt CED.[a] Igitur & tertium latus CD, cognitum erit. a 12. triang. rectil.

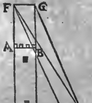


2 QVO pacto autem ſine ope numerorum problema perficiendum ſit, traditum eſt in problemate 7. Numero 2.

LONGITVDINEM in horizonte inter turrim aliquam, & aliud quodpiam ſignum, ex turri per duas ſtationes in faſtigio factas: vel in duabus feneſtris, quarum vna ſit ſub altera ad perpendiculum, quando ſpacium inter illas feneſtras notum eſt, etiamſi totius turris altitudo ignota ſit, dimetiri. Atque hinc obiter altitudinem turris patefacere.

PROBLEMA XI.

1 QVAMVIS problema hoc ſolutum iam ſit in problemate 3. & 4. occaſione altitudinis inquirendæ, libet tamen idem hic per ſe, & paulo aliter expedire. Sit ergo turris ABCD, & longitudo propoſita CE: ſtatura autem menſoris BG, vel AF. Inſpecto extremo E, in prima ſtatione per angulum CGE, & in ſecunda per angulum DFE, ducatur FH, ipſi GE, parallela. Et quia in triangulis FDH, GCE, anguli D, C, recti ſunt, [b] & H, E, æquales, [c] latusque FD, lateri GC, æquale. [d] erunt quoque & anguli G, DFH, æquales, & latera DH, CE. Poſito autem ſinu toto FD, erit DE, Tangens maioris anguli obſeruationis DFE, & DH, Tangens anguli DFH, hoc eſt, anguli æqualis G, in prima ſtatione obſeruati: ac proinde HE, differentia erit earum Tangentium, [e] quæ quidem æqualis eſt differentiæ ſtationum FG, vel AB, vel DC. Si igitur fiat, b 29. primi. c 34. primi. d 26. primi. e 34. primi.



Vt HE, differentia Tangentium angulorum obſeruationum	*Ad CE, Tangentem minoris anguli obſeruationis CGE,*	*Ita HE, vel FG, differentia ſtationum*	*ad CE, longitudinem,*

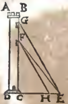
gignetur longitudo optata CE, in partibus differentiæ ſtationum HE, vel FG, &c. Quod ſi rurſus fiat,

Vt HE, differentia Tangentũ angulorũ obſeruationũ	*Ad FD, ſinum totũ*	*Ita HE, vel FG, differẽtia ſtationum*	*ad FD,*

inuenietur recta FD, à qua ſi tollatur ſtatura menſoris AF, reliqua fiet altitudo turris AD.

2 SED iam ex duabus feneſtris F, G, inſpiciatur extremum E, per angulos CFE, CGE, ducaturq; FH, ipſi GE, parallela.[f] Quoniam igitur angulus CFH, angulo CGE, æqualis eſt: ſi ponatur ſinus totus CE, erit CG, Tangens anguli CEG, complementi minoris anguli obſeruationis G, & CF, Tangens anguli CEF, complementi maioris anguli obſeruationis CFE: at FG, differentia ſtationum, hoc eſt, interuallum inter feneſtras, differentia erit dictarum Tangentium. f 29. primi.

Quam ob rem ſi fiat,



Vt FG, differentia Tangentium complementorum angulorum obſeruationum,	*Ad CE, ſinum totum*	*Ita FG, differentia ſtationum inter feneſtras,*	*ad CE, longitudinem propoſitam,*

cognita erit longitudo CE, deſiderata. Et ſi rurſum fiat,

Vt FG, differentia Tangentium complementorum angulorum obſeruationum	*ad GC, Tangentem complementi minoris anguli obſeruati*	*Ita FG, differentia ſtationum inter feneſtras*	*ad GC,*

inuenta erit altitudo GC, à ſuperiori feneſtra ad baſem, in partibus differentiæ ſtationum, cui ſi addatur portio GB, à ſuperiori feneſtra ad faſtigium vſque, tota turris altitudo BC, non ignorabitur.

3. SINE auxilio numerorum procedendum eſt, vt in ſuperioribus.

LONGITVDINEM rectæ è directo menſoris poſitæ, cuius extremum vtrumque, vel alterum non appareat, niſi ad dextram, vel ſiniſtram accedat menſor, per quadrantem comprehendere.

PROBLEMA XII.



1 SIT longitudo AB, & menſor in extremo A, conſtitutus videre non poſſit alterum extremum, niſi ad dextram ſiniſtramue recedat vſque ad D, punctum, è quo vtrumque extremum cerni poſſit. Erit igitur longitudo AB, menſori in D, exiſtenti poſita in tranſuerſum. Quare ea per problema 10. inueſtigabitur.

2. EODEM modo, ſi menſor exiſtat in C, è directo longitudinis, ſed vel neutrum extremum, vel alterum duntaxat intueri poſſit, longitudinem AB, venabimur. Si namque ex C, ad ſiniſtram, vel dextram procedemus donec in D, vtrumque extremum videamus, inuenietur tranſuerſa longitudo AB, per problema 10. vt prius. Neque vero refert, ſiue per angulum rectum BCD, recedatur in latus, ſiue per angulum obtuſum BAD, &c.

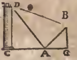
3. OPERATIO ſine numeris inſtituenda eſt, vt in ſuperioribus.

4. QVANDO menſor in A, exiſtens videre poteſt extremum B, inueſtigabitur longitudo AB, per problema 8.

SI autem è directo longitudinis exiſtat in C, & vtrumque extremum cernat, explorabitur per problema 9. eadem longitudo AB.

DISTANTIAM alicuius ſigni in Horizonte poſiti, à ſummitate turris, vel muri alicuius, licet ad ipſum ſignum acceſſus non pateat, per quadrantem colligere.

PROBLEMA XIII.



1. IN Horizontis plano punctum A, diſtet à ſummitate D, alicuius altitudinis CD. per rectam AD, quam metiri iubemur. Vbicunque oculus menſoris exiſtat, nimirũ in B, vt ſit ſtatura menſoris BG, inueſtigentur per problema 6. diſtantiæ punctorum A, D, ab oculo menſoris B.

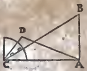
Deinde angulus exploretur ABD, quem nobis præbebit Quadrans cum dioptra, ſi ad oculum ita applicetur, vt eius planum per tria puncta B, A, D, tranſeat, poſito centro in B; atque vnum eius latus rectæ BA, incumbat, dioptra vero ad punctum D, dirigatur &c. Itaque cum in triangulo BAD, duo latera nota BA, BD, angulum notum contineant B;[a] cognoſcetur quo-

a 10. Trian. rectil. que latus AD.

2. QVA ratione eadem diſtantia AD, exquirenda ſit abſque numeris, docuimus Num. 5. problematis 7.

ALTITVDINEM inacceſſibilem, cuius baſis non videatur, & ad quam per nullum ſpatium ſecundum lineam rectam accedere poſſimus, aut recedere, vt duæ ſtationes fieri poſſint, ſed ſolum ad dextram, ſiniſtramue ad locum è quo eius baſis appareat, per Quadrantem explorare.

PROBLEMA XIV.



1 SIT altitudo AB, ad quam ex C, loco menſoris non liceat accedere, aut ab ea recedere ſecundum lineam rectã, ſed ſolum in latus, verbi gratia vſque ad D, vnde baſem videre poſſimus. Inquiratur per problema 10. longitudo tranſuerſa AC, ex loco D: inſpiciaturque vertex B ex C, per angulum ACB. Et quia poſito ſinu toto AC, altitudo AB, Tangens eſt anguli obſeruationis ACB,[a] ſi fiat

a 4. Trian. rectil.

Vt ſinus totus AC,	*ad AB, Tangentem anguli obſeruati ACB:*	*Ita longitudo AC, per problema 10. inuenta*	*Ad AB, altitudinem.*

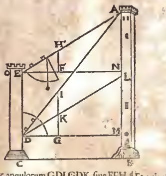
prodi-

prodibit nota altitudo AB, in partibus, in quibus AC, inueota fuit.

2 NON erit autem difficile problema hoc ſine numerorum auxilio exequi, ſi ſuperiora præcepta conſulantur.

ALTITVDINEM inacceſſibilem, quando neque diſtantia à loco menſoris ad eius baſem nota eſt, neque è directo ipſius duæ ſtationes in plano fieri poſſunt, neque denique baſis appareat, per Quadrantem notam reddere. Atque hinc obiter ipſam quoque diſtantiam elicere.

P R O B L E M A XV.



1 SIT altitudo AB, locus menſoris C, diſtantia CB, incognita: baſis B, non appareat, & à loco C, non liceat accedere ad AB, neq; recedere, vt duæ ſtationes fiant in plano. Erigatur haſta CE, ſi non præſto ſit turris aliqua CO, & ſtatura menſoris ſit CD. Sumpta deinde portione haſtæ DE, notarum partium, concipiantur ductæ DM, EN, ipſi CB, parallelæ, obſeruenturq; per Quadrantem anguli ADM, AEN. Sumptis quoq; rectis æqualibus EF, DG, pro ſinubus totis, erigantur perpendiculares FH, GI, pro Tangentibus angulorum obſeruationum. Sumpta item AL, æquali ipſi DE, ducatur recta DL, [a] quæ parallela erit ipſi EA, ſecabitque GI, in K. [b] Quoniam vero angulus DKG, angulo DLB, & hic angulo EAB, & hic angulo EHF, æqualis eſt; erit angulus DKG, angulo EHF, æqualis: Eſt autem & rectus G, recto F, æqualis, & latus DG, lateri EF, æquale; [c] erunt quoq, latera GK, FH, æqualia, & anguli D, E, æquales: ideoque IK, differentia erit inter Tangentes, GI, GK, angulorum GDI, GDK, ſiue FEH. [d] Et quia eſt, vt IK, ad KG, ita AL, ad LM; erit per contrariam compoſitionem à nobis in ſcholio propoſ. 18. lib. 5 demonſtratam, ita quoque IK, ad IG, vt AL, hoc eſt, vt ED, differentia ſtationum, ad altitudinem AM. Igitur ſi fiat,

a 33. primi.
b 29. primi.
c 26. primi.
d ſchol. 4. ſexti.

Vt IK, differentia Tangentium	*ad IG, Tangentem maiorem:*	*Ita AL, vel ED, differentia ſtationum*	*ad AM, altitudinem,*

gignetur altitudo AM, cui ſi apponatur ſtatura menſoris MB, tota altitudo AB, nota efficietur. [e] Iam ſi fiat,

e 4. ſexti.

Vt GI, ſinus totus	*ad GD, Tangentem complementi maioris anguli obſeruationis:*	*Ita altitudo inuenta AM,*	*ad MD, diſtantiam,*

inuenta erit diſtantia DM, vel CB.

2. PER ſolos ſinus idem problema conficiemus, ſi prius inueſtigetur hypotenuſa AD, hoc modo. [f] Fiat,

f 10. Trian. rectil.

Vt ſinus anguli ADL, differentia inter angulos obſeruationum ADM, LDM,	*ad AL, hoc eſt, ad DE, differentiam ſtationum:*	*Ita ſinus anguli ALD, qui relinquitur, ſi DLM, complementum minoris anguli LDM, obſeruati ex duobus rectis ſubtrahatur.*	*ad AD,*

Nam productus numerus offeret hypotenuſam AD. [g] Si ergo rurſus fiat,

g 10. Trian. rectil.

Vt ſinus totus anguli recti M,	*ad hypotenuſam AD, inuentam:*	*Ita ſinus maioris anguli obſeruationis ADM,*	*ad AM,*

procreabitur altitudo AM, &c. [h] Si autem fiat,

h 9. Trian. rectil.

Vt ſinus totus anguli recti M,	*ad hypotenuſam AD, proxime inuentam,*	*Ita ſinus anguli DAM, complementi maioris anguli obſeruationis,*	*ad DM,*

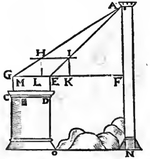
efficietur diſtantia DN, cognita.

3 SI ſine numeris problema ſoluendum eſt, recurrendum erit ad ſuperiora, præſertim ad Num. 6, 8. & 7. problematis 1.

ALTITVDINEM maiorem ex minori cognita, per duas ſtationes in ſummitate, vel in duabus feneſtris factas, etiamſi ſolum maioris altitudinis vertex cernatur, per Quadrantem adinuenire. Atque hinc diſtantiam quoque inter altitudines colligere.

PRO-

PROBLEMA XVI.



1 MAIOR altitudo ſit AN, minor turris CO, cognita, ex qua ſolum cacumen A, non autem baſis N, appareat. Fiant in ſummitate duæ ſtationes in C,D, menſoriſque ſtatura ſit CG, vel DE, & ad AN, intelligatur ducta perpendicularis GEF. Atque inſpecto cacumine A, obſeruentur anguli AEF, AGF. Reliqua fiant, vt in 2. problemate. Si ergo fiat, ſicut in eo problemate demonſtrauimus,

Vt GM, differentia Tangentium GL, EK, angulorum H, I, qui complementa ſunt angulorum obſeruationum, poſitis ſinubus totis HL, IK.	*ad GE, differentiam ſtationum:*	*Ita LH, ſinus totus*	*ad FA,*

Inuenietur altitudo AF, cui ſi adiiciatur FN, conflata ex altitudine turris CO, & ſtatura menſoris, tota maior altitudo AN, nota euadet. Item ſi fiat,

Vt GM, differentia Tangentium earundem	*ad GE, differentiam ſtationum:*	*Ita GL, Tangens complementi minoris anguli obſeruationis*	*ad GF,*

procreabitur diſtantia GF, à qua ſi dematur latitudo turris CO, reliqua erit diſtantia inter duas turres.

HÆC omnia in 2. problemate demonſtrauimus: & ob hanc cauſam eiſdem prorſus literis hic vſi ſumus, quas ibi vſurpauimus, vt demonſtratio ex illo loco in hunc transferri poſſit.

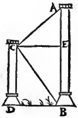
2. QVANDO in ſummitate turris minoris fieri duæ ſtationes nequeunt, eligantur duæ feneſtræ, in quibus duæ ſtationes fiant. Vt in figura præcedentis problematis 15. in minori turri CE, deligantur duæ feneſtræ D, E, & reliqua fiant, vt in haſta CE. Solum pro ſtatura menſoris ad altitudinem inuentam AM, adiicienda eſt portio turris inter inferiorem feneſtram D, & baſem C, vt tota maior altitudo AB, nota efficiatur.

3 SINE numeris nihil noui præcipimus, ſed ad ſuperiora lectorem amandamus.

4 QVO etiam pacto problema hoc per ſolos ſinus poſſit effici, docuimus probl. 2. & 15.

ALTITVDINEM maiorem ex minori incognita, dummodo baſis maioris cerni poſſit, per Quadrantem perſcrutari.

PROBLEMA XVII.



1 SIT maior altitudo AB, & minor CD, incognita poſſitq; baſis maioris B, videri ex minori altitudine. Primum per duas ſtationes in ſummitate turris minoris, vel in duabus feneſtris, inquiratur tam altitudo turris minoris CD, quam diſtantia DB, vt problemate 11. vel etiam 3. & 4. traditum eſt. Nam tunc ex minori altitudine nota CD, maior AB, explorabitur per ea, quæ in antecedente problemate 16. ſcripſimus.

2 AT ex altitudine CD, & diſtantia DB, cognitis diſcemus altitudinem maiorem AB, per ſolos ſinus, hoc modo. Ex aliqua feneſtra C, minoris altitudinis inſpiciantur extrema A, B, maioris altitudinis per angulos ACE, BCD, (ducta prius CE, ipſi DB, parallela, vel ad vtramq; altitudinem perpendiculari.) [a] Deinde fiat,

a 12. Trian. rectil.

Vt ſinus anguli CBD, complementi illius, quo baſis inſpicitur	*ad inuentam altitudinem CD:*	*Ita ſinus totus anguli recti D,*	*ad BC,*

Vel

Vt ſinus anguli BCD, quo baſis inſpicitur,	*ad inuentam diſtantiam BD:*	*Ita ſinus totus anguli recti D,*	*ad BC,*

b 10. trian. rectil. vtroque enim modo cognita erit hypotenuſa BC. [b] Si ergo rurſus fiat,

Vt ſi-

Vt ſinus anguli A, complementi illius quo cacumen inſpicitur,	*ad inuentam hypotenuſam BC:*	*Ita ſinus anguli ACB, conflati ex complemento anguli, quo baſem intuemur, & ex angulo, quo faſtigium cernitur.*	*ad AB,*

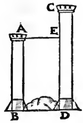
manifeſtabitur altitudo maior AB.

3 DE ſolutione problematis ſine numeris nihil noui hic præcipimus, ſed ea ex ſuperioribus petenda eſt.

ALTITVDINEM minorem ex maiori cognita, licet baſis minoris non cerni poſſit, ope Quadrantis perueſtigare. Atque hinc diſtantiam quoque inter altitudines duas eruere.

PROBLEMA XVIII.

1 MINOR altitudo AB, ex maiore CD, cognita proponatur addiſcenda, etiamſi baſis B, non cernatur. Concipiatur ducta recta AE, ipſi BD, parallela, vt ED, minori altitudini AB, ſit æqualis. Si igitur ex duabus ſtationibus in ſummitate maioris altitudinis CD, factis, per problema 3. vel ex duabus feneſtris, per problema 4. inueſtigetur tam altitudo CE, quam diſtantia AE, inſpecto cacumine A, ac ſi eſſet ſignum aliquod in Horizonte AE, viſum, & CE, ex toto altitudine CD, auferatur, reliqua ED, hoc eſt, minor altitudo fiet nota. Diſtantia autem AE, inuenta quæſitæ BD, eſt æqualis: ac proinde DB, cognita erit.



ALTITVDINEM minorem ex maiori incognita, dummodo baſis minoris videri poſſit, per Quadrantem explorare. Atque hinc diſtantiam quoque inter duas altitudines conijcere.

PROBLEMA XIX.

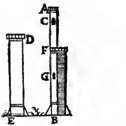
1 REPETATVR figura præcedentis problematis. Et quia baſis B, minoris altitudinis ex maiore apparet; ſi punctum B, ex duabus ſtationibus in ſummitate maioris altitudinis CD, factis inſpiciatur, reperietur per problema 3. tam altitudo maior CD, quam diſtantia BD. Quod etiam efficies per problema 4. ſi punctum B, ex duabus feneſtris maioris altitudinis CD, inſpiciatur. Cognita ergo altitudine maiori CD, inuenietur minor altitudo AB, vt in præcedenti problemate traditum eſt. Cum igitur & diſtantia BD, ſit explorata, patet ſolutio problematis propoſiti.

PORTIONEM altitudinis maioris ex minore altitudine, & minoris portionem ex maiori cognoſcere per Quadrantem.

PROBLEMA XX.

1 SIT portio AC, maioris altitudinis AB, exquirenda ex minore altitudine DE: Item portio FG, minoris altitudinis FB, ex altitudine maiore DE. Si DE, altitudo minor eſt proportione CB, inueſtigetur tam altitudo maior AB, quam CB, ex minore altitudine DE, per problema 16. vel 17. prout videlicet DE, cognita fuerit aut incognita. Nam CB, ablata ex AB, notam relinquet portionem AC, quæſitam.

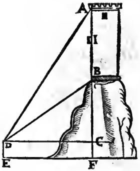
2 SI vero DE, maior eſt portione FB, explorandaque ſit portio AF; inquirenda quidem erit maior altitudo AB, ex minore DE, per problema 16 vel 17. At vero alitudo minor FB, ex maiore DE, per problema 18. vel 19. exploranda erit. Nam rurſus FB, detracta ex AB, notam relinquet portionem AF.



3 NON ſecus per problema 18. vel 19. indaganda erit vtraque altitudo minor FB, GB, ex maiore DE, vt illarum differentia FG, quæ quæritur, colligatur nota.

ALTITVDINEM, cuius baſis impoſita ſit alteri altitudini, & vtraque illius extremitas cerni poſſit, etiamſi infimum punctum alterius, cui imponitur, lateat, & eiuſdem puncti infima diſtantia à loco menſoris cognita non ſit, per Quadrantem ex valle, aut ex plano Horizontis explorare.

PROBLEMA XXI.



a 10. Trian. rectil.

1 HVIVSCEMODI altitudo eſt turris ſupra montem poſita, & portio alicuius ædificii inter duas feneſtras, vel duo ſigna, quorum alterum altero ſuperius eſt. Sit igitur ſupra montem altitudo turris AB, propoſita. Ex aliquo loco E, in planitie, aut valle, vnde vtrumque extremum A, B, videatur, obſeruentur per Quadrantem anguli ADC, BDC, quos radij DA, DB, cum recta DC, quæ ex D, ad AB, productam intra montem eſt perpendicularis: ita vt ſtatura menſoris ſit DE. Deinde per problema 6. inueſtigetur longitudo vtriuſque radij DA, DB.[a] Nam ſi fiat in triangulo ABD,

Vt ſinus anguli BAD, qui complementum eſt maioris anguli ADC, obſeruati,	*ad radium DB, proxime inuentum:*	*Ita ſinus anguli ADB, qui differẽtia eſt angulorum obſeruationum ADC, BDC,*	*ad AB, altitudinem*

b 10. trian. rectil. inuenta erit altitudo AB, quæſita in partibus, in quibus cognitus eſt radius DB.[b] Sic etiam, ſi fiat,

Vt ſinus anguli ABD, vel (quod idem eſt) anguli DBC, qui cõplementum eſt minoris anguli obſeruati BDC,	*ad radium DA, proxime inuentum:*	*Ita ſinus anguli ADB, differentia angulorum obſeruatorum ADC, BDC,*	*ad AB, altitudinem.*

prodibit rurſus altitudo quæſita AB, in partibus radii inuenti DA.

ALITER.

2 PER problema 2. vel 15. inueſtigetur tam altitudo inacceſſibilis AC, quam BC, ſecluſa menſoris ſtatura CF. Altitudo namque BC, ex altitudine AC, detracta notam relinquet altitudinem AB, quæ quæritur.

ALITER

c 4. Trian. rectil. 3 INVENTA diſtantia DC, per ea, quæ in problemate 1. & 2. tradidimus, [c] ſi fiat,

Vt ſinus totus DC,	*ad diſtantiam cognitam DC,*	*Ita AC. Tangens maioris anguli obſeruati ADC,*	*ad AC,*

d 4. trian. rectil. reperietur altitudo maior AC, in partibus diſtantiæ inuentæ DC.[d] Et ſi rurſus fiat,

Vt ſinus totus DC,	*ad diſtantiam inuentam DC,*	*Ita BC, Tangens minoris anguli obſeruati BDC,*	*ad BC,*

cognita fiet altitudo minor BC, in partibus eiuſdem diſtantiæ inuentæ DC, quæ dempta ex maiore altitudine AC, notam relinquet altitudinem turris BA, quæſitam.

ATQVE hæc ratio commodiſſima eſt, quando in turri aliqua, vel ædificio, cuius diſtantia à menſore cognita ſit, metiendum eſt interuallum perpendiculare inter duas feneſtras.

ALITER

4 INVENTA rurſum diſtantia DC, per ea, quæ in problemate 1. & 2. ſcripſimus; detrahatur Tangens BC, (poſito ſinu toto DC,) minoris anguli obſeruati ADC, vt nota remaneat AB, differentia dictarum Tangentium. Nam ſi fiat.

Vt ſinus totus DC,	*ad diſtantiam inuentam DC,*	*ita AB, differentia Tangentium AC, BC,*	*ad AB, altitudinem,*

procreabitur altitudo quæſita AB, in partibus diſtantiæ inuentæ DC.

ALITER

5 INVENTA per problema 2. vel 15. altitudine montis BC, obſeruentur anguli BDC, ADC, per radios DB, DA. Poſito namque ſinu toto DC, ſi fiat,

Vt BC, Tangens minoris anguli obſeruati BDC,	*ad BC, altitudinem inuentam;*	*Ita AB, differentia Tangentium AC, CB, angulorum obſeruatorum ADC, BDC.*	*ad AB,*

prodi-

prodibit rurſus altitudo nota AB, quam quærimus.

SCHOLIVM.

ITAQVE ſi AB, portio ſuperior totius alicuius altitudinis AC, deſideretur, inueſtiganda erit per Probl. 2. vel 5. tam tota altitudo AC, quam eius inferior portio BC. Earum enim differentia notam dabit ſuperiorem portionem AB.

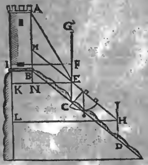
SI autem media aliqua portio IB, cognoſcenda eſt, coniicienda rurſus erit vtraque altitudo IC, BC, vt earum differentia IB, nota reddatur.

SI denique inferior pars BC, proponitur inquirenda, fiet id per probl. 2. vel 15.

DISTANTIAM accliuem montis à loco menſoris vſque ad baſem altitudinis monti impoſitæ, etiam non viſam, vna cum ipſa altitudine, quando menſor in aſcenſu montis conſiſtit, prope verum efficere cognitam, beneficio Quadrantis.

PROBLEMA XXII.

1 SIT turris AB, monti impoſita, in cuius aſcenſu ſeu latere menſor conſiſtat in C. ex quo loco baſem turris videre non poſſit. Erigatur haſta aliqua CG, ad Horizontem, non autem ad latus montis, perpendicularis, ſitque menſoris ſtatura CE. Cogitetur ducta EK, ad altitudinem perpendicularis: Et inſpecto cacumine A, per angulum AEK, fiat alia ſtatio ſuperior in F, ductaq; FI, ad altitudinem perpendiculari, inſpiciatur idem cacumen A, per angulum AFI. [a] Et quia angulus AFG, duobus angulis FEA, FAE, eſt æqualis: ſi dematur AEF, complementum maioris anguli AEK, in prima ſtatione obſeruati, reliquus fiet angulus EAF. [b] Igitur ſi fiat, a 32. primi.



b 10. triang. rectil.

Vt ſinus anguli EAF, differentia complementorum angulorũ obſeruationum	*ad EF, differentiam ſtationum:*	*Ita ſinus anguli AFE, conflati ex recto EFI, & minore angulo AFI, in ſecunda ſtatione obſeruati,*	*ad AE, hypotenuſam.*

efficietur nota hypotenuſa AE. Poſt hæc erigatur alius baculus DH, ad Horizontem rectus, ſumptaque menſoris ſtatura DH, ipſi CE, æquali, & ducta recta HL, ad altitudinem perpẽdiculari, inſpiciatur punctum E, per angulum EHL. & per radium HEM; [c] qui ipſi BCD, lateri montis parallelus erit. Concipienda enim ſunt tria puncta B, C, D, in vna recta iacere, ac ſi DC, producta ad baſem turris perueniret. [d] Quia vero angulus EHL, angulo MEK, æqualis eſt: ſi hic ex maiori angulo obſeruato AEN, in prima ſtatione dematur, reliquus fiet angulus AEM. Eſt autem & angulus EAN, cognitus, quippe cum ſit complementorum maioris anguli obſeruati AEN. Igitur & AME, reliquus duorum rectorum cognitus erit: qui quidem etiam relinquitur, ſi complementum anguli MHL, in ſtatione D, obſeruati ex duobus rectis detrahatur. [e] Igitur ſi fiat, c 33. prim. d 29. prim. e 10. triang. rectil.

Vt ſinus anguli AME, qui relinquitur, ſi complementum poſtremi anguli obſeruati MHL, ex duobus rectis dematur	*ad hypotenuſam AE, nuper inuentam:*	*Ita ſinus anguli EAN, complementi maioris anguli obſeruati AEN,*	*ad ME,*

inuenta erit recta EM, hoc eſt, diſtantia quæſita CB, [f] Et ſi rurſum fiat, f 10. triang. rectil.

Vt ſinus eiuſdem anguli AME,	*ad eandem hypotenuſam AE, nuper inuentam:*	*Ita ſinus anguli AEM, qui relinquitur, ſi angulus poſtremo loco obſeruatus MHL, vel MEK, ex angulo maiori obſeruato AEK, detrahatur,*	*ad AM,*

producetur AM, cui ſi addatur menſoris ſtatura MB, tota altitudo AB, cognita erit.

DANDA autem erit opera diligenter, vt tria puncta B, C, D, in vna recta iaceant, hoc eſt, vt recta ab vltima ſtatione D, per primam C, ducta per baſem B, tranſeat, quod plus minus iudicio ſenſuum aſſequemur. Nam per ea, quæ dicta ſunt hoc loco ſolum reperitur diſtantia à loco C, vſque ad punctum altitudinis, in quod recta

 DC, pro-

DC, protracta incidit, & altitudo ab A, vſque ad idem punctum, quod non multum à puncto B, diſtabit, ſi diligentia adhibeatur in ſtationibus C, D, captandis. Propter hanc cauſam in propoſitione diximus (prope verum efficere cognitam) quia neque diſtantia CB, neque altitudo AB, præciſe cognoſcitur, niſi quando tria puncta B, C, D, in recta linea iacent.

2 VT ſine numerorum auxilio problema efficias, recurrendum erit ad ſuperiora.

PROFVNDITATEM putei, vel ædificii cuiuſcunque ad perpendiculum erecti, ſi modo angulus fundi, vel ſignum aliquod in fundo poſitum conſpiciatur, per Quadrantem reperire.

PROBLEMA XXIII.



1 HOC nihil eſt aliud, niſi turrim ex eius vertice, quando in Horizonte ſignum aliquod apparet, per duas ſtationes in haſta aliqua factas metiri, vt prob. 4 factum eſt. Operationem ergo eius problematis hic repetemus. Sit puteus, ſeu ædificium erectum ABCM, cuius angulus C, in fundo, vel ſignũ C, in fundo poſitũ conſpici poſſit. Erecta haſta AE, in orificio putei, vel ſummitate ædificii, fiant duæ ſtationes oculi menſoris in D, E, inſpiciaturq; punctum C, per radios DC, EC, faciẽtes angulos BDC, BEC: Sumptis deinde DF, EG, ęqualibus pro ſinubus totis, ducantur ad EB, perpendiculares FH, GI, pro Tangentibus angulorum BDC, BEC, obſeruatorum. Ducta quoq; DL, ipſi EC. parallela ſecante FH, in K, vt KH, differentia ſit Tangentium, quemadmodum problemate 4. demonſtrauimus. Si igitur, vt ibi, fiat hic,

Vt KH, differentia inter Tangentes angulorum obſeruatorum	*ad FK, vel ad GI, Tangentem minorem:*	*ita DE, differentia ſtationum, hoc eſt, ſpatium inter oculos, vel angulos obſeruationum,*	*ad DB,*

prodibit recta DB, nota, vt problemate 4. oſtendimus: ex qua ſi ſubtrahatur ſegmentum haſtæ AD, inter orificium, & oculum in prima ſtatione, reliqua fiet profunditas, ſiue altitudo putei, vel ædificij AB.

ALITER

2 POSITO ſinu toto BC, fiat.

Vt DE, differentia Tangentium BD, BE, quæ complementũ angulorum obſeruatorũ debẽtur,	*ad DB, Tangentem minorem*	*Ita DE, differentia ſtationum oculorum*	*ad DB,*

Nam numerus procreatus notam exhibebit eandem rectam DB, &c.

ALITER

3 SI per ſolos ſinus operari lubeat, ita agendum erit. [a] Quoniam angulus maior obſeruatus BDC, duobus angulis E, DCE, æqualis eſt; ſi angulus E, minor obſeruatus tollatur ex maiore BDC, notus remanebit angulus DCE, differentia angulorum obſeruatorum.

[a] 32. primi.

[b] Igitur ſi fiat,

[b] 10. trian. rectil.

Vt ſinus anguli DCE, differentia angulorum obſeruatorum	*ad DE, differentiam ſtationum oculorum.*	*Ita ſinus anguli E, minoris obſeruati*	*ad DC*

proſiliet nota hypotenuſa DC. [c] Quapropter ſi rurſum fiat,

[c] 10. trian. rectil.

Vt ſinus totus anguli recti B,	*ad hypotenuſam DC, proxime inuentam:*	*Ita ſinus anguli BCD, complementi maioris anguli obſeruati*	*ad DB,*

euadet iterum cognita recta DC, &c.

4 IAM vero ſi latitudo orificii AM, vel fundi BC, cognita fuerit. (Non erit autem difficile eam aliqua menſura nota metiri) facilius in cognitionem altitudinis, profunditatiſue AB, veniemus, per vnicam videlicet ſtationem in D, factam, hoc modo. Fiat,

Digitized by Google

Vt ſinus totus CB,	*ad BD, Tangentem anguli BCD, complementi anguli obſeruationis.*	*ita latitudo cognita CB,*	*ad DB,*

Numerus enim procreatus offeret DB, notam, vt ſupra, &c.

VEL per ſolos ſinus,[a] ſi fiat,

Vt ſinus anguli BDC, obſeruationis	*ad latitudinem cognitam BC:*	*Ita ſinus anguli BCD, complementi anguli obſeruationis.*	*ad DB:*

[a] 10. trian. rectil.

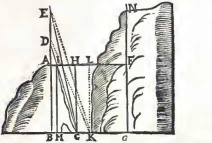
inuenietur rurſus DB, &c.

5 VT idem aſſequaris ſine auxilio numerorum, conſule ea, quæ problemate 4. Num. 4. ſcripſimus.

PROFVNDITATEM vallis, eiuſdemque deſcenſum obliquum, ſi non ſit valde inæqualis, eiuſque terminus, vel aliquod in ea ſignum conſpici poſſis, per Quadrantem ſcrutari.

PROBLEMA XXIV.

1 HOC etiam nihil aliud eſt, niſi altitudinem quampiam ex eius ſummo faſtigio per duas ſtationes dimetiri, vt problemate 4. oſtenſum eſt. Sit enim vallis inter duos montes AB, FG, poſita, & terminus ipſius C, ex monte AB, poſſit conſpici. Erecta haſta aliqua AE, fiant in D, & E, duæ ſtationes, obſeruenturque anguli D, & E, inſpecto termino C, per radios DC, EC. Intelligatur autem recta EA, vſque ad baſem montis extenſa in B: & recta excurrens AF, ipſi BG, parallela, vel ad EB, perpendicularis: & deniq; CH, ipſi AB, parallela,[a] quæ altitudini AB, æqualis erit, ita vt AB, vel HC, ſit profuoditas vallis ab A, vſque ad baſem montis, & IC, eius deſcenſus obliquus. Liquido autem conſtat, profunditatem AB, vel CH, exquiri poſſe, vt problemate 4. altitudo turris AB, ex duabus ſtationibus in haſta AE, factis, vel in duabus feneſtris, vel certe, vt in præcedenti problemate profunditas putei AB, inuenta fuit.



[a] 34. primi.

DESCENSVS autem obliquus IC, ita notus euadet. Quoniam, vt in antecedente problemate monſtratum eſt, angulus DCE, differentia eſt angulorum BDC, BEC, obſeruatorum:[b] ſi fiat,

Vt ſinus anguli DCE, differentiæ inter angulos obſeruatos	*ad DE, differentiam ſtationum oculorum:*	*Ita ſinus anguli E, minoris obſeruati*	*ad DC,*

[b] 10. trian. rectil.

cognita fiet recta DC, ex qua ſi detrahatur DI, (quam facile ab oculo vſque ad rectam AI, menſurare poteris, cum ſit exigua) notus remanebit deſcenſus obliquus IC.

2 QVOD ſi terminus C, in fundo cerni nequeat, inſpiciendum erit ex D, & E, aliquod aliud ſignum K, in valle, & obſeruandi anguli BDK, BEK, per radios DK, EK. Ex his enim rurſus profunditas AB, vel KL, deprehendetur, vt in problemate 4. docuimus.

QVIN etiam, ſi in plano vallis commode duæ ſtationes fieri poſſint: cognoſci ex illis poterit altitudo montis AB, vel IM, per ea, quæ in problem. 2. ſcripſimus: deſcenſus vero obliquus IC, hoc eſt, interuallum inter I, & C, ex iis, quæ in probl. 7. tradita ſunt.

3 EANDEM denique profunditatem CH, perſcrutari licebit ex altiore monte NG, dummodo infimus terminus C, minoris montis ex cacumine N, appareat, vel aliquod aliud ſignum in valle; non aliter, quam in problemate 18. vel 19. altudinem minorem ex maiori incognita indagare docuimus. Nam hic maior altitudo eſt NG, & minor CH, cuius terminum C, ex N, cerni poſſe ſtatuimus.

4 ABSQVE numerorum multiplicatione, ac diuiſione res peragetur, vt in antecedentibus dictum eſt.

FINIS LIBRI SECVNDI.

GEOMETRIÆ PRACTICÆ
LIBER III.

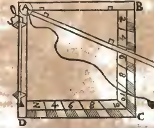
Earundem linearum rectarum dimenſionem per Quadratum Geometricum exequens.

QVONIAM dimenſio rectarum linearum per Quadrantem Aſtronomicum ſuperiori lib. expoſita requirit tabulas Sinuum, Tangentium, & ſecantium, non ſemper autem eiuſmodi tabulas ad manum habere poſſumus, immo neque omnes in illis verſati ſunt, atque exercitati: propoſitum nobis tertio hoc libro eſt, lineas rectas, longitudines videlicet, latitudines, altitudines, & profunditates dimetiri per Quadratum Geometricum, vbi prædictis tabulis non indigemus, ſed omnia per vmbram rectam, & verſam, vt vocant, expediuntur. Qua tamen in re non nihil ab aliis ſcriptoribus diſſidebimus, quippe cum aliter tam vmbram rectam, quam verſam in partes diuiſuri ſimus, quam ab illis fieri ſolet, vt nimirum per noſtram partitionem expeditius dimenſiones perficiantur, quod prudens Lector facile iudicabit, ſi noſtram hanc diuiſionis rationem cum aliorum partitione contulerit. Sed principio Quadratum Geometricum conſtruendum eſt, explicandumq; quo pacto tam in Quadrato ſtabili, quam in pendulo vtraq; vmbra, recta videlicet, ac verſa conſiderari debeat. Neq; enim ſemper eundem ſitum prædicta vmbra in inſtrumento ſeruant, ſed pro varietate vſuum non raro eum permutare ſolent, vt ex iis, quæ ſequuntur, liquido conſtabit.

QVADRATI Geometrici conſtructio.

Compoſitio Quadrati Geometrici.

1 EX quauis materia ſolida & dura conficiatur quadratum ABCD, ſiue ſolidum totum, ſiue excauatum: vel potius ex quatuor regulis æqualibus AB, BC, CD, DA, ita compactum, vt omnes in vno eodemque plano exiſtant. Deinde in duabus regulis BC, CD, ducãtur tres parallelæ extremitatibus quadrati pro partibus & numeris vtriuſque vmbræ deſignandis, vt in figura apparet. Latus BC, vmbræ rectæ, & CD, vmbræ verſæ deſtinatur à Geometris: Vtrumq; autem in 12. partes æquales partiri ſolent omnes, qui de vſu Quadrati Geometrici ſcripſerunt: Et ſi capacitas inſtrumenti permittit, ſingulas partes in 60. ſubdiuidunt, vt tota vmbra partes 720. complectatur, vel in 100. vt partes 1200. in vtraque vmbra exiſtant. Ego vtramque vmbram in 10. partes duntaxat æquales diuido, niſi inſtrumentum ſit tantæ magnitudinis, vt commode vtraque recta BC, CD, in 100. aut 1000. partes ſecari poſſit, ſubdiuiſis videlicet ſingulis decimis partibus in 10. vel 100. particulas. Figura porro ex vtraq; vmbra conſtans dici ſolet à Geometris Scala altimetra.



Vmbra recta & verſa in quadrato qua, & in quot partes à Geometris vtraque ſecetur.

In quot partes vtraq; vmbra noſtro quadrato diuidatur.

Scala altimetra quid.

Quare noſtra diuiſio vmbræ præferatur aliorum diuiſioni.

2 ANTEPONO autem diuiſioni conſuetæ in 12. vel 720 vel 1200 partes diuiſionẽ noſtram in partes 10. vel 100. vel 1000. æquales, propterea quod, ſi inſtrumentum propter paruitatem ſectum ſit tantummodo in 10. partes, facili admodum negotio cognoſcere poſſumus, quot centeſimæ, vel etiam milleſimæ partes in qualibet particula cuiuſcunque partis decimæ rectarum BC, CD, aſſignata comprehendantur: non ſecus ac ſi vtraque recta in 100. vel 1000. partes ſecta foret, vt Num. 14. ca. 2. lib. 1. copioſe expoſuimus. Huc accedit, quod in dimetiendis lineis per Quadratum Geometricum fieri ſemper debeat multiplicatio, aut diuiſio per omnes partes lateris BC, vel

BC, vel CD: Manifeſtum autem eſt, faciliorem eſſe multiplicationem, diuiſionemue per 10. aut 100. vel 1000. quam per 12. aut 720. vel 1200. cum illa fiat per ſolam appoſitionem, vel detractionem 0. vel 00. vel 000. vt in noſtra Arithmetica practica declarauimus.

INVENIO quidem latus quadrati à doctiſſimo Io. Antonio Magino diuiſum quoq; eſſe, & quidem optimo conſilio, in 100. partes æquales; quamuis ab eo regula non tradatur, qua cognoſcendum ſit, quot partes milleſimæ in quauis particula vnius centeſimæ comprehendantur, quod tamen omnino neceſſarium eſt, vt dimenſiones, ac ſtellarum altitudines exquiſitè obſeruentur: præſertim ſi propter inſtrumenti paruitatem latus in tot partes duntaxat commode poſſit diuidi. Id quod per noſtram doctrinam, vt diximus, ſine magno labore effici poteſt.

3 POST hæc è centro A, procedat filum cum perpendiculo, aut certe regula tenuis, cum linea fiduciæ, quæ pendens libere moueatur, vt lib. 1. cap. 2. Num. 6. tradidimus: & in latere AB, duo pinnacidia affigantur, de quibus lib. 1. cap. 2. Num. 5. dictum eſt, ſi quadratum in ſuo vſu debeat eſſe pendulum. Nam ſi illud ſtabile eſſe velis, affigenda eſt circa centrum A, dioptra, hoc eſt, regula cum linea fiduciæ, ac duobus pinnacidiis, eodem artificio conſtructis, vt libere poſſit circumduci, & in omni ſitu firmari, vt loco ſupra citato in Quadrante ſtabili faciendum eſſe præcepimus. *Quadratũ pendulum, ac ſtabile.*

POSTREMO iuxta latus AD, in plano quadrati (Nam ſi hoc fieret extra, prope craſſitiem inſtrumenti, non poſſet quadratum in plano Horizontis locari erectum ſupra latus AD, quod tamen vt fiat, non raro vſus quadrati poſtulat:) apponantur duæ tabellæ perforatæ cum filo, & perpendiculo, vt eius beneficio dignoſcere poſſis, num inſtrumentum rectum ſit ad Horizontem, nec ne, quod omnino neceſſarium eſt.

4 SED doceamus, quem ſitum vtraque vmbra in vſu quadrati habeat. Res enim hæc non parui momenti eſt, vt in dimenſionibus nulla confuſio inter vmbras oriatur. In quadrato ergo pendulo vmbra verſa opponitur ſemper lateri pinnacidiorum: recta autem cum eodem latere concurrit in puncto à centro A, remotiori, vt in figura latus vmbræ rectæ eſt BC, verſæ autem CD. At in quadrato ſtabili, ſi metienda ſit altitudo, & centrum A, inferiorem obtineat locum, in eoque oculus ponatur, latus vmbræ rectæ ſupremam occupabit ſedem; latus vero vmbræ verſæ vergere debebit verſus ipſam altitudinẽ; ita vt tunc baſis inſtrumẽti ſit AD, quo pacto iterũ vmbra recta eſt BC, & verſa CD. Si autẽ centrũ A, ſuperiorẽ locũ poſſideat, & oculus in extremitate dioptræ exiſtat, (q̃ etiã fieri poteſt) latus vmbræ rectæ erit baſis CD, & latus vmbræ verſæ BC, prope oculum, & ab altitudine metiẽda remotius. Si autẽ longitudo metienda proponatur, centrumq; A, in ſuperiori loco ſitũ ſit, & in eo oculus collocetur, erit quoq; baſis CD, latus vmbræ rectæ, latus autẽ BC, vmbræ verſæ deputabitur, quod quidem verſus longitudinem metiendam vergere debebit, & longius ab oculo abeſſe. At vero ſi centrum A, ponatur in loco inferiori, ita vt baſis ſit AD, oculus autem in extremitate dioptræ conſiſtat, (quod etiam fieri poteſt, præſertim ſi quadratum in ſublimi fuerit poſitum, vt in monte, vel turri aliqua) latus vmbræ rectæ erit BC, baſi AD, oppoſitum, vmbræ vero verſæ latus erit CD, quod ſcilicet longius à longitudine metienda recedit. In vtroque porro quadrato centrum A, per diametrum opponitur puncto, in quo vmbra recta cum verſa concurrit: & in ſtabili vmbra recta perpetuo vel ſupremum locum occupat, quando videlicet centrum A, infimam ſedem tenet; vel infimum locum, quando ſcilicet centrum A, in ſuperiori loco exiſtit, vt ex dictis liquet. Hæc non negligenter conſideranda ſunt, ne in vario inſtrumenti vſu vmbram rectam pro verſa accipias, aut contra; quandoquidem pro diuerſo ſitu quadrati ſtabilis tam latus BC, quam CD, modo vmbræ rectæ, modo verſæ munus obire poteſt, vt diximus. *Vmbra recta & verſa, quo pacto in vtroq; quadrato cognoſcenda ſit.*

5 QVAMVIS autem vel ſola vmbra recta, vel verſa ſatis ſit ad altitudines, longitudines, profunditateſque perueſtigandas, vt ex ſequentibus fiet manifeſtum: vtraque tamen aſſumitur à Geometris, eo quod interdum vmbra recta excedit latus BC, nimirum quando filum perpendiculi, aut linea fiduciæ ſecat latus CD: Tunc enim neceſſario latus BC, produci debet, vt ſecari poſſit. Item ſæpe numero vmbra verſa ſuperat latus CD, quãdo videlicet filum perpendiculi, aut linea fiduciæ interſecat latus BC; Tunc enim neceſſario latus DC, productum verſus C, ſecabitur, vt perſpicuum eſt. Ne ergo cogamur vel latus BC, vel CD, producere, aſſumenda eſt vmbra quidem verſa, quando recta latus BC, excedit: recta autem, quando verſa ſuo latere CD, maior eſt.

6 EST autem perpetuo latus quadrati, quod Gnomonem appellant, medio loco proportionale inter vmbram rectam ac verſam. Secet namque in quadrato pendulo filum perpendiculi, vel in ſtabili linea fiduciæ, latus vmbræ BC, in E, & latus vmbræ DC, productum in F. Erunt igitur triangula ABE, ADF, æquiangula, cum anguli B, D, recti ſint, [a] & tam alterni BAE, DFA, quam BEA, DAF, æquales. [b] Quamobrẽ erit vt BE, vmbra abſciſſa ad gnomonem BA, ita gnomon AD, ad vmbram abſciſſam DF: hoc eſt, gnomon BA, vel AD, medio loco eſt proportionalis inter duas vmbras BE, DF, quarum vna recta eſt, & altera verſa. *Gnomon medio loco proportionalis eſt inter vmbrã rectam, & verſam.* *a 29. primi.* *b 4. ſexti.*



7 HINC facilis eſt reductio vnius vmbræ ad aliam, quod non raro vſu venit. Nam ſi gnomon complectens partes 1000. (in tot namque partes latus quadrati diuiſum concipere lubet) in ſe multiplicetur, & productus numerus quadratus 1000000. lateris AB, per alterutram vmbram diuidatur, indicabit Quotiens partes alterius vmbræ: hoc eſt, ſi fiat, *Reductio vmbræ rectæ ad verſam, & contra.*

Vt alterutra vmbra ad gnomonem ita gnomon ad alteram vmbram

hoc eſt, ſi quadratus numerus lateris quadrati, vel gnomonis, videlicet 1000000. per alterutrã vmbram diuidatur. Verbi gratia ſi ponatur BE, vmbra recta partium 700. diuidaturq; numerus quadratus 1000000. lateris AB, per 700. producetur vmbra verſa DF, partium $1428\frac{4}{7}$. Sic etiam, ſi BE, ſtatuatur vmbra verſa partium 700. reperietur vmbra recta DF, partium $1428\frac{4}{7}$. Quod ſi vna vmbra ſit 400. erit altera 2500. & ſic de cæteris. Sed iam ad vſum vtriuſque quadrati accedamus.

ALTITVDINEM Solis, vt ſtellæ cuiuſuis per quadratum Geometricum obſeruare.

PROBLEMA I.

Altitudo ſolis, vel ſtellæ, quo pacto per quadratũ cognoſcatur.

1. PRÆPARETVR baſis plano Horizonti æquidiſtans, vt ſupra illam Quadratum ſtabile erectum, ſit ad Horizontem perpendiculare. Eleuetur deinde pendulum quadratum, centro A, ad Solem, vel ſtellam verſo, ita vt eius planum per centrum Solis, aut ſtellæ tranſeat, donec radius Solis per duo foramina pinnacidiorum tranſire deprehendatur: vel radius viſualis per eadem foramina pinnacidiorum ſtellam videat. Idemque fiat cum quadrato ſtabili, collocando nimirum eius latus AD, vel CD, ſupra baſem præparatam, ipſumque circumducendo, ita vt eius planum per centrum Solis aut ſtellæ incedat; ac denique eleuando dioptram, donec radius Solis per foramina pinnacidiorum tranſeat, vel radius viſualis per eadem foramina ſtellam conſpiciat. Quo peracto, conſideretur ſumma diligentia angulus, quem filum perpendiculi, vel linea fiduciæ in dioptra cum proximo latere quadrati conſtituit, inueſtigando magna cum cura, & diligentia per ea quæ lib. 1. cap. 2. Num. 14. tradidimus, quot partes milleſimæ ex vmbra ſiue recta, ſiue verſa abſciſſæ ſint à filo perpendiculi, vel linea fiduciæ. Ille enim angulus, ſi quidem vmbra recta interſecetur, (quæ in quadrato ſtabili vel ſupremum, vel infimum occupat: In pendulo vero cum latere pinnacidiorum coniungitur, vt ſupra diximus) dabit, vt Numero 2. demonſtrabimus, complementum altitudinis Solis aut ſtellæ: Si vero vmbram verſam filum, aut dioptra interſecet, ipſemet angulus altitudinem exhibebit. Quantitatem porro huius anguli ita cognoſcemus. Sit quadratum ſiue pendulum ſiue ſtabile (eadem enim eſt in vtroque ratio) ABCD, abſciſſaque ſit vmbra recta BE, quæ in partibus milleſimis lateris BC, reperietur, vt cap. 2. Num. 14. lib. 1. docuimus, etiamſi latus ipſum ſit ſolum in 10. vel 100. partes diuiſum: quæ quidem vmbra BE, ſtatuatur, verbi gratia, eſſe partium 850. Quia ergo duo latera AB, BE, trianguli rectanguli ABE, nota ſunt, cum AB, ſit 1000. & BE, 850.[a] ſi fiat,



Quando angulum, quem filum cum proximo quadrati latere facit, offerat altitudinẽ ſolis. & quando complemẽtum altitudinis.

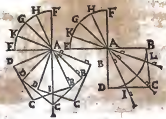
a 8 triang. rectil.

Vt latus quadrati AB, 1000.	*ad ſinum totum 100000.*	*Ita latus, vel vmbra BE, 850.*	*ad Tangentem anguli BAE,*

(quod quidem factum erit, ſi ad latus BE, hoc eſt, ad 850. duæ cifræ apponãtur) reperietur Tangẽs anguli BAE, 85000. quæ in tabula Tangentium non reperietur; ſed proxime minor eſt 84956. cui reſpondent gradus 40. min. 21. Et quia differentia inter Tangentem inuentam 85000. & 84956 in tabula ſumptam, eſt 44. Differentia autem inter duas Tangentes proximas 84956. & 85006. eſt 50. cui debetur 1. minutum, ſiue Sec. 60. propterea quod poſteriori Tangenti 85006. reſpondet vnum minutum amplius, quam Tangenti priori 84956. reperiemus per regulam trium, quot ſecunda differentiæ 44. congruant; ſi dicamus. Si differẽtia 50. poſcit, ſec. 60. quot ſecunda poſcit differentia 44? inueniemuſque ſec. 52$\frac{4}{5}$. hoc eſt, ſec. 53. fere. Angulus ergo BAE, continet grad. 40. Min. 21. ſec. 53. paulo minus. Complementum igitur, nimirum grad. 49. Min. 38. ſec. 7. fere, oſtendet altitudinem Solis, & ſtellæ. Et ſi vmbra DF, eſt verſa partium quoq; 850. erit ipſemet angulus DAF, inuentus grad. 40. Min. 21. ſec. 53. altitudo Solis, & ſtellæ. Atque hoc modo ſi diligenter partes vmbræ explorabimus reſpectu lateris BC, vel CD, 1000. quemadmodum lib. 1. cap. 2. Num. 14. traditum eſt, inuenietur ſemper altitudo Solis, aut ſtellæ in grad. Min. & ſec. Sed quia moleſtum eſt, ac laborioſum, per differentias Tangentium Secunda inquirere, ſatis erit Tangentem anguli inuentam in tabula quærere, & ſi quidem reperta fuerit, accipere gradus, & minuta reſpondentia; ſi vero non fuerit inuenta, ſumere Tangentem, vel minorem, vel maiorem, quæ nimirum minus ab inuenta, differat, &c. Hac ratione ſumenda erit in noſtro exemplo Tangens 85006. cui reſpondent grad. 40. Min. 22. complementum autem erit grad. 49. Min. 38. veluti prius, ſolum deſunt ſec. 7. quæ nullius ſunt momenti. Vt autem ſtudioſos moleſtia hac ſupputandi liberem, conſtruxi ſequentem tabulam pro ſingulis partibus milleſimis vtriuſque vmbræ: In qua ſi centenæ in vertice, & reliquæ vnitates in latere ſumantur, illico in angulo communi reperientur gradus, ac Min. pro angulo quæſito: qui videlicet altitudinem Solis aut ſtellæ indicabit, ſi partes milleſimæ ad vmbram verſam ſpectent: ſi autem partes ad vmbram rectam pertinent, Complementum eius anguli altitudinem Solis ſtellæue oſtendet, vt paulo infra demonſtrabimus. Componetur autem tabula hæc, ſi ſingulis partibus milleſimis vmbræ apponantur ad dextram quinque cifræ, & ex toto illo numero abijciantur tres cifræ: quod idem eſt, ac ſi apponantur tantum duæ cifræ, vt Tangentes angulorum habeantur, Ita factum eſſe vides ſupra. Nam ad partes vmbræ 850. adiectæ ſunt duæ cifræ, vt Tangens fieret 85000. Hac enim ratione fit multiplicatio vmbræ abſciſſæ per ſinum totum 100000, & diuiſio per 1000. vt in Arithmetica noſtra practica ſcripſimus. Quod ſi quatuor cifræ partibus milleſimis apponantur, habentur eadem ratione Tangentes poſito ſinu toto 10000000.

Vſus tabulæ gnomonicæ ſequentis.

Compoſitio tabulæ gnomonicæ facillima.



2 VERVM demonſtremus prius, angulum, quem filum perpendiculi, vel linea fiduciæ ſecans vmbram rectam, cum proximo latere facit, in vtroque Quadrato eſſe complementum altitudinis Solis, ſeu ſtellæ; illum vero, quem filum aut fiduciæ linea vmbram verſam ſecans efficit, exhibere ipſam altitudinem. Sit ergo primum quadratum pendulum ABCD, & Quadrans circuli verticalis per ſtellam ducti AEF, ita vt AE, Horizonti æquidiſtet: ſintque tres altitudines ſtellæ EG, gr. 45. EH, maior & EK, minor. Quando ergo latus pinnacidiorum AB, cum radio GA, coincidit, erit angulus altitudinis ſemirectus GAE,[a] qui æqualis eſt ſuo complemẽto FAG, propter æquales arcus

a 27. tertij.

EG, FG,

EG, FG,[c] hoc eſt, angulo quem filum cum latere AB, facit. Cum ergo diameter quadrati [d] ſecet angulos eius rectos bifariam, in ſemirectos nimirum, tranſibit filum per angulum C: Ac proinde tam CAB, quam CAD, æqualis tunc erit angulo altitudinis EAG. Quando autem pinnacidiorũ latus cum radio HA, coincidit, erit angulus altitudinis EAH, ſemirecto maior, & angulus cõplemẽti FAH, ſemirecto minor,[e] cui æqualis eſt angulus IAB: ac propterea filũ vmbrã rectã interſecabit, facietque angulũ complementi altitudinis IAB, ſemirecto minorem. Quando deniq; latus AB, idem efficitur cũ radio KA, erit angulus altitudinis EAK, ſemirecto minor, & angulus cõplementi FAK, ſemirecto maior,[f] cui æqualis eſt angulus IAB: ac proinde filũ vmbram verſam abrumpet, cõſtituetque angulũ altitudinis IAD, ſemirecto minorẽ. Idem prorſus cernitur in quadrato ſtabili ABCD, in quo vmbræ rectæ latus eſt infimũ CD, cum centrum A, ſupremũ occupet locũ, vt ſupra in conſtructione Quadrati Num. 4. dictũ eſt. Vbi rurſus perſpicitur, quando altitudo EG, eſt gr. 45. radium GA, cadere in angulũ oppoſitũ C, ac proinde tam angulum CAB, quam CAD, æqualem eſſe angulo altitudinis, nimirum ſemirectum. Quando autem altitudo EH, maior eſt, quam grad. 45. angulum IAD, quem linea fiduciæ AI, vmbram rectam auferens DI, cum latere AD, facit,[g] æqualem eſſe angulo FAH, qui complementum eſt anguli altitudinis EAH. Quando denique altitudo EK, minor eſt, quam grad. 45. angulum IAB, quem linea fiduciæ AI, vmbram verſam BI, aſcindens cum latere AB, conſtituit,[h] æqualem eſſe angulo ipſi altitudinis EAK: quæ omnia demonſtranda erant. Sed ecce tibi tabulam, de qua dixi, continentem gradus ac minuta angulorum, quos filum perpendiculi, vel linea fiduciæ in omnibus partibus milleſimis vtriuſque vmbræ cum proximo latere quadrati efficit. In qua vides, angulum ſub parte 800. in vertice ſumpta, & è regione partis 50. continere gradus 40. Min. 22. fere, vt ſupra diximus: ac tantus erit angulus altitudinis, ſi partes 850. ſpectent ad vmbram verſam: eius vero complementum grad. 49. Min. 38. fere altitudinem exhibebit, ſi dictæ partes ex vmbra recta abſciſſæ fuerint.

Tabula porro hæc dici poteſt Gnomonica, quod in quadrato ſtabili dicti anguli in tabula comprehenſi efficiantur à gnomone AD, vel AB, cum linea fiduciæ, vt patet.

Filum perpendiculi ſecans vmbram rectã facit angulum cõplementi altitudinis: ſecans vero vmbram verſam angulum conſtituit ipſius altitudinis.

c 15. primi.
d ſchol. 34. primi.
e 15. primi.
f 15. primi.
g 15. primi.
h 15. primi.

Tabula gnomonica cur ſic dicatur.

SEQVITVR TABVLA Gnomonica.

Tabula Gnomonica.

	0		100		200		300		400		500		600		700		800		900	
	G	M	G	M	G	M	G	M	G	M	G	M	G	M	G	M	G	M	G	M
0	0	0	5	43	11	19	16	42	21	48	26	34	30	58	35	0	38	40	41	59
1	0	3	5	46	11	22	16	45	21	51	26	37	31	0	35	2	38	42	42	1
2	0	7	5	49	11	25	16	48	21	54	26	39	31	3	35	4	38	44	42	3
3	0	10	5	53	11	29	16	51	21	57	26	42	31	5	35	6	38	46	42	5
4	0	14	5	56	11	32	16	55	22	0	26	45	31	8	35	9	39	48	24	7
5	0	17	6	0	11	35	16	58	22	3	26	48	31	10	35	11	38	50	24	9
6	0	21	6	3	11	38	17	1	22	6	26	50	31	13	35	13	38	52	24	11
7	0	24	6	6	11	42	17	4	22	9	26	53	31	15	35	16	38	54	24	12
8	0	28	6	10	11	45	17	7	22	12	26	56	31	18	35	18	38	56	24	14
9	0	31	6	13	11	48	17	10	22	15	26	59	31	20	35	20	38	58	24	16
10	0	34	6	17	11	52	17	13	22	18	27	1	31	23	35	22	39	0	42	18
11	0	38	6	20	11	55	17	17	22	21	27	4	31	26	35	25	39	3	41	20
12	0	41	6	23	11	58	17	20	22	24	27	7	31	29	35	27	39	5	42	22
13	0	45	6	27	12	1	17	23	22	26	27	9	31	31	35	29	39	7	42	24
14	0	48	6	30	12	5	17	26	22	29	27	12	31	34	55	32	39	9	42	26
15	0	52	6	34	12	8	17	29	22	32	27	15	31	36	35	34	39	11	42	28
16	0	55	6	37	12	11	17	32	22	35	27	18	31	38	35	36	39	13	42	29
17	0	58	6	40	12	15	17	35	22	38	27	20	31	40	35	38	39	15	42	31
18	1	2	6	44	12	18	17	38	22	41	27	23	31	43	35	41	39	17	42	33
19	1	5	6	57	12	21	17	42	22	44	27	26	31	45	35	43	39	19	42	35
20	1	9	6	51	12	24	17	45	22	47	27	28	31	48	35	45	39	21	42	37
21	1	12	6	54	12	28	17	48	22	50	27	31	31	50	35	48	39	23	42	39
22	1	16	6	57	12	31	17	51	22	53	27	34	31	53	35	50	39	25	42	41
23	1	19	7	1	12	34	17	54	22	56	27	37	31	55	35	52	39	27	42	42
24	1	22	7	4	12	38	17	57	22	59	27	39	31	58	35	54	39	29	42	44
25	1	26	7	8	12	41	18	0	23	2	27	42	32	0	35	57	39	31	42	46
26	1	29	7	11	12	44	18	3	23	4	27	45	32	3	35	59	39	33	42	48
27	1	33	7	14	12	47	18	6	23	7	27	47	32	5	36	1	39	35	42	50
28	1	36	7	18	12	51	18	10	23	10	27	50	32	8	36	3	39	37	42	52
29	1	40	7	21	12	54	18	13	23	13	27	53	32	10	36	6	39	40	42	54
30	1	43	7	24	12	57	18	16	23	16	27	55	32	13	36	8	39	42	42	55
31	1	47	7	28	13	0	18	19	23	19	27	58	32	15	36	10	39	44	42	57
32	1	50	7	31	13	4	18	22	23	22	28	1	32	18	36	12	38	46	42	59
33	1	53	7	35	13	7	18	25	23	25	28	3	32	20	36	14	39	48	43	1
34	1	57	7	38	13	10	18	28	23	28	28	6	32	22	36	17	39	50	43	3
35	2	0	7	41	13	13	18	31	23	31	28	9	32	25	36	19	39	52	43	5
36	2	4	7	45	13	17	18	34	23	33	28	11	32	27	36	21	39	54	43	6
37	2	7	7	48	13	20	18	37	23	36	28	14	32	30	36	23	39	56	43	8
38	2	11	7	51	23	23	18	41	23	39	28	17	32	32	36	26	39	58	43	10
39	2	24	7	55	13	27	18	44	23	42	28	19	32	35	36	28	40	0	43	12
40	2	17	7	58	13	30	18	47	23	45	28	22	32	37	36	30	40	2	43	14
41	2	21	8	2	13	33	18	50	23	48	28	25	32	40	36	32	40	4	43	16
42	2	24	8	5	13	36	18	53	23	51	28	27	32	42	36	35	40	6	43	17
43	2	28	8	8	13	40	18	56	23	54	20	30	32	44	36	37	40	8	43	19
44	2	31	8	12	13	43	18	59	23	56	28	33	32	47	36	39	40	10	43	21
45	2	35	8	15	13	46	19	2	23	59	28	35	32	49	36	41	40	12	43	23
46	2	38	8	18	13	49	19	5	24	2	28	38	32	52	36	43	40	14	43	25
47	2	41	8	22	13	52	19	8	24	5	28	41	32	54	36	46	40	16	43	26
48	2	45	8	25	13	56	19	11	24	8	28	43	32	57	36	48	40	18	43	28
49	2	48	8	28	13	59	19	14	24	11	28	46	32	59	36	50	40	20	43	30
50	2	52	8	32	14	2	19	17	24	14	28	49	33	1	36	52	40	22	43	32

Tabula Gnomonica.

	0		100		200		300		400		500		600		700		800		900	
	G	M	G	M	G	M	G	M	G	M	G	M	G	M	G	M	G	M	G	M
51	2	55	8	35	14	5	19	20	24	17	28	51	33	4	36	54	40	24	43	34
52	2	59	8	39	14	9	19	24	24	19	28	54	33	6	36	57	40	26	43	35
53	3	2	8	42	14	12	19	27	24	22	28	57	33	9	36	59	40	28	43	37
54	3	5	8	45	14	15	19	30	24	25	28	59	33	11	37	1	40	30	43	39
55	3	9	8	49	14	18	19	33	24	28	29	2	33	13	37	3	40	32	43	41
56	3	12	8	52	14	22	19	36	24	31	29	4	33	16	37	5	40	34	43	43
57	3	16	8	55	14	25	19	39	24	34	29	7	33	18	37	8	40	36	43	44
58	3	19	8	59	14	28	19	42	24	36	29	10	33	21	37	10	40	38	43	46
59	3	23	9	2	14	31	19	45	24	39	29	12	33	23	37	12	40	40	43	48
60	3	26	9	5	14	34	19	48	24	42	29	15	33	25	37	14	40	42	43	50
61	3	29	9	9	14	38	19	51	24	45	29	18	33	28	37	16	40	44	43	52
62	3	33	9	12	14	41	19	54	24	48	29	20	33	30	37	18	40	46	43	53
63	3	36	9	15	14	44	19	57	24	51	29	23	33	33	37	21	40	48	43	55
64	3	40	6	19	14	47	20	0	24	53	29	25	33	35	37	23	40	50	43	57
65	3	43	6	22	14	51	20	3	24	56	29	28	33	37	37	25	40	52	43	59
66	3	47	9	26	14	54	20	6	24	59	29	31	33	40	37	27	40	54	44	1
67	3	50	9	29	14	57	20	9	25	2	29	33	33	42	37	29	40	56	44	2
68	3	53	9	32	15	0	20	12	25	5	29	36	33	45	37	31	40	57	44	4
69	3	57	9	36	15	3	20	15	25	8	29	38	33	47	37	34	40	59	44	6
70	4	0	9	39	15	7	20	18	25	10	29	41	33	49	37	36	41	1	44	8
71	4	4	9	42	15	10	20	21	25	13	29	44	33	52	37	38	41	3	44	9
72	4	7	9	46	15	13	20	24	25	16	29	46	33	54	37	40	41	5	44	11
73	4	11	9	49	15	16	20	27	25	19	29	49	33	56	37	42	41	7	44	13
74	4	14	9	52	15	19	20	30	25	22	29	51	33	59	37	44	41	9	44	15
75	4	17	9	56	15	23	20	33	25	24	29	54	34	1	37	47	41	11	44	16
76	4	21	9	59	15	26	20	36	25	27	29	57	34	4	37	49	41	13	44	18
77	4	24	10	2	15	29	20	39	25	30	29	59	34	6	37	51	41	15	44	20
78	4	28	10	6	15	32	20	42	25	33	30	2	34	8	37	53	41	17	44	22
79	4	31	10	9	15	35	20	45	25	36	30	4	34	11	37	55	41	19	44	24
80	4	34	10	12	15	39	20	48	25	38	30	7	34	13	37	57	41	21	44	25
81	4	38	10	16	15	42	20	51	25	41	30	9	34	15	37	59	41	23	44	27
82	4	41	10	19	15	45	20	54	25	44	30	12	34	18	38	2	41	25	44	29
83	4	45	10	22	15	48	20	57	25	47	30	15	34	20	38	4	41	27	44	31
84	4	48	10	26	15	51	20	0	25	50	30	17	34	22	38	6	41	29	44	32
85	4	52	10	29	15	54	21	3	25	57	30	20	34	25	38	8	41	31	44	34
86	4	55	10	32	15	58	21	6	25	55	30	22	34	27	38	10	41	32	44	36
87	4	58	10	36	16	1	21	9	25	58	30	25	34	29	38	12	41	34	44	37
88	4	2	10	39	16	4	21	12	26	1	30	27	34	32	38	14	41	36	44	39
89	5	5	10	42	16	7	21	15	26	4	30	30	34	34	38	16	41	38	44	41
90	5	9	10	45	16	10	21	18	26	6	30	32	34	36	38	19	41	40	44	43
91	5	12	10	49	16	14	21	21	26	9	30	35	34	39	38	21	41	42	44	44
92	5	15	10	52	16	17	21	24	26	12	30	38	34	41	38	23	41	44	44	46
93	5	19	10	55	16	20	21	27	26	15	30	40	34	43	38	25	41	46	44	48
94	5	22	10	59	16	23	21	30	26	17	30	43	34	46	38	27	41	48	44	50
95	5	26	11	2	16	26	21	33	26	20	30	45	34	48	38	29	41	50	44	51
96	5	29	11	5	16	29	21	36	26	23	30	48	34	50	38	31	41	52	44	53
97	5	32	11	9	16	32	21	39	26	26	30	50	34	53	38	33	41	54	44	55
98	5	36	11	12	16	36	21	42	26	28	30	53	34	55	38	35	41	55	44	57
99	5	39	11	15	16	39	21	45	26	31	30	55	34	57	38	37	41	57	44	58
100	5	43	11	19	16	42	21	48	26	34	30	58	35	0	38	40	41	59	45	0

3 SIMILEM tabulam gnomonicam compoſuit quoque Georgius Purbachius in ſuo quadrato Geo-metrico, poſito latere partium 1200. eamque ad ſecunda extendit: quod etiam fecit Io. Antonius Maginus, con-ſtituto quadrati latere partium 1000. quod quidem ſerius animaduerti. Incidi enim caſu quodam in eam cu[m] hanc meam pene abſolueram, alioquin hoc ſupputandi labore ſuperſediſſem, tabulamque Magini huc tranſtu-liſſem Itaque ſi quis in altitudinibus aſtrorum deſideret etiam ſecunda, petere ea debebit ex Magini tabula: qu[æ] ſane fideliter, & accurate ab eo ſupputata eſt, vel certe per calculum eadē elicere, vt ſupra Nu. 1. docuimus in ho[c] problem. Sed meo iudicio contenti eſſe poſſumus hac noſtra, quæ ad Minuta ſolum vltra gradus progreditur. I[n] qua, ſi eam cum illa Magini conferre quis volet, deprehendet, in noſtra Minutis graduum additum eſſe ſemp[er] vnum minutum, quando in ea reperiuntur plura ſecunda, quam 30. Sed, vt verum fatear, neque noſtra, neque i[l]la Magini omnino neceſſaria eſt, cum ipſemet partes milleſimæ lateris quadrati, ſi apponantur duæ cifræ, ſint tā[n]gentes altitudinum reſpectu ſinus totius 100000. & eædem, ſi addantur quatuor cifræ, Tangentes eaſdem, po[ſi]to ſinu toto 10000000. exhibeant: ac proinde ex tabula Tangentium altitudines excerpi poſſint cuicunq; par[ti] milleſimæ congruentes, ſi ei prius adiungantur duæ, aut quatuor cifræ, vt ſupra ad finem Numer. 1. oſtendimu[s]. Quia tamen moleſtia non caret, per Tangentes hac ratione formatas ex tabula Tangentium angulos altitud[i]num eruere, quod raro admodum Tangentes illæ in tabula præciſe reperiantur, ac propterea pro illis accipien-dæ ſint vel proxime minores, vel maiores, illæ videlicet, quæ paucioribus vnitatibus ab inuentis differunt: no[n] abs re fuerit, vel tabulam hanc noſtram gnomonicam, vel illam Magini, ſi ſecunda etiam deſiderentur, adſci-ſcere.

Tabulam gnomonicā non eſſe abſolute neceſſariam. Quo pacto partes milleſimæ lateris Quadrati eſſe[n]t tangentes, poſito ſinu toto 100000. vel 10000000.

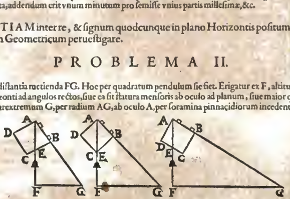
4 QVAMVIS autem tabula Gnomonica per ſolas partes milleſimas integras progrediatur; tamen quando ex doctrina cap. 2. Numer. 14. lib. 1. tradita vltra milleſimas integras ſuperſit adhuc aliqua particula, no[n] magnus error in altitudinibus aſtrorum obſeruandis committi poteſt. Cum enim anguli in tabula creſcant or-dine per tria duntaxat minuta, vel duo, vel vnum, non fiet error niſi vnius aut alterius minuti, etiamſi fractio i[l]la milleſimæ partis negligatur. Quod ſi errorem hunc, licet minimum, vitare cupis, conſidera fractionem mille-ſimæ, an ſit tertia pars, an ſemiſſis, an vero duæ tertiæ partes, quod iudicio ſenſus facile cognoſces ex particula il[la] quæ vltra partes decimas circino percurſas ſupereſt. Nam vbi anguli in tabula per tria Minuta augentur, adden-dum erit vnum minutum, vel duo, prout particula illa reliqua fuerit $\frac{1}{3}$. vel $\frac{2}{3}$. Idem faciendum erit ſi dicta parti-cula fuerit maior, quam $\frac{1}{3}$. minor tamen, quam ſemiſſis. Tunc enim addendum erit etiam vnum Minutum. Ite[m] quando particula illa maior fuerit, quam ſemiſſis, addi poſſunt duo minuta. At quando anguli tabulæ augentu[r] per duo Minuta, addendum erit vnum minutum pro ſemiſſe vnius partis milleſimæ, &c.

Non magnus error in altitudinib. committitur, etiamſi per integras milleſimas tabula progrediatur, & quo pacto error hic corrigendus ſit.

DISTANTIAM inter re, & ſignum quodcunque in plano Horizontis poſitum, per Qua-dratum Geometricum perueſtigare.

PROBLEMA II.

1 SIT diſtantia metienda FG. Hoc per quadratum pendulum ſic fiet. Erigatur ex F, altitudo quæpiam nota FA, Horizonti ad angulos rectos, ſiue ea ſit ſtatura menſoris ab oculo ad planum, ſiue maior quædam alti-tudo. Inſpiciatur extremum G, per radium AG, ab oculo A, per foramina pinnacidiorum incedentem, filo per-



pendiculi libere pendente, & inſtrumentum radente, punctumque E, notetur, vbi filum latus quadrati interſe-cat, quod fiet vel in latere BC, vmbræ rectæ, vel in angulo C, vel in latere DC, vmbræ verſæ. Cadente namque fi-lo in vmbram rectam, vel in punctum C, vt in 1. & 2. figura, fiet triangulum ABE, triangulo AFG, æquiangu-lum, cum anguli B, F, ſint recti, & angulus A communis.[a] Si igitur fiat,

a 4. ſexti.

Vt latus AB, partium 1000.	*ad vmbram rectam abſciſſam BE,*	*Ita altitudo nota AF,*	*ad FG, diſtantiam,*

euadet nota diſtantia quæſita FG, in partibus altitudinis AF. Cadente autem puncto E, in vmbram verſam, vt in 3 figura. abſcindetur rurſus triangulum ADE, triangulo AFG, æquiangulum, cum anguli D, F, recti ſint,[b] & al-terni AED, FAG, æquales.[c] Ergo ſi fiat,

b 29. primi.
c 4. ſexti.

Vt vmbra verſa abſciſſa DE,	*ad latus DA, partium 1000.*	*Ita altitudo nota AF,*	*ad FG, diſtantiam.*

nota quoque efficietur diſtantia quæſita FG, in partibus altitudinis AF. Ex quo illud intelligere poteris, quando punctum E, interſectionis fili cum latere quadrati cadit in vmbram rectam, altitudinem AF, maiorem eſſe di-ſtantia FG, quando in punctum C, æqualem; quando denique in vmbram verſam, minorem.

Quando altitudo maior eſt, quam diſtantia, & quando æqualis, & quando minor.

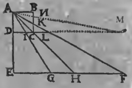
2 QVADRATO ſtabili ita eandem diſtantiam explorabimus. Erigatur in extremo diſtantiæ E, altitu-do quædam perpendicularis notarum partium, & quadratum ita accommodetur, vt centrum A, ſuperiorem lo-cum occupet, & vmbra recta DC, Horizonti æquidiſtet. Directa igitur dioptra ad ſignum propoſitum, notetur diligenter vmbra abſciſſa: quæ ſi recta fuerit, nimirum DI, erit altitudo AE, maior, quam diſtantia EG,[d] trian-gulumque ADI, triangulo AEG, ſimile erit.[e] Si igitur fiat,

d coroll. 4. ſexti.
e 4. ſexti

Vt la-

Vt latus quadrati AD, 1000.	*ad partes vmbræ rectæ DI:*	*Ita altitudo AE, cognita*	*ad EG, diſtantiam,*

reperietur diſtantia quæſita EG, in partibus altitudinis aſſumptæ AE.



SI autem dioptra per C, tranſierit, erit altitudo AE, diſtantiæ quæſitæ EH, æqualis: [c] cum ſit vt AD, ad DC, æqualem, ita AE, ad EH. *c 4. ſexti.*

SI denique vmbra abſciſſa fuerit verſa, vt BK, erit altitudo AE, minor, quam diſtantia EF, quod plerunque in diſtantiis metiendis accidere ſolet; eritq; triangulum ABK, triangulo AEF, æquiangulum, cum anguli B, E, recti ſint, [d] & alterni BAK, AFE, æquales. [e] Quare ſi fiat, *d 29 primi. e 4. ſexti.*

Vt partes vmbræ verſæ BK,	*ad latus quadrati AB, 1000.*	*Ita altitudo nota AE,*	*ad EF, diſtantiam,*

producetur quæſita diſtantia EF, in partibus altitudinis erectæ AE.

3 QVANDO diſtantia non valde magna eſt, vel extremum eius punctum facile videri poteſt ſatis erit, ſi quadratum ſupra planum Horizontis conſtituatur, ita vt vmbræ verſæ latus BC, ad punctum illud recta vergat. Vt ſi diſtantia horizontalis DM, metienda ſit, eique imponatur Quadratum erectum, mouenda eſt dioptra, donec linea fiduciæ in extremum M, dirigatur. Qua ratione ſemper vmbra verſa BC, abſcindetur. Nam ſi linea fiduciæ per C, tranſiret, aut vmbram rectam CD, interſecaret, eſſet diſtantia vel æqualis lateri CD, vel minor: ac proin dedimenſione non indigeret. Quoniam igitur rurſus triangulum NBA, triangulo ADM, æquiangulum eſt, propter rectos angulos B, D, [f] & alternos æquales BAN, AMD; [g] Si fiat, *f 29. primi. g 4. ſexti.*

Vt partes vmbræ verſæ BN,	*ad latus quadrati AB, 1000.*	*Ita latus quadrati AD, 1000.*	*ad DM, diſtantiam,*

cognita erit diſtantia DM, in partibus milleſimis lateris quadrati AD.

4 SOLENT nonnulli ſcriptores non inquirere diſtantiam propoſitam in partibus altitudinis aſſumptæ AE, vel in partibus milleſimis lateris quadrati AD; ſed ſolum inueſtigant, quoties altitudo electa AE, vel latus quadrati AD, in diſtantia propoſita contineatur: quod idem eſt, ac ſi altitudo, aut latus vmbræ ſtatuatur 1. Atque ita diuidunt vel partes vmbræ rectæ abſciſſas per totum latus partium 1000. vel totum latus vmbræ verſæ per partes vmbræ verſæ abſciſſas. Nam Quotiens numerus indicat, quoties altitudo AC, vel latus Quadrati in propoſita diſtantia comprehendatur: cum ſit,

Vt totum latus AD, partium 1000.	*ad partes vmbræ rectæ DI,*	*Ita altitudo AE, vel latus AD, vt 1.*	*ad diſtantiam EG, vel DI.*

Item.

Vt partes vmbræ verſa BN,	*ad totum latus AB, 1000.*	*Ita altitudo AE, vel latus AD, vt 1.*	*ad diſtantiam EF, vel DM,*

Hinc enim fit, vt cum ſecundum præceptum regulæ trium tertius numerus in ſecundum ſit ducendus, productuſque numerus per primũ diuidendus, ſatis ſit, ſi ſecundus per primum diuidatur: quandoquidem vnitas in tertio loco poſita, ſi multiplicet ſecundum numerum, eundem ſecundum numerum procreat, &c.

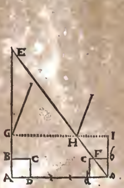
HAC ratione, ſi duæ partes milleſimæ abſcindantur ex vmbra verſa, continebitur altitudo AE, vel latus AD, in diſtantia ſecundum hunc numerum 500. quod 1000. diuiſa per 2. dent Quotientem 500. At vmbra verſa trium milleſimarum dabunt Quotientem $333\frac{1}{3}$. qui à priori differt hoc numero, $166\frac{2}{3}$. Ex quo intelligi licet, quando vmbra verſa abſciſſa valde parua eſt, magnum poſſe errorem committi in diſtantia inueſtiganda. Cum enim partes milleſimæ ſint perexiguæ, facile decipi poſſumus, vt nimirum putemus, abſciſſas eſſe tres milleſimas cum fortaſſis ſolum duæ abſciſſæ ſint: ac proinde error committi poterit $166\frac{2}{3}$. altitudinum AE, vel laterum AD, qui error contemnendus non eſt. At quando partes vmbræ verſæ plures milleſimas continent, non tantus error committitur, etiamſi vnam milleſimam pro altera accipiamus. Nam ſi verbi gratia putemus, abſciſſas eſſe partes $\frac{30}{1000}$. ex vmbra verſa, cum vere abſciſſæ ſint $\frac{31}{1000}$. error fieri poterit ſolum in 1. altitudine AE, vel latere AD, & $\frac{7}{93}$. cum $\frac{30}{1000}$. dent Quotientem $33\frac{1}{3}$. at $\frac{31}{1000}$. Quotientem offerant $32\frac{8}{31}$. Itaque magis probo, vt Quadratum in altiori loco ſtatuatur, quam in plano Horizontis, quia ibi plures partes vmbræ verſæ abſcinduntur, quam hic, vt conſtat in diſtantiis æqualibus EF, DM. Vides ergo magnam eſſe adhibendam diligentiam, vt accurate partes milleſimæ reperiantur per ea, quæ lib. 1. cap. 2. Num. 14. ſcripſimus.

IAM vero, ſi quadratum conſtructum ſit, ad certam aliquam menſuram, hoc eſt, vt latus contineat vel 1. paſſum, vel 1. cubitũ, vel 2. pedes, aut palmos, aut 3. aut 4. &c. res erit expeditiſſima, ſi ſemel tantũ latus particularũ 1000, ducatur in menſuras, quib. latus æquiualet. Ita n. in longitudinib. exquirendis, ſi quadratum ſupra planum, in quo eſt longitudo, ſtatuatur, (vt fit in omnibus hypotenuſis, ſiue diſtantiis à loco menſoris vſque ad aliquod punctũ menſore ſublimius, depreſſiuſne, quemadmodum patuit in proxima figura, quando longitudo DM, inquiſita eſt, patebitq; in ſcholio problem. 7. & in ſcholio problem 9. Item in problem. 15. Num. 5. & in problem. 26. Num. 3. & in problem. 27. Num. 3. nec non in problem. 37. & 38. Num. 3. & denique in proble. 43. & 44.

&in

& in aliis locis) diuidendus ſolum eſt numerus productus per partes vmbræ verſæ (quæ ſemper abſcinditur) n tatas. Quotiens enim dabit longitudinem quæſitam in data menſura. Verbi gratia, ſi in vno latere comprehe dantur 3. pedes, multiplicabimus latus 1000. per 3. efficiemuſque 3000. Itaq; ſi in inueſtiganda longitudine qu
a 4. ſexti. piam abſciſſæ ſint partes 200. ex vmbra verſa, partiemur 3000. per 200. Nam quotiés 15. dabit 15. pedes pro qu ſita longitudine.[a] Nam cum in proxima figura ſit, vt vmbra verſa NB. 200. ad latus BA, 1000. Ita latus AD, 3. p dum ad DM, multiplicandum eſt latus 1000. per 3. pedes, & productus numerus 3000. per 200. diuidendus. E demque de cæteris ratio eſt. Sic ſi latus contineret $\frac{1}{2}$. cubiti, diuidendus eſſet numerus 500. ex $\frac{1}{2}$. in 1000. procre tus per vmbram verſam. Pari ratione ſi latus complecteretur 10. palmos, diuidendus eſſet numerus 10000. g nitus ex 10. in 1000. per vmbram verſam: vt in Quotiente prodeant palmi in longitudine contenti, &c. qu non indiligenter notandum eſt.

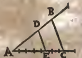
ALITER.



5 QVANDO diſtantia metienda magna eſt, & adeſt bo planities campi, vti poterimus Quadrato ſtabili commodiſſi hoc modo. Sit diſtantia oblata AE. Erigatur quadratum ad Ho zontem ad rectos angulos, circumducaturque, donec per eius p num oculus in A conſtitutus ſignum E, perſpiciat, atque linea n tetur AG. Demiſſo deinde Quadrato vſq; ad Horizontis planu ita vt latus AB, recta tendat ad ſignũ E, hoc eſt, à recta notata A non recedat, protendatur linea recta per latus AD, in qua acci antur quotcunque partes lateri AD, æquales: vel quotcunq; a menſuræ æquales, vt paſſus, vel cubiti, vſque ad punctum a, in q rurſus erigatur quadratum. (In hoc ſecundo quadrato aſcripſim literas minuſculas, ne literæ vnius quadrati cum literis alterius c fundantur, quod in ſequentibus etiam obſeruabimus) vertatu donec per eius planum idem ſignum E, appareat per rectam a Poſt hæc quadratum Horizonti incumbat, latuſque a d, rectæ A congruat, & dioptra circumducatur, donec eius linea fiduciæ r ctæ aH, præciſæ ſit ſuppoſita, notenturque partes milleſimæ in portione vmbræ verſæ bF, quam diligentiſſim Abſcindetur autem ſemper vmbra verſa, propterea quod diſtantia AE, proponitur magna, ſaltem maior, qua Aa: alioquin menſurari poſſet ſine quadrato, quemadmodum & Aa. Quibus peractis, erũt triangula a b F, a A
b 29. primi. æquiangula, cum angulos habeant rectos [b] b, A, & alternos æquales baF, AEa.[c] Si ergo fiat,
c 4. ſexti. *Vt vmbra bF, ad latus b a, 1000. Ita aA, nota ad AE, diſtantia*
inuenietur diſtantia AE, in partibus rectæ Aa. Vel ſi diuidatur latus b a, 1000. per partes milleſimas vmbræ B procreabitur numerus, ſecundum quem recta Aa, in diſtantia eadem AE, continetur: poſita nimirum recta A vt 1. vt Num. 4. oſtendimus.

6 QVOD ſi ad manum non habeamus Quadratum, obtinebimus eandem diſtantiam beneficio bacu vel arundinis hoc artificio. Figatur baculus, vel arũdo in G, ad rectos angulos plano Horizontis, quod per filu aliquod cum perpendiculo facile fiet. Deinde recede per quotlibet paſſus vſque ad A, ita vt viſus per baculu incedens feratur in ſignum E. Poſt hæc ducatur linea Aa, ad AE, perpendicularis, in qua numera quotlibet etia paſſus vſque ad a. Ducta tandem GI, ad AE, quoque perpendiculari, & ipſi Aa, æquali, figatur rurſum baculus angulos rectos in tali puncto rectæ GI, nimirum in H, vt oculus iterum ex a, per baculum incedens feratur in gnum E, inquiranturque exquiſitiſſime paſſus vna cum fragmentis vnius paſſus in HI, contenti. His enim pe actis, quoniam rurſus triangula HIa, aAE, æquiangula ſunt, ob angulos rectos I, A, & alternos æquales IaH, AE
d 4. ſexti [d] ſi fiat,
Vt HI, nota ad Ia, notam: Ita aA, nota ad AE, diſtantia
efficietur nota diſtantia AE, in partibus rectarum GA, Aa, aI. Vel ſi diuidatur aI, nota per IH, notam, reperi mus, quoties Aa, in diſtantia AE, contineatur, ſi nimirum recta Aa, ponatur vt 1.

7 IAM vero abſque numerorum auxilio problema abſoluemus, ſi attente ea conſiderentur, quæ lib. problem. 1. Num. 7. ſcripſimus. Nam ſi fiat angulus quicunque BAC, & pro primo exemplo Num. 1. huius pro



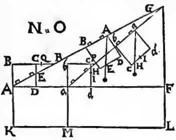
ſumatur AD, æqualis lateri quadrati AB, vel ſi eſſet nim magnum, æqualis ſemiſſi, vel tertiæ parti, aut quartæ, &c eiuſdem lateris. Deinde DB, æqualis vmbræ abſciſſæ B (quæ ſumma cura per circinum in quadrato accipien eſt) vel eius ſemiſſi, vel tertiæ parti, aut quartæ &c. vt nim rum AD, DB, ſint æque ſubmultiplices lateris AB, & vn bræ BE, ſi eis æquales non ſunt. Poſt hæc ex inſtrumen partium ſumatur AE, tot particularum, quot palmi, aut p des in altitudine AF, continentur. Si enim iunctæ rectæ DE, parallela agatur BC, continebit diſtantia FG, t palmos, aut pedes, quot particulæ inſtrumenti partium in interuallo EC, comprehenduntur. Vt ſi altitudo A ſit pedum 5. erit diſtantia FG, pedum 3. & ſic de cæteris. Atque hoc modo procedendum erit in aliis exemplis mnibus, conſiderando videlicet attente primas tres magnitudines Regulæ trium, &c. quod ſemel monuiſſe ſ tis eſt.

DISTANTIAM in plano per duas ſtationes in eodem plano factas per quadratum Geo metricum metiri, quando in eius extremo erecta eſt altitudo aliqua perpendicularis, e iamſi infimum eius extremum non cernatur.

PRO

PROBLEMA III.

1 DISTANTIA inueſtiganda ſit AF. Intelligatur planum Horizontis KL; erecta altitudo GL: ſtatura menſoris AK, vel alia quædam menſura cognita. Supra aliquam baſem Horizonti æquidiſtantem collocetur quadratum ſtabile, ita vt eius latus AD, cogitatione productum occurrat altitudini erectæ in F, ad angulos rectos. Inſpiciatur ſummitas G, per dioptram, ſecetq; eius linea fiduciæ vmbram verſam CD, in E, quod ſemper continget, quando diſtantia AF, maior eſt altitudine FG, [a] quod tunc angulus A, minor fiat angulo G, ac proinde ſemirecto minor, quem cum AD, in A, faceret radius per C, emiſſus. Deinde accede magis, vel recede per longitudinem notam Aa, & collocato quadrato ſupra eandem baſem, ſecet iterum dioptra ad punctum G, directa vmbrā verſam c d, in H: eritq; vmbra verſa dH, in propinquiore ſtatione maior, quam vmbra verſa DE, in ſtatione remotiore, [b] quod angulus a, ſit maior angulo A. Auferatur dI, ipſi DE, æqualis, vt HI, differentia ſit vmbrarum verſarum. [c] Et quia eſt, vt AD, ad DE, ita AF, ad FG: [d] erit rectangulo ſub AD, FG, æquale rectangulum ſub DE, AF. Eadem ratione erit rectangulo ſub a d, FG, rectangulum ſub dH, aF, æquale: propterea quod etiam eſt [e] vt a d, ad dH, ita aF, ad FG. Cum ergo rectangulum ſub AD, FG, æquale ſit rectangulo ſub a d, FG, quod rectæ AD, a d, æquales ſint: erit quoq; rectangulū ſub dH, aF, rectangulo ſub DE, AF, hoc eſt, ſub dI, AF, æquale, [f] ideoq; erit, vt dH, prima ad dI, ſecundam, ita AF, tertia ad aF, quartam: Et permutando, vt tota dH, ad totam AF, ita ablata dI, ad ablatam aF. [g] Igitur erit quoque reliqua HI, ad reliquam Aa, vt tota dH, ad totam AF. Quocirca ſi fiat,



a 18.primi.
b 16.prim.
c 4.ſexti.
d 16.ſexti.
e 4.ſexti.
f 16.ſexti.
g 19.quin.

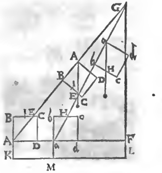
Vt HI, differentia vmbrarum verſarum	*ad Aa, differentiam ſtationum:*	*Ita dH, vmbra verſa propinquioris ſtationis, ſiue maior,*	*ad AF, diſtantiam,*

producetur AF, diſtantia nota in partibus differentiæ ſtationum Aa, notæ.

2 EADEM prorſus ratio eſt in quadrato pendulo. Nam filum perpendiculi abſcindit quoque triangula ADE, ad H, triangulis AFG, aFG, æquiangula: propterea, quod tam anguli D, F, recti ſint, [h] & angulus F, hoc eſt, alternus BAE, angulo AGF, externus interno æqualis, quam anguli d, F, recti & angulus H, id eſt, alternus baH, angulo aGF, externus interno æqualis. Reliqua demonſtrabuntur, vt prius: ſunt enim vmbræ verſæ in pendulo quadrato vmbris in ſtabili æquales. Nam cum duo anguli D, E, in triangulo ADE, quadrati penduli æquales ſint duobus angulis D, E, in triangulo ADE, quadrati ſtabilis, quod ea triangula ſint, vt oſtendimus, æquiangula: ſint autem & latera AD, AD, æqualia; [i] erunt & rectæ DE, DE, hoc eſt vmbræ verſæ, æquales. Eademque ratione verſæ vmbræ dH, dH, æquales erunt, &c.

h 29.primi.
i 26.primi.

3 SI in vtraque ſtatione vmbra recta abſcindatur à linea fiduciæ, vel à filo perpendiculi, vt in E, & H, quod quidem ſemper continget, quando diſtantia AF, minor eſt altitudine FG, [k] quod tunc angulus A, maior fiat angulo G, ac proinde ſemirecto maior, quem cum AD, conſtitueret radius per C, emiſſus. Eritque vmbra recta BE, in remotiore ſtatione maior, quam vmbra recta bH in ſtatione propinquiore, [l] quod angulus FaG, maior ſit angulo FAG; ac proinde baH, minor angulo BAE. Auferatur BI, ipſi bH, æqualis, vt IE, differentia ſit vmbrarum rectarum. Et quia triangula ABE, AFG, æquiangula ſunt, propter angulos rectos B, F, [m] & alternos æquales BAE, AGF, [n] erit vt AB, ad BE, ita FG, ad AF, & permutando, vt AB, ad FG, ita BE, ad AF. Eadem ratione, quia triāgula abH, aFG, æquiāgula ſunt, propter rectos angulos b, F, [o] & alternos æquales baH, aGF, [p] erit vt a b, ad bH, ita FG, ad aF: Et pmutando vt ab, ad FG ita bH, ad aF. Cum ergo ſit, vt AB, ad FG, ita a b, ad FG, propter rectas æquales AB, a b, [q] erit quoque vt BE, tota ad AF, totam, ita BI, ablata ipſi bH, ęqualis, ad ablatam aF, [r] Igitur erit & reliqua IE, ad reliquam Aa, vt tota BE, ad totam AF. Quapropter ſi fiat,



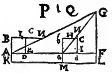
k 18.primi.
l 16.primi.
m 29.prim.
n 4.ſexti.
o 29.prim.
p 4.ſexti.
q 11.quint.
r 19.quint.

Vt IE, differentia vmbrarum rectarum	*ad Aa, differentiam ſtationū:*	*Ita BE, vmbra recta remotioris ſtationis, ſiue maior*	*ad AF, diſtantiam,*

procreabitur AF, diſtantia nota in partibus differentiæ ſtationum Aa, notæ.

4 EADEM omnino in quadrato pendulo eſt ratio. Nam filum perpendiculi abſcindit quoque triangula ABE, abH, triangulis AFG, aFG, æquiangula; quod tam anguli B, F, recti ſint, [s] & angulus BAE, angulo AGF, externus interno æqualis, quam anguli b, F, recti & angulus baH, angulo aGF, æqualis, externus interno. Reliqua demonſtrabuntur, vt in ſtabili quadrato. Sunt enim vmbræ rectæ in quadrato pendulo vmbris rectis in ſtabili æquales. Nam cum duo anguli B, E, in triangulo ABE, quadrati penduli, æquales ſint duobus angulis B, E, in triangulo ABE, quadrati ſtabilis; quod hæc triangula ſint, vt oſtenſum eſt, æquiangula, vtpote æquiangula triangulo AGF, [t] erunt & rectæ BE, BE, hoc eſt, vmbræ rectæ æquales. Eademque ratione vmbræ rectæ bH, bH, æquales erunt, &c.

s 29.primi.
t 26.primi.



5 Si deniq; in remotiore ſtatione ſecetur vmbra verſa CD, in E, & recta b c, in H, in ſtatione propinquiore, reducenda erit alterutra earum ad alteram, vt habeantur ſimiles vmbræ, per ea, quæ in quadrati conſtructione Num. 7. ad initium huius lib. tradidimus, diuidendo nimirum quadratum lateris AB, per vmbram, quæ reduci debet, &c. Nam ſi fiat vt IN, differentia vmbrarum ſiue rectarum, ſiue verſarum, ad Aa, differentiam ſtationum: Ita BN, maior vmbra recta vel dN, vmbra verſa maior ad aliud, gignetur diſtantia AF, vt demonſtratum eſt Num. 3. & 1.

6 QVOD ſi quando in vna ſtatione linea fiduciæ tranſierit per C, aſſumi poterit vel latus vmbræ rectæ BC, vel verſæ CD, prout in altera ſtatione abſciſſa erit vmbra recta, vel verſa; vt nimirum vmbræ ſint ſimiles.

COROLLARIVM. I.

Eundem eſſe modum operandi in vtroque quadrato.

COLLIGITVR ex demonſtratis, eundem eſſe operandi modum in vtroque quadrato: quandoquidem eædem vmbræ in quadrato pendulo, quæ in ſtabili, abſcinduntur, vt oſtendimus: Itaque præcepta, quæ in vno præſcribuntur, in altero quoque obſeruanda ſunt.

COROLLARIVM II.

Eundem eſſe operandi modum per vmbras verſas, & per rectas.

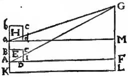
PATET etiam ex dictis, operationem non variari, ſiue per vmbras verſas, ſiue per rectas inſtituatur: quandoquidem ſemper eſt, vt differentia vmbrarum ad differentiam ſtationum, ita vmbra maior, ad diſtantiam, quæ inueſtiganda proponitur, vt demonſtratum eſt.

CÆTERVM in ſcholio problematis 7. præſcribemus rationem, qua eandem diſtantiam AF, metiri licebit per vnicam ſtationem.

DISTANTIAM eandem per duas ſtationes in aliqua altitudine erecta factas, ope quadrati perſcrutari.

PROBLEMA IV.

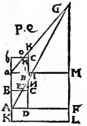
1. QVANDO in plano commode fieri nequeunt duæ ſtationes, erigatur haſta aliqua Kb, in qua fiant duæ ſtationes oculi menſoris in A, a: Vel in duabus feneſtris alicuius turris, quarum vna ſuperſtet alteri ad perpendiculum: abſcindaturque primum latus vmbræ verſæ in vtraque ſtatione in E, H, Eritq; inferioris ſtationis vmbra verſa DE, maior, quam vmbra verſa dH, ſtationis ſuperioris, quod angulus A, maior ſit angulo a; quippe cum AGF, minor ſit, quam aGM; & anguli F, M, recti. Sumatur DI, ipſi dH, æqualis; [a] Et quoniam eſt, vt AD, ad DE, ita AF, ad FG: erit permutando, vt AD, ad AF, ita DE, ad FG. Eademque ratione, erit vt ad, ad aM, ita dH, ad MG. Cum ergo eadem ſit proportio AD, ad AF, quæ ad, ad aM, propter æqualitatem linearum AD, ad, & AF, aM; [b] Erit vt DE, tota ad totam FG, ita d H, hoc eſt, DI, ablata ad ablatam MG. [c] Igitur erit quoque reliqua IE, ad reliquam FM, hoc eſt, ad reliquam Aa, vt tota DE, ad totam FG, hoc eſt, vt AD, ad AF; cum oſtenſum ſit eſſe AD, ad AF, vt DE, ad FG. Quocirca ſi fiat,



a 4. ſexti.
b 11. quint.
c 19. quint.

Vt IE, differentia vmbrarum verſarum	*ad A a, differentiam ſtationum,*	*Ita AD, latus quadrati*	*ad AF, diſtantiam,*

manifeſta colligetur diſtantia AF, in partibus differentiæ ſtationum A a.



2 SI in vtraque ſtatione latus vmbræ rectæ interſecetur in E, H, reducenda eſt vtraque vmbra recta BE, bH, ad verſam, per ea, quæ tradita ſunt ad initium huius lib. in conſtructione quadrati Num. 7. diuidendo videlicet quadratum numerum lateris quadrati per vtramque vmbram rectam abſciſſam ſigillatim. Nam ſi producantur latera DC, d c, vmbræ verſæ vſque ad radios AG, aG, ad puncta I, K, erit iterum, vt demonſtrauimus Numer. 1. vt IN, differentia vmbrarum verſarum ad Aa, differentiam ſtationum, ita AD, latus quadrati ad AF, diſtantiam. Ergo vt Num. 1. oſtenſum eſt, inuenietur diſtantia AF, in partibus differentiæ ſtationum A a.

ALITER

SINE reductione vmbrarum rectarum ad verſas hoc alio modo eandē diſtantiam AF, eliciemus. Ex OH, differentia vmbrarum rectarum in latus a b, fiat P: & ex bH, vmbra recta maiore in minorem BE, fiat [d] Q. Et

d 4. ſexti.

quia

quia eſt, vt ID, ad DA, ita AB, ad BE; [b] erit rectangulum ſub ID, BE, æquale quadrato ex AD, vel AB. Eodemq; b 17. ſexti.
modo rectangulum ſub Kd, bH, quadrato ex a d, vel a b, hoc eſt, eidem quadrato ex AD, vel AB, æquale erit: ac
proinde rectangula ſub ID, BE, & ſub Kd, bH, æqualia inter ſe erunt. [c] Igitur erit, vt ID, ad Kd, ita bH, ad BE: c 16. ſexti.
& permutando vt ID, ad bH, ita Kd, ad BE, hoc eſt, vt ID, tota ad totam bH, ita Kd, hoc eſt, ita DN, ablata ad BE,
hoc eſt, ad bO, ablatam: [d] Ideoque erit & reliqua IN, ad reliquam OH, vt tota ID, ad totam bH; & permutan- d 19. quin.
tando IN, ad ID, vt OH, ad bH. Quia vero proportio IN, ad DA, (poſita media ID,) componitur ex proportio-
nibus IN, ad ID, & ID, ad DA: Eſt autem, vt proxime monſtratum eſt, vt IN, ad ID, ita OH, ad bH; [e] & vt ID, e 4. ſexti.
ad DA, ita AB, ad BE: componetur quoque proportio IN, ad DA, ex proportionibus OH, ad bH, & AB, ad BE:
[f] Sed proportio etiam producti P, ad productum Q, componitur ex eiſdem proportionibus, nimirum ex late- f 23. ſexti.
ribus. Igitur eadem eſt proportio P, ad Q, quæ IN, ad DA. Cum ergo, vt in 1. modo huius Num. 2. oſtendimus,
ſit IN, ad Aa, vt AD, ad AF, hoc eſt, permutando vt IN, ad DA, ita Aa, ad AF: Erit quoque P, ad Q, vt Aa, ad AF.
Quapropter ſi fiat,

Vt P, numerus, qui fit ex OH, differentia vmbrarum recta-rum in a b, latus quadrati,	*ad Q, numerum, qui fit ex vmbra recta bH, maiore in mino-rem BE,*	*Ita Aa, diffe-rentia ſtatio-num*	*ad AF, di-ſtantiam,*

producetur eadem diſtantia quæſita AF, in partibus differentiæ ſtationum Aa.

ALITER.

[g] QVONIAM eſt, vt bH, ad a b, ita aM, ad MG, ſi fiat, g 4. ſexti.

Vt bH, vm-bra recta,	*ad a b, latus qua-drati 1000.*	*Ita aM, qua-tenus 1.*	*ad MG,*

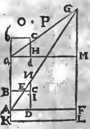
hoc eſt, (quia 1. multiplicans latus quadrati 1000. producit idem latus 1000.) ſi quadrati latus 1000. a b, diuidatur per vmbram rectam bH, exibit Quotiens MG, indicans, quoties aM, quatenus 1. in MG, comprehendatur. Eodem pacto, ſi fiat,

Vt BE, vmbra recta	*ad AB, latus qua-drati 1000.*	*Ita AF, quatenus 1.*	*ad FG,*

hoc eſt, ſi quadrati latus 1000. AB, diuidatur per vmbram rectam BE, fiet Quotiens FG, ſignificans, quoties AF, quatenus 1. contineatur in FG. Si igitur ex poſteriore hoc Quotiente FG, prior ille Quotiens MG, detrahatur, reliqua fiet FM, vel Aa, differentia ſtationum cognita in partibus, quarum AF, eſt 1. Quocirca ſi fiat,

Vt Aa, differentia Quotientum, qui fiunt, ſi latus quadrati per vtramque vmbram rectam di-uidatur,	*ad Aa, differentiam ſtationum notam in menſura aliqua:*	*Ita AF, vt 1.*	*ad AF, di-ſtantiam,*

hoc eſt, ſi differentia ſtationum diuidatur per differentiam Quotientum, efficietur nota diſtantia AF, in partibus differentiæ ſtationum Aa, &c.



3 SI denique in ſtatione inferiori latus vmbræ rectæ ſecetur in E, & in ſuperiori ſtatione latus vmbræ verſæ in H, reducenda quoque erit vmbra recta ad verſam, vt diximus, & producendum latus DC, vmbræ verſæ vſque ad punctum N, ſumendaque DI, ipſi dH, æqualis. Nam vt Numer. 1. oſtendimus, ſi fiat,

Vt NI, differentia vm-brarum verſarum	*ad Aa, differentiam ſtationum:*	*Ita AD, latus quadrati*	*ad AF, diſtan-tiam,*

cognita rurſus erit diſtantia AF, in partibus differentiæ ſtationum Aa.

ALITER.

SINE reductione vmbræ rectæ ad verſam ita quoque agemus. Numerus qui fit ex recta vmbra BE, in vm-
bram verſam dH, auferatur ex 1000000. quadrato lateris 1000. reſiduumque ſit, O. Item ex vmbra recta BE, in
latus quadrati 1000. fiat P. Et quoniam, vt in initio huius lib. in conſtructione quadrati Num. 6. oſtendimus, latus
quadrati medio loco proportionale eſt inter vmbras BE, DN. [h] Erit rectangulum ſub BE, DN, quadrato lateris h 16. ſexti.
æquale. [i] Cum ergo rectangulum ſub BE, DN, æquale ſit rectangulis ſub BE, DI, & ſub BE, NI: Si rectangulum i 1. ſecund.
ſub BE, DI, auferatur ex rectangulo ſub BE, DN, id eſt, ex 1000000. quadrato lateris AD, reliquum fiet rectan-
gulum ſub BE, NI; ac proinde cum DI, ipſi dH, ſit æqualis, fiet rectangulum ſub BE, DI, ex vmbra BE, in vm-
bram dH; atque idcirco reliquum rectangulum ſub BE, NI, (quod videlicet relinquitur, ſi rectangulum ſub

 BE, DI,

BE,DI,ex quadrato lateris detrahatur, vt dictum eſt,) numero O, æquale erit: Eſt autem ex conſtructione re ctangulum quoque ſub BE, vmbra recta, & latere AD, numero P, æquale. Igitur cum numerus BE, multipli- c 17. ſepti. cans NI,AD, producat O,P,[c] erit O,ad P, vt NI, ad AD. Sed vt Num.1. huius problematis demonſtrauimus, v NI, differentia vmbrarum verſarum ad Aa, differentiam ſtationum, ita eſt AD, latus quadrati ad AF, & permu tando vt NI, ad AD, ita Aa, ad AF. Igitur erit quoque O, ad P, vt Aa, ad AF. Quamobrem ſi fiat,

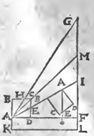
Vt O, numerus, qui relinquitur ſi numerus genitus ex vmbra recta in verſam ex quadrato lateris detrahatur,	*ad numerum P, qui ex vmbra recta BE, in latus AD, producitur:*	*Ita Aa, differentia ſtationum*	*ad AF, di ſtantiam*

procreatur diſtantia quæſita AF, in partibus differentiæ ſtationum Aa.

4 HIC etiam ſi forte in vna ſtatione linea fiduciæ, aut filum perpendiculi, tranſierit per punctum C, aſ ſumendum erit vel latus vmbræ rectæ, vel verſæ, vt Num.6. præcedentis problematis dictum eſt.

ALTITVDINEM cuiuslibet rei erectæ per eius diſtantiam ab oculo menſoris, beneficio quadrati coniicere.

PROBLEMA V.



1 SIT altitudo coniicienda GL, vel ML, vel IL, ad Horizontem perpendicularis. Statura menſoris vel aliqua alia menſura nota ſit FL, vel AK, pareturque planum Horizonti parallelum AF, in quo quadratum erigatur, cuius latus AD, intelligatur productum occurrens altitudini in F. Inſpecto cacumine I, ſecet primum dioptra vel filum perpendiculi latus CD, vmbræ verſæ in E, quod accidet, quando diſtantia AF, maior eſt, altitudine FI, vt problemate 1 Num.1. oſtendimus. Quoniam igitur triangulum ADE, triangulo AFI, æquiangulum eſt, vt ibidem monſtratum eſt;[a] erit vt AD, ad DE, ita AF, ad FI. Quamobrem ſi fiat,

a 4. ſexti.

Vt latus quadrati 1000.	*ad vmbram verſam DE:*	*Ita diſtantia AF, vel data, vel inuenta per probl.3. aut 4.*	*ad FI,*

patefacta erit altitudo FI, in partibus diſtantiæ AF, quæ ſi data non eſt, exquirenda erit vel per problema 3 vel 4. Et ſi ad FI, adiicietur menſura, vel ſtatura menſoris FL, tota altitudo propoſita IL, nota fiet,

2 DEINDE linea fiduciæ tranſeat per punctum C, quod fiet, quando diſtantia AF, altitudini FM, æ- b ſchol. 34. primi. qualis eſt;[b] quod tunc angulus CAD, ſemirectus ſit, ac proinde & reliquus M, in triangulo FAM.[c] Ideoque la- tera AF, FM, æqualia ſint. Quanta ergo eſt diſtantia AF, quæ vel data eſt, vel inuenienda per problema 3. vel 4. c 6. primi. tanta erit altitudo FM, cui addita FL, nota patefaciet totam altitudinem ML.

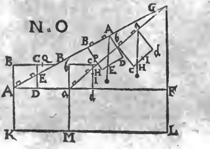
3 POSTREMO interſecetur vmbræ rectæ latus in H, quod eueniet, quando diſtantia AF, minor eſt altitudine FG: eritque triangulum ABH, triangulo AFG, æquiangulum, vt problemate 3. Num.3. demonſtrauimus. Igitur erit, vt BH, ad AB, ita AF, ad FG: ac proinde ſi fiat,

Vt vmbra recta BH,	*ad AB, latus quadrati 1000.*	*Ita diſtantia AF, vel data, vel inuenta per probl.3 aut 4.*	*ad FG,*

nota euadet FG, cui ſi addetur menſura vel ſtatura menſoris FL, efficietur nota tota altitudo GL, propoſita.

ALTITVDINEM eandem, etiamſi eius diſtantia ab oculo menſoris neque data ſit, neque inuenta, per duas ſtationes in plano factas patefacere auxilio quadrati.

PROBLEMA VI.



1 PROPOSITA ſit altitudo metienda FG, ſecluſa menſoris ſtatura FL. Fiant duæ ſtationes, vt in problemate 3. cuius figura 1. hic repetatur, ſeceturque primum vmbra verſa in vtraque ſtatione in punctis E, H. Et quia propter ſimilitudinem triangulorum ADE, AFG, eſt vt DE, ad AD, ita FG, ad AF, ſi fiat,

Vt DE,

Vt DE, vmbra verſa abſciſſa	*ad AD, latus quadrati 1000.*	*Ita FG, quatenus 1.*	*ad AF.*

hoc eſt, (cum 1. multiplicans latus quadrati 1000. producat idem latus 1000.) ſi quadrati latus 1000. diuidatur per vmbram verſam DE, prodibit Quotiens AF, indicans, quoties FG, in AF, contineatur. Eodem pacto ſi fiat,

Vt vmbra verſa dH,	*ad a d, latus quadrati 1000.*	*Ita FG, quatenus 1.*	*ad aF,*

hoc eſt, ſi quadrati latus 1000. diuidatur per vmbram verſam dH, gignetur Quotiens aF, monſtrans, quoties FG, in aF, contineatur. Si igitur poſterior hic Quotiens aF, ex priori Quotiente AF, detrahatur, relinquetur differentia Aa, cognita in partibus, quarum FG, eſt 1. Si ergo fiat,

Vt Aa, differentia Quotientum, diuiſo latere Quadrati per vtramque vmbram verſam,	*ad Aa, differentiam ſtationum.*	*Ita FG, vt 1.*	*ad FG,*

producetur altitudo FG, in partibus differentiæ ſtationum Aa, nota, & adiecta menſoris ſtatura FL, nota altitudo GK, nota fiet.

ALITER

EX differentia HI, vmbrarum verſarum in latus quadrati gignatur numerus N, & ex vmbra verſa DE, in verſam dH, fiat O. Productis autem lateribus BC, bc, vſque ad R, P, in radiis, abſcindatur BQ, ipſi bP, æqualis. Et quia, vt problemate 3. Numer. 3. demonſtratum eſt, ita eſt QR, differentia vmbrarum rectarum ad Aa, differentiam ſtationum, vt vmbra recta maior BR, ad AF, diſtantiam: [a] Vt autem BR, ad BA, ita eſt AF, ad FG: & permutando vt BR, ad AF, ita BA, ad FG; erit quoque QR, ad Aa, vt BA, ad FG. & permutando QR, ad BA, ad Aa, ad FG. Dico iam, vt eſt QR, ad AB, ita eſſe numerum N, ad numerum O. [b] Cum enim ſit, vt DE, ad DA, ita AB, ad BR; [c] erit rectangulum ſub DE, BR, rectangulo ſub DA, AB, hoc eſt, quadrato lateris æquale. Eademq; ratione erit rectangulum ſub dH, bP, eidem quadrato lateris æquale; ideoq; rectangulum ſub DE, BR, rectangulo ſub dH, bP, æquale erit. [d] Igitur erit, vt DE, ad dH, ita bP, ad BR: & conuertendo, vt dH, ad DE, ita BR, ad bP, vel ad BQ: & permutãdo vt tota dH, ad totam BR, ita DE, vel dI, ablata ad bP, vel ad BQ. ablatam. [e] Igitur & reliqua HI, ad reliquam QR. erit, vt tota dH, ad totam BR, vel vt ablata dI, ad ablatam BQ; & permutando, vt HI, ad dI, ita QR, ad BQ. vel ad bP. [f] Proportio autem numeri N, ad numerum O, componitur ex proportionibus HI, ad dI, vel ad DE, & lateris a d, ad dH, propterea quod N, factus eſt, ex HI, differentia vmbrarum verſarum in latus quadrati a d; At vero O, ex vmbra verſa DE, in verſam dH, ex conſtructione. Cum ergo ſit, vt paulo ante oſtendimus, quemadmodum HI, ad dI, ita QR, ad bP, [g] Item vt latus a d, ad dH, ita bP, ad b a, componetur quoque proportio N, ad O, ex proportionibus QR, ad bP, & bP, ad ba. Sed ex his eiſdem componitur proportio QR, ad b a. Igitur eadem eſt proportio N, ad O, quæ QR, ad b a, vel BA, quod oſtendere volebamus. Eſt autem vt QR, ad BA, ita Aa, differentia ſtationum ad altitudinem FG, vt ſupra oſtendimus prope initium huius demonſtrationis. Igitur ſi fiat,

[a] 4. ſexti. [b] 4. ſexti. [c] 16. ſexti. [d] 16. ſexti. [e] 19. quinti. [f] 24. ſexti. [g] 4. ſexti.

Vt N, numerus, qui fit ex HI, differentia vmbrarum verſarum in latus quadrati 1000.	*ad numerum O, factum ex vmbra verſa DE, in verſam dH.*	*Ita Aa, differentia ſtationum*	*ad FG, altitudinem,*

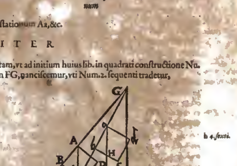
deprehenſa erit altitudo FG, in partibus differentiæ ſtationum Aa, &c.

ALITER

REDVCATVR vtraque vmbra verſa ad rectam, vt ad initium huius lib. in quadrati conſtructione Nu. 7. docuimus. Nam per has vmbras rectas altitudinem FG, nanciſcemur, vti Num. 2. ſequenti tradetur,

2 SECETVR deinde vtraque vmbra recta in E, H, vt in 2. figura problematis 3. quæ hic repetatur. Et quoniam ob ſimilitudinem triangulorum ABE, AFG, [h] eſt, vt BE, ad AB, ita AF, ad FG; erit permutando, vt BE, ad AF, ita AB, ad FG. Eademque ratione erit vt bH, ad aF, ita a b, ad FG; ac proinde erit, vt tota BE, ad totam AF, ita ablata bH, vel BI, ad ablatam aF, cum vtraque proportio ſit, quæ AB, vel a b, ad FG.

[h] 4. ſexti.



Igitur erit quoque reliqua IE, ad reliquam Aa, vt tota BE, ad totam AF, hoc eſt, vt AB, ad FG, cum duæ hæ proportiones eædem inter ſe ſint, vt paulo ante demonſtrauimus. Quocirca ſi fiat,

Digitized by Google

Vt IE, differentia vmbrarum rectarum	*Ad Aa, differentiam ſtationum:*	*Ita AB, quadrati latus 1000.*	*ad*

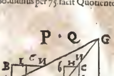
proſiliet nota altitudo FG, & adiuncta menſoris ſtatura FL, tota altitudo GL, quæſita nota efficietur.

ALITER

DIVIDE quadrati latus 1000. per vtramque vmbram rectam, & minorem Quotientem duc in differentiam ſtationu numerumque productum partire per differentiam Quotientum. Si namque hic vltimus Quotiens ducatur in Quotient maiorem ex prioribus duobus Quotientibus, producetur altitudo quæſita in partibus differentiæ ſtationum. Quod ita perſ cuum fiet.

SIT vmbra recta minor bH, 50. verbi gratia, & maior BE. 125. at differentia ſtationum Aa, ſit 16. paſſuu
a 4. ſexti. [a] Et quia eſt, vt bH ad a b, ita aF, quatenus 1. ad FG; ſi a b, 1000. diuidatur per bH 50 indicabit Quotiens 20. ctam aF, in FG, contineri vicies.

b 4. ſexti SICetiam,[b] quia eſt, vt BE, ad AB ita AF, quatenus 1. ad FG; ſi AB, 1000. diuidatur per BE, 125. monſt bit Quotiens 8. rectam AF, in FG, contineri octies. Quia itaque Aa, 16. paſſuum vna cum aF, continetur in F octies, fit vt Aa, 16. paſſuum octies ſumpta, vna cum aF, octies quoque ſumpta, faciat 128. paſſus, & aF, oct ſumptam; nimirum numerum ipſi FG, æqualem. Eſt autem AF, vicies ſumpta eidem FG, æqualis Igitur 1 paſſus, vna cum aF, octies ſumpta æquiualent ipſi aF, vicies ſumptæ. Si ergo vtrobiq, auferatur aF, octies ſu pta, reliqui erunt 128. paſſus æquales ipſi aF, duodecies ſumptæ. Quare ſi 128. diuidantur per 12. prodibunt 1 paſſus pro recta, aF, cum hic Quotiens in 12. ductus producat 128. Cum igitur AF, contineatur vicies in FG aF, $10\frac{2}{3}$. paſſuum ducatur in 20. procreabitur altitudo FG, $213\frac{1}{3}$. paſſuum. Vides ergo minorem Quotientem in differentiam ſtationum paſſuum 16. ductam eſſe, vt gignerentur 128. & hunc numerum diuiſum eſſe per differentiam Quotientum, vt prodirent paſſus $10\frac{2}{3}$. pro recta aF: ac tandem hunc Quotientem $10\frac{2}{3}$. ductum e in 20. Quotientem maiorem, vt produceretur altitudo FG, paſſuum $213\frac{1}{3}$. vt in regula præcepimus. Quam al tudinem etiam reperies per præcedentem viam, ſi nimirum fiat, vt 75. differentia vmbrarum rectarum, ad d ferentiam ſtationum, nimirum ad 16. paſſus, ita quadrati latus 1000. ad aliud. Nam 16. ducta in 1000, & prod ctus numerus 16000. diuiſus per 75. facit Quotientem $213\frac{1}{3}$. veluti prius.



3 DENIQVE in remotiore ſtati ne interſecetur vmbra verſa in E, & propinquiore vmbra recta in H, vt in figura probl. 3. Reducta vmbra verſa rectam, vt in Quadrati conſtructio Num. 7. principio huius lib. ſcripſim ſi fiat, vt IN, differentia vmbrarum ctarum ad Aa, differentiam ſtationu ita AB, latus Quadrati 1000. ad aliu procreabitur altitudo FG, quemadm dum Num. 2. oſtendimus.

4 SI forte in vna ſtatione tranſiret linea fiduciæ, aut filum perpendiculi per punctum C, aſſumendu eſſet in primo caſu latus CD, vmbræ verſæ: In duobus autem alijs caſibus latus BC, vmbræ rectæ.

ALITER

SINE reductione vmbræ verſæ ad rectam ita agendum erit. Numerus, qui fit ex vmbra verſa DE, in vm bram rectam bH, auferatur ex 1000000. quadrato lateris 1000. reſiduumque ſit P. Item ex vmbra verſa DE,
c 4. ſexti. latus 1000. fiat Q.[c] Et quoniam ob triangulorum ſimilitudinem eſt, vt BN, ad BA, ita AF, ad FG: Et permuta do, vt BN, ad AF, ita BA, ad FG. Sed vt BN, vmbra recta maior ad AF, diſtantiam, ita eſt IN, differentia vmbr rum rectarum ad Aa, differentiam ſtationum, vt Num. 5. in probl. 3. dictum eſt. Igitur erit quoque IN, ad Aa,
d 4. ſexti. cuti AB, ad FG: Et permutando IN, ad AB, vt Aa, ad FG. Dico iam ita eſſe P, ad Q, vt IN, ad AB.[d] Quoniam
e 17. ſexti. nim eſt, vt DE, ad AD, ita AB, vel AD, ad BN:[e] erit rectangulũ ſub DE, BN, æquale quadrato num. 100000
f 1 ſecund. lateris AB, 1000.[f] Eſt autem rectangulum ſub DE, BN, æquale rectangulis ſub DE, BI, & ſub DE, IN. Igitu productum ex vmbra verſa DE, in BI, hoc eſt, in vmbram rectam bH, dematur ex rectangulo ſub DE, BN, h eſt, ex quadrato 1000000. remanebit rectangulum ſub DE, IN. Ac propterea P, fiet ex DE, in IN. Fit autem
g 17. ſepti. ex eadem vmbra verſa DE, in latus AB, 1000. Igitur cum DE, multiplicans IN, & AB; producat P, Q,[g] erit P, Q, ſicut IN, ad AB; hoc eſt, ſicut Aa, ad FG. Quocirca ſi fiat,

Vt P, numerus, qui relinquitur, ſi productus ex vmbra verſa DE, in vmbram rectam bH, ex quadrato 1000000. detrahatur,	*ad Q, numerum, qui fit ex vmbra verſa DE, in latus AB, 1000.*	*Ita Aa, differentia ſtationum*	*ad FG, altit dinem,*

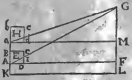
producetur altitudo FG, nota in partibus differentiæ ſtationum Aa: cui ſi adiicietur ſtatura menſoris FL, to altitudo GL, nota efficietur.

IN ſcholio porro ſequentis problematis idem hoc problema per vnicam ſtationem abſoluemus.

ALTITVDINEM eandem, quando diſtantia ab oculo menſoris neque data eſt, neque inuen ta, neque è directo altitudinis duæ ſtationes fieri poſſunt, per duas ſtationes in aliqua baſ erecta factas, indagare per Quadratum.

PRO

PROBLEMA VII.



1 CVM in plano duæ ſtationes fieri commode nequeunt, erigatur haſta aliqua Kb, ad Horizontem recta, niſi forte adſit aliquod ædificiũ erectum, ibiq; fiant duæ ſtationes in A, & a, vt in problemate 4. Cadat autem primum dioptra, vel filum perpendiculi in vtraque ſtatione in vmbram verſam, vt in 1. figura problematis 4. quæ hic repetita eſt. [a] Et quoniã propter triangulorum ſimilitudinem eſt, vt AD, ad DE, ita AF, ad FG; erit permutando vt AD, ad AF, ita DE, ad FG. Eademque ratione erit vt, a d, ad aM, ita dH, ad MG. Cum ergo eadem ſit proportio AD, ad AF, quæ a d, ad aM, propter æqualitatem rectarum AD, a d, & AF, aM; [b] erit vt tota DF, ad totam FG, ita dH, hoc eſt, ita DI, ablata ad ablatam MG. [c] Igitur erit quoque reliqua IE, ad reliquam FM, hoc eſt, ad Dd, vt tota DE, ad totam FG. Quocirca ſi fiat,

a 4. ſexti.
b 11. quint.
c 19. quint.

Vt IE, differentia vmbrarum verſarum	*ad Dd. differentiam ſtationum:*	*Ita DF, maior vmbra verſa*	*ad I G, altitudinem,*

euadet cognita altitudo FG, in partibus differentiæ ſtationum Dd. Appoſita autem ſtatura menſoris FL, tota altitudo GL, quæſita cognita erit.

2 ABSCINDAT deinde dioptra in vtraque ſtatione vmbram rectam, vt in 2. figura problematis 4. quæ poſita eſt in pagina 92. [d] Et quia propter triangulorum ſimilitudinem eſt vt bH, ad a b, ita aM, ad MG: [e] erit rectangulum ſub bH, MG, æquale rectangulo ſub a b, aM. Eadem ratione erit rectangulum ſub BE, FG, æquale rectangulo ſub AB, AF, [f] quod eadem quoque ſit proportio BE, ad AB, quæ AF, ad FG. Cum ergo rectangulum ſub a b, aM rectangulo ſub AB, AF, æquale ſit, ob æqualitatem rectarum a b, AB, & aM. AF, erit etiam rectangulum ſub bH, MG; rectangulo ſub BE, FG, æquale. [g] Quare erit vt tota bH, ad totam FG, ita BE, vel bO, ablata ad ablatam MG; [h] Ac propterea erit quoq; reliqua OH, ad reliquam FM, ſiue ad Aa, vt tota bH ad totam FG. Quamobrem ſi fiat,

d 4. ſexti.
e 16. ſexti.
f 4. ſexti.
g 16 ſexti
h 19. ſexti

Vt OH, differentia vmbrarum rectarum	*ad Aa, differentiam ſtationum:*	*Ita bH, maior vmbra recta*	*ad FG, altitudinem,*

altitudo FG, prodibit cognita, quæ cum ſtatura menſoris FL totam altitudinem LG, efficiet notam. Vbi vides eundem prorſus eſſe operandi modum in vmbris rectis, & in verſis.

3 POSTREMO in ſtatione inferiori reſecetur vmbra recta BE, & verſa dH: in ſuperiori ſtatione, vt in 3. figura problematis 4. quæ poſita eſt in pagina 94. Reducta ergo vmbra recta ad verſam, vt ad initium huius libri in conſtructione Quadrati Numer. 7. declarauimus: ſi fiat, vt IN, differentia vmbrarum verſarum ad Aa, differentiam ſtationum, ita DN, vmbra verſa maior ad aliud, procreabitur FG, altitudo in partibus differentiæ ſtationum Aa, quemadmodum Num. 1. demonſtrauimus. Quod ſi malueris reducere vmbram verſam ad rectam, eandem altitudinem reperies per duas vmbras rectas, ecu Num. 2. monſtrauimus.

4 QVANDO fortaſſe in altera ſtationum linea fiduciæ tranſiret per punctum C, in arbitrio tuo erit, vel totum latus vmbræ verſæ, vel rectæ aſſumere.

SCHOLIVM.

1 EANDEM altitudinem, eiuſque diſtantiam ab oculo menſoris, vna cum hypotenuſa ab oculo ad faſtigium altitudinis extenſa, venari licebit ope quadrati ſtabilis per vnicam ſtationem, etiamſi ſolum faſtigium rei erectæ cernatur: adeo vt ſcholium hoc omnia præſtet, quæ in problemate 3. 4. 5. 6. & 7. per plures ſtationes inueſtigauimus, ac proinde diligenter perdiſcendum.

SIT enim altitudo metienda IF; ſtatura menſoris IG, vel HA. Paretur planum Horizonti æquidiſtans per A, tranſiens, in quo Quadratum firmari poſſit, aut collocari. Primum ergo inueſtiganda eſt hypotenuſa AF, hoc modo. Inclinetur quadratum, ita vt centrum dioptræ occupet ſuperiorem locum lateris aA, cuius inferius punctum ſtatuatur in A, oculo menſoris. Et totum quadratum tamdiu eleuetur, aut deprimatur, donec latus Ae, recta in cacumen F, vergat. Manente ſic Quadrato, menſor oculum transferat ad a, & per dioptram inſpiciat cacumen F, noteturque partes vmbræ verſæ abſciſſæ b c. Deinde fiat,

Quo pacto præcedentia 5. problemata, ope quadrati ſtabilis per vnicam ſtationem abſoluantur.



Vt b c, vmbra verſa	*ad latus a b, 1000.*	*Ita latus aA, notum in data menſura, quod nunc ponamus continere 3. pedes,*	*ad AF.*

Nam inuentus numerus dabit hypotenuſam AF, cognitam in partibus lateris aA. Verbi gratia. ſi cb, contineat 50. partes vmbræ verſæ, & aA, tribus pedibus ſit æqualis: ſi fiat vt 50. ad 1000. ita 3. ad aliud, reperietur AF, complecti 60. pedes. Si vero aA, ponatur 1000. comperietur eadem AF, particularum 20000. qualium 1000. in aA, comprehenduntur.

2 POST hæc deprimatur quadratum, ita vt latus AD, Horizonti æquidiſtet, centrumque dioptræ ſ
A, quo poſito, videbitur cacumen F, per inuentam hypotenuſam AF, quæ primum ſecet vmbram verſam
in E, vt in primo quadrato, inquiraturque portio dioptræ AE, in partibus laterum AD, DE, [a] quod fiet v
vtroque latere AD, DE, cognito: [b] Vel ex cognito per problema 1. ex vmbra DE, angulo DAE, ex latere
noto: [c] Vel deniqur ſi ex ſumma quadratorum ex AD, DE, deſcriptorum radix quadrata extrahatur. Inu
portione AE, in partibus milleſimis lateris AD, ductaque EM, ipſi AG, parallela, [d] ſi fiat,

a 6. Trian. rectil.
b 5. triang. rectil.
c 47. prim.
d 2. ſexti & componendo.

Vt AE, inuenta in partibus milleſimis lateris AD,	*ad AF, in iiſdem partibus inuentam:*	*Ita GM, in iiſdem partibus cognita, cum æqualis ſit ipſi DE,*	*ad*

nota efficietur GF, in partibus milleſimis lateris AD. Quod ſi rurſus fiat,

Vt latus AD, 1000.	*ad 3. pedes, quos ponimus in AD, contineri:*	*Ita GF: in milleſimis partibus lateris AD, inuenta,*	*ad*

reperietur eadem GF, in menſura pedum. Et ſi adijciatur, ſtatura menſoris GI, nota in eadem menſura, cog
fiet tota altitudo IF, in menſura pedum.

Vbi vides, nos eadem opera inueniſſe quoque diſtantiam AF, ab oculo A, ad cacumen vſque F.

3 SECET deinde hypotenuſa aF, inuenta (inuenietur autem vt Num. 1. dictum eſt) vtrumq; latus
bræ in C, vt in 2. quadrato. [e] Si igitur fiat,

e 2. ſexti & componendo.

Vt portio dioptræ ac, inuenta in partibus ad, lateris, 1000. vt Num. 2. diximus	*ad aF. hypotenuſam in iiſdem partibus inuentam.*	*Ita GK, 1000.*	*ad*

prodibit GF, nota in partibus milleſimis lateris dc: Et ſi rurſus fiat,

Vt latus dc, 1000.	*ad 3. pedes, quibus æquale ponimus latus dc,*	*Ita GF, in milleſimis partibus lateris dc, inuenta,*	*ad*

inuenta erit eadem GF, in menſura pedum. Et ſi addatur ſtatura menſoris GI, nota in eadem menſura, cog
ſcetur tota altitudo IF, in menſura pedum.

4 TERTIO ſecet hypotenuſa inuenta AF (quæ inuenietur vt Num. 1. docuimus) vmbram rectam
E, vt in tertio quadrato. [f] Si ergo fiat.

f 2. ſexti & componendo.

Vt portio dioptræ AE, inuenta, vt Num. 2. docuimus	*ad AF, hypotenuſam inuentam*	*Ita GK, 1000.*	*ad*

exibit GF, nota in partibus milleſimis lateris DC. Et ſi iterum fiat,

Vt latus DC, 1000.	*ad 3. pedes in DC, contentos:*	*Ita GF. in partibus milleſimis lateris DC, inuenta,*	*ad*

cognita erit eadem GF, in menſura pedum, &c.

ATQVE hac eadem ratione omnes aliæ lineæ inuentæ in partibus milleſimis lateris Quadrati reuo
buntur ad quamcunque aliam menſuram, vt ad pedes, vel cubitos, &c.

5 DISTANTIA autem AG, vel HI, cognita euadet, [g] ſi fiat,

g 2. ſexti & componendo.

Vt portio dioptræ AE, in primo Quadrato, vel ac, in 2. Quadrato,	*ad hypotenuſam AF, vel aF,*	*Ita latus AD, in 1. Quadrato vel ad, in 2. Quadrato*	*ad AG, quadrat vel ad aC ſecundo.*

VEL

Ducta EL, lateri AB, parallela in tertio quadrato,

Vt AE, portio dioptræ	*ad hypotenuſam AF,*	*Ita vmbra recta BE, ipſi AL, æqualis,*	*ad*

VIDES igitur, in hac ratione dimetiendæ altitudinis, ac diſtantiæ, etiam inacceſſibilis, opus non eſſe d
bus ſtationibus ſiue in plano, ſiue in haſta aliqua erecta faciendis; Quod non parum moleſtiæ plerunque affe
ſolet: ſed ſolum inueſtigandam eſſe prius hypotenuſam per quadratum ſtabile inclinatum, Deinde portion
dioptræ inter eius centrum, & latus Quadrati, quod interſecat: quæ inuentio difficilis non eſt, vt patuit, c
menſor nunquam locum mutare cogatur.

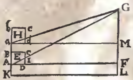
ALT

Digitized by Google

ALTITVDINEM turris aut montis, ex eius ſummitate per Quadratum dimetiri, quando in plano ſummitatis Horizonti æquidiſtante, duæ ſtationes fieri poſſunt, & ſignum aliquod in Horizonte cernitur.

PROBLEMA VIII.

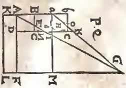
1 SIT altitudo DFMd, in cuius ſummitate, nimirum in plano Dd, duæ ſtationes fieri poſſint, ex quibus ſignum aliquod in Horizonte, videlicet G, videri poſſit. (Nos ne nouam cogeremus deſcribere figuram, repetiuimus primam problematis 4. inuerſo tamen ordine poſitam, ita vt literæ rectum ſitum non habeant. Et quamuis ſignum G, non cernatur ex A, propter planum Dd, eadem tamen erit ratio, ſi aliud ſignum longius diſtans eligatur, quod ex A, inſpici poſſit.) Collocetur inſtrumentum in vtraque ſtatione, vt latus vmbræ rectæ DC, vergat deorſum. Et primum vtraque vmbra recta ſecetur in E, H, (In hac enim inuerſione latus DC, vmbræ rectæ, & BC, verſæ deputatur, vt in conſtructione Quadrati Num. 4. initio huius libri declaratum eſt) atque vmbræ dH, in propinquiore ſtatione, quæ ſemper minor eſt, æqualis abſcindatur DI. Itaq; ſi fiat,



Vt IE, differentia vmbrarum rectarum	*ad Aa, differentiam ſtationum.*	*Ita AD, latus quadrati 1000.*	*ad AF,*

cognita erit recta AF, ex qua ſi dematur latus quadrati AD, notum in partibus differentiæ ſtationum, nota relinquetur altitudo DF, vel dM, quæſita. Inueniri autem hac ratione rectam AF, demonſtratum eſt in problemate 4. Num. 1.

2 QVOD ſi in vtraque ſtatione latus vmbræ verſæ ſecetur in F, H, vt in 2. figura problematis 4. hic repetita, inuerſa tamen, habebimus tres vias inueſtigandi altitudinem AF, ex qua ſi tollatur latus Quadrati AD, manifeſta relinquetur quæſita altitudo DF, vel dM. Nam reducta vtraque vmbra verſa ad rectam, ſi fiat,



Vt IN, differentia vmbrarum rectarum,	*ad Aa, differentiam ſtationum:*	*Ita AD, latus quadrati 1000.*	*ad AF,*

Vel ſine reductione.

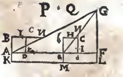
Vt P, numerus, qui fit ex OH, differentia vmbrarum verſarum in a b, latus, quadrati,	*ad numerum, Q, qui fit ex vmbra verſa bH, maiore in minorem BE,*	*Ita Aa, differentia ſtationum*	*ad AF,*

VEL

Vt Aa, differentia Quotientum, qui fiunt, ſi latus quadrati per vtramque vmbram verſam diuidatur,	*ad Aa, differentiam ſtationum notam in menſura aliqua:*	*Ita AF, vt 1.*	*ad AF,*

procreabitur ſemper altitudo AF, ab oculo inſpectoris A, numerata: quemadmodum in problemate 4. Numer. 2. demonſtratum eſt.

3 SI denique in vna ſtatione ſecetur latus vmbræ verſæ in E, & in altera latus vmbræ rectæ in H, vt in 3. figura problematis 4, hic inuerſo ordine repetita: ſi vt in eodem problemate 4. Num. 3. demonſtrauimus, reducatur vmbra verſa ad rectam, & fiat,



Vt NI, differentia vmbrarum rectarum	*ad Aa, differentiam ſtationum:*	*Ita AD, latus quadrati*	*ad AF,*

Vel ſine reductione.

Vt O, numerus, qui relinquitur, ſi numerus genitus ex vmbra verſa in rectam ex quadrato lateris dematur,	*ad numerum P, qui ex vmbra verſa BE, in latus AD, producitur:*	*Ita Aa, differentia ſtationum*	*ad AF,*

producetur AF, altitudo in partibus differentiæ ſtationum Aa, &c.

4 IAM vero ſi diſtantia FG, à turri ad ſignum G, in Horizonte viſum nota fuerit, facilius per vnicam ſtationem in A, factam altitudinem coniiciemus. Nã ſi vmbra recta DC, ſecetur in E, vt in 1. figura:[a] Fiat autem. a 4. ſexti.

Vt vmbra recta DE,	*ad latus AD:*	*Ita diſtantia cognita FG,*	*ad AF,*

Vel quando vmbra verſa BC, ſecetur in E, vt in 2. figura;[b] ſi fiat. b 4. ſexti.

Vt latus AB,	*ad vmbram verſam BE,*	*Ita diſtantia cognita FG,*	*ad AF,*

efficie.

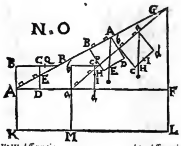
efficietur nota recta AF, in partibus diſtantiæ FG, à qua ſi dematur latus quadrati AD, notum in eiſdem partibus diſtantiæ FG, nota relinquetur altitudo DF.

a 6. primi. QVOD ſi dioptra per C, tranſeat, a erit diſtantia FG, altitudini AF, æqualis. Dempto ergo latere quadrati AD, altitudo turris DF, cognita fiet.

HOC idem problema in ſcholio ſequentis problematis abſoluemus per vnicam ſtationem.

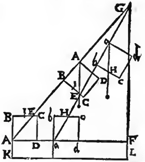
ALTITVDINEM turris vel montis ex eius ſummitate per duas ſtationes in haſta aliqua erecta factas, inueſtigare per quadratum, quando ſignum aliquod in Horizonte videri poteſt.

PROBLEMA IX.



1 QVANDO in ſummitate non eſt planities tanta, vt in ea duæ ſtationes poſſint fieri, erigatur haſta aliqua in qua duæ ſtationes fiant. Vt ſi altitudo inueſtiganda ſit dF, erigatur haſta d A, & centro dioptræ applicato ad haſtam primum in a, deinde in A, inſpiciatur ſignum aliquod G, in Horizonte per radios aG, AG. ſeceturque primum vtraque vmbra recta in H, E, vt in prima figura problematis 3. quam hic inuerſo ordine repetiuimus. Nam vt in præcedenti problemate diximus, in hac inuerſione DC, ſit latus vmbræ rectæ, & BC, verſæ. Si ergo, vt in problemate 1. demonſtrauimus Num. 1. fiat,

Vt HI, differentia vmbrarum rectarum | *ad Aa, differentiam ſtationum:* | *Ita dH, vmbra recta maior* | *ad AF,*

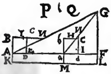


nota fiet tota recta AF, ex qua ſi dematur portio haſtæ Ad, quod duo quadrata occupant, cognita fiet reliqua altitudo dF.

2 SI vero in vtraque ſtatione vmbra verſa à radiis interſecetur, vt in 2. figura problematis 3. hic repetita ordine inuerſo, & fiat,

Vt IE, differentia vmbrarum verſarum, | *ad Aa, differentiam ſtationum:* | *Ita BE, vmbra verſa maior* | *ad AF,*

prodibit recta AF, ex qua ſi detrahatur portio haſtæ A d, à principio primi quadrati ad finem ſecundi, reliqua dF, altitudo fiet quoque nota: veluti in problemate 3. Num. 3. oſtendimus,



3 AT ſi in vna ſtatione ſecetur latus vmbræ rectæ, & in altera latus vmbræ verſæ, vt in 3. figura problematis 3. quæ inuerſa huc translata eſt, reducenda erit vel recta vmbra ad verſam, vel verſa ad rectã. Nam vt in problemate 3. nu. 5. oſtendimus ſi fiat,

Vt IN, differentia vmbrarum ſiue verſarum, ſiue rectarum, | *ad Aa, differentiam ſtationum:* | *Ita BN, maior vmbra verſa, vel dN, maior vmbra recta,* | *ad AF,*

efficietur nota recta AF, ex qua ſi dematur portio haſtæ Ad, nota relinquetur altitudo dF.

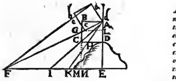
4 QVOD ſi turris eſſet AF, & ex duabus feneſtris d, D, obſeruatio fieret, deprehenderetur eodem modo altitudo turris AF, vt patet.

SCHOLIVM.

1 QVOD præcedentia duo problemata per duas ſtationes ſiue in plano ſummitatis turris, vel montis, ſiue in haſta aliqua erecta factas docuerunt, poſſumus per vnicam ſtationem quoque efficere, & ſimul diſtantiam à perpendiculo montis, vel à turre vſque ad ſignum in Horizonte propoſitum inuenire.

SIT

SIT enim montis alicuius, aut turris altitudo DE, & ſignum in Horizonte viſum F. Erigatur ex D, haſta aliqua DA, & ſumpta DA, æquali lateri quadrati ſtabilis, accommodetur quadratum ab c d, in A, ita vt centrum dioptræ a, ſit ſuperius, & latus inferius recta ad ſignum F, vergat. Poſito deinde oculo in a, dirigatur dioptra verſus F, notenturque partes in vmbra verſa b C. Nam ſi fiat,



Altitudinē montis, vel turris ex eius vertice per vnicam ſtationem, vna cum diſtantia à turre, vel perpendiculo montis ad ſignum in Horizonte propoſitum metiri.

Vt be, vmbra verſa	*ad latus ba, 1000.*	*Ita latus a d, 1000.*	*ad AF,*

reperietur hypotenuſa AF, in partibus lateris a d. Accommodetur rurſus quadratum ABCD, vt centrum dioptræ A, ſit ſuperius, & latus CD, Horizonti æquidiſtet, hoc eſt, latus AD, haſtæ rectæ congruat. Quo poſito, videbitur ſignum F, per inuentam hypotenuſam AF, quæ primum ſecet latus vmbræ verſæ BC, in G, inquiraturque portio dioptræ AG, vt in ſchol. problem. 7. Num. 2. docuimus.[a] Nam ſi fiat,

Vt portio dioptra AG, inuenta	*ad inuentam hypotenuſam AF,*	*Ita AL, vmbra verſa BG, æqualis (ducta GL, parallela ipſi EF,)*	*ad AE,*

a 4. ſexti & componendo.

comperta erit AE, in partibus hypotenuſæ AF. Et ſi dematur latus quadrati AD, in iiſdem partibus notum, reliqua fiet DE, altitudo montis, aut turris. Quod ſi rurſus fiat,

Vt portio dioptra AG, inuenta	*ad inuentam hypotenuſam AF,*	*Ita EM, (producta BC, vſque ad M,) lateri CD, æqualis,*	*ad EF,*

exibit nota diſtantia EF, in iiſdem partibus hypotenuſæ AF.

VBI vides eadem opera inueniri diſtantiam ab oculo A, vſque ad ſignum F, in Horizonte.

NON erit autem difficile ipſam DE, vel EF, ſi inuenta fuerit in partibus milleſimis lateris AD, vel CD, in alia menſura, vt in pedibus, efficere notam; ſi fiat,

Vt AD, latus 1000.	*ad AD, notam in pedibus, verbi gratia in 3. vel in ſemiſſe vnius cubiti:*	*Ita DE, vel EF, inuentam milleſimis partibus,*	*ad aliud*

Atque hac eadem ratione omnes aliæ lineæ inuentæ in milleſimis partibus lateris quadrati, reducentur ad aliam menſuram vel pedum, vel cubitorum &c. Quod etiam in ſcholio problem. 7. monuimus.

2. SECET deinde hypotenuſa AI, (quæ reperietur vt AF, inuenta eſt) quadratum in C: inueſtigeturq; portio dioptræ AC, vt in ſchol. problem. 7. Num. 2. tradidimus.[b] Deinde fiat,

Vt portio dioptra AC, inuenta	*ad inuentam hypotenuſam AI,*	*Ita AD, latus 1000.*	*ad AE,*

b 2. ſexti & componendo.

Nam numerus productus dabit AE, in partibus hypotenuſæ AI. Atque totidem partes complectetur diſtantia EI;[c] quod AE, EI, æquales ſint ob angulos ſemirectos EAI, EIA, æquales.

c 6. primi.

3 POSTREMO hypotenuſa AK, inuenta eo modo, quo AF, cognita eſt, ſecet latus CD, vmbræ rectæ in H, reperiaturque portio dioptræ AH, vt in ſchol. problem. 7. Num. 2. docuimus.[d] Nam ſi fiat,

Vt portio dioptræ AH, inuenta	*ad inuentam hypotenuſam AK,*	*Ita AD, latus quadrati*	*ad AE,*

d 2. ſexti & componendo.

cognoſcetur AE, in partibus hypotenuſæ AK, &c. Et ſi rurſus fiat, ducta prius HN, ipſi AE, parallela,

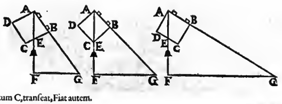
Vt portio dioptra AH, inuenta	*ad inuentam hypotenuſam AK,*	*Ita EN, vmbræ rectæ DH, æqualis*	*ad EK,*

nota quoque reddetur diſtantia EK, in iiſdem partibus hypotenuſæ AK, &c. Quod ſi ex vertice D, appareret radix montis, inueniretur eodem modo diſtantia à radice vſque ad E, quæ ablata ex diſtantia FE, inuenta notam quoque relinquet diſtantiam ab F, vſque ad radicem montis, quæ nonnumquam poſſet deſiderari.

EX ſummitate turris, vel aliqua eius feneſtra, diſtantiam à baſe turris ad ſignum propoſitam in Horizonte per quadratum cognoſcere.

PROBLEMA X.

1 SIT turris aliqua AF, & diſtantia metiēda FG. Si igitur altitudo turris cognita eſt, aut eius portio inter feneſtrā A, & baſem F; inſpiciatur ſignum G, per pinnacidia quadrati pēduli Et ſi quidem filum perpēdiculi interſecet latus vmbræ rectæ in E, vel per punctum C, tranſeat, Fiat autem.



Vt latus

Vt latus AB, partium 1000.	*ad vmbram rectam BE,*	*Ita AF, altitudo turris nota*	*ad FG,*

cognita erit diſtantia FG, quæſita in partibus turris notæ.

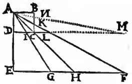
SI autem vmbra verſa ſecetur in E, & fiat,

Vt vmbra verſa DE,	*ad latus DA, partium 1000.*	*Ita AF, altitudo turris cognita*	*ad FG,*

efficietur quoque nota eadem diſtantia FG, in partibus turris cognitæ.

2 Per quadratum ſtabile eandem quoque diſtantiam adipiſceris. Sit enim rurſus turris quæpiam DE, & diſtantia metienda EG, vel EH, vel EF. Si igitur dioptra ſecet latus vmbræ rectæ in I. Et fiat,

Vt latus quadrati AD, 1000.	*ad vmbram rectam DI:*	*Ita altitudo AE, ex turre & latere quadrati AD, conflata.*	*ad EG,*



prodibit diſtantia quæſita EG.

SI autem dioptra per C, tranſcat, erit diſtantia EH, altitudini AE, notæ æqualis.

SI denique vmbra verſa interſecetur in K; fiat autem,

Vt vmbra verſa BK,	*ad latus quadrati 1000.*	*Ita altitudo nota AE,*	*ad EF,*

inuenietur diſtantia EF, in partibus altitudinis AE.

HÆC enim omnia in 2. problem. Num. 1. & 2. demonſtrata ſunt.

3 QVOD ſi altitudo turris cognita non ſit, inueſtiganda ea primum erit per problema 8. vel 9. vel potius per ſcholium problem. 9. aut certe, ſi commode fieri poſſit, per chordam aliquam cum appenſo perpendiculo demiſſam exploranda. Deinde procedendum erit, vt Num. 1. & 2. dictum eſt.

VERVM ſine cognitione turris idem aſſequemur ea ratione, qua in problem. 6 vel 7. altitudinem propoſitam indagauimus, etiamſi diſtantia vſque ad altitudinem ſit ignota. Nam ſi in 6. problemate turris ſit D, F, diſtantia autem metienda FG, efficiemus illud, ſi in haſta aliqua erecta DA, fiant duæ ſtationes oculi in a, A. Solum quod ibi dictum eſt de vmbra verſa, hic de recta intelligatur, & contra.

PARI ratione, ſi in 7. problemate turris ſit DF, & diſtantia metienda FG, inueniemus eam, ſi in plano ſummitatis turris fiant duæ ſtationes oculi in A, a. Solum quod ibi dicitur de vmbra verſa, hic etiam de recta intelligatur. Nam ſi figuræ problem. 6. & 7. hoc eſt, figuræ proble. 3. & 4. inuertantur, vt altitudines fiant AF, AF, latus quadrati DC, ad vmbram rectam, & BC, ad verſam pertinebit, vt initio huius libri in conſtructione quadrati Num. 4. explicauimus.

SED hanc diſtantiam longe facilius in ſcholio præcedentis problematis inuenimus per vnicam ſtationem, vt patuit in diſtantia EF, &c.

EX altitudinis alicuius faſtigio, etiamſi altitudo ſit menſoris ſtatura, diſtantiam inter duo ſigna in plano, cui altitudo inſiſtit, ſi ea diſtantia è directo menſoris iaceat, & vtrumque eius extremum cerni poſſit, per quadratum comprehendere.

PROBLEMA XI.



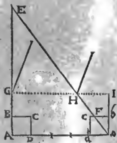
1 SIT diſtantia metienda AB, è directo altitudinis CD, in qua oculus menſoris exiſtat in D, faſtigio. Per problema antecedens inueſtigetur ex vertice D, tam diſtantia CB, quam CA. Minor enim hæc ex illa maiore detracta notam relinquet diſtantiam AB, inter ſigna A, & B, in partibus altitudinis CD, in quibus videlicet diſtantiæ etiam CB, CA, inuentæ ſunt.

2 SI altitudo CD, ſit ſtatura menſoris, reperietur eodem modo diſtantia AB, ſi oculus menſoris in D, vtrumque extremum A, B, cernere poſſit, vt liquet.

LONGITVDINEM in Horizonte extenſam metiri per Quadratum, quando menſor in vno eius extremo exiſtens alterum extremum videre non poteſt, propter tumorem aliquem interiectum, neque altitudo in promptu eſt, ſed ſolum ad dextram, vel ſiniſtrâ per lineam perpendicularem recedere poteſt ad locum, è quo alterum extremum appareat.

PRO-

PROBLEMA XII.



1 SIT longitudo metienda AE, cuius extremum E, ex A, menſor videre non poſſit, neq; adſit altitudo, ſed tamen ſi ad dextram, vel ſiniſtram recedat per lineam perpendicularem Aa, vſque ad a, illud videre poſſit. Quadratum ſtabile ita erigatur, vt eius planum longitudini AE, congruat. Debet namque conſtare, quænam recta ad extrema A, E, pertineat, hoc eſt, rectam conſtituat, cum data longitudine. Deinde collocato quadrato in Horizontis plano, ita vt latus AB, a longitudine non recedat, extendatur recta per latus AD, vſque ad a, vnde extremum, E, appareat, ſitq; ſpatium Aa, per aliquam menſuram notum. Erectum autem in a, quadratum circumducatur, donec per eius planum extremum E, cernatur. Poſt hæc idem quadratum in Horizonte collocetur, latuſque ad perpendiculari Aa, congruat: Et dioptra circumuoluatur, donec eius linea fiduciæ rectæ aH, per quam extremum E, inſpectum fuit, reſpondeat, noteturque vmbra verſa bF, abſciſſa. Eruntque triangula abF, a AE, æquiangula, propter rectos angulos b, A, & alternos baF, AEa, æquales. [a] Quamobrem ſi fiat, a 4. ſexti.

Vt vmbra verſa bF,	*ad quadrati latus a b, 1000.*	*Ita ſpatium Aa, notum*	*ad AE,*

cognita erit longitudo AE, in partibus ſpatii Aa.

SI forte dioptra latus d c, vmbræ rectæ interſecet, (quod raro continget, cum plerunque AE, maior ſit, quam Aa,) [b] erit tune b 4. ſexti.

Vt latus a d, 1000.	*ad vmbram rectam abſciſſam:*	*Ita ſpatium Aa,*	*ad longitudinem,*

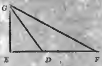
vt perſpicuum eſt, ſi ducatur ex a, recta ſecans latus de, &c.

SI denique dioptra fortaſſis per e, tranſiret, [c] eſſet ſpatium Aa, longitudini quæſitę æquale; propterea quod tunc fieret angulus ſemirectus d a e, ideoque & recta a e, ſi duceretur, faceret cum AE, angulum ſemirectum, atque adeo angulo d a e, æqualem. c 6. primi.

2 EADEM diſtantia longitudine AE, cognoſcetur, ſi tam in G, quam in H, baculus, ſeu arundo ad angulos rectos figatur, ita vt ex A, a, radii per arundinem incedentes ad E, ferantur, ſpatiumque Aa, cognitum ſit: vt in 2. probl. Num. 6. traditum eſt.

LONGITVDINEM in Horizonte è directo menſoris iacentem cognoſcere, ad cuius extrema neque accedere liceat, neque è loco menſoris eam dimetiri, neque vlla adſit altitudo, dummodo ad dextram vel ſiniſtram per lineam perpendicularem ad locum aliquem ire poſſit menſor, ex quo vtrumque extremum appareat.

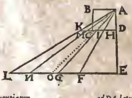
PROBLEMA XIII.



1 LONGITVDO metienda ſit ED, è directo menſoris in F, exiſtentis, ita vt neque ad eam accedere liceat, neque eam è loco F, metiri, neque vlla adſit altitudo: Sed ſolum per lineam perpendicularem FG, ad locum G, vnde vtrumque extremum D, E, videatur, poſſit accedere. Per problema præcedens inquiratur ex G, tam longitudo FE, quam FD. Hæc enim ex illa detracta notam relinquet propoſitam longitudinem DE.

ALTITVDINEM montis, vel turris ex eius faſtigio, quando è directo menſoris interuallum aliquod inter duo ſigna, vel etiam inter ſignum quodpiam ac turrim cognitum eſt, per quadratum conicere.

PROBLEMA XIV.



1. SIT mons, aut turris DE, ſitque pri[...] directo menſoris in faſtigio D, exiſtentis inter[...] FG, notum. Accommodetur quadratum ſta[...] ſummitate D, ita vt latus AD, perpẽdiculare ſit a[...] rizontem, & CD, Horizonti parallelum. Inſpe[...] tur per dioptram vtroque termino F, G, ſecet[...] bra recta in H, I. [a] Quoniam igitur eſt, vt IH, a[...] ita GF, ad FE: [b] Item ob triangulorum ſimilitu[...] vt HD, ad DA, ita FE, ad EA; erit ex æquo, vt[...] DA, ita GF, ad EA. Igitur ſi fiat,

a ſchol. 4. ſexti.
b 4. ſexti.

Vt IH, differentia vmbrarum rectarum	*ad DA, latus quadrati*	*Ita interuallum GF, cognitum*

exibit nota recta EA. Et ſi dematur latus quadrati DA, (quod fieri debet notum in partibus interualli GF[...] qua fiet nota altitudo DE, in partibus interualli GF.

c 4. ſexti. 2 SIT tota deinde diſtantia EG, nota. Inſpiciendum ergo ſolum eſt extremum G. [c] Nam ſi fiat,

Vt ID, vmbra recta	*ad DA, latus quadrati:*	*Ita diſtantia nota GE,*

efficietur rurſus nota recta EA, &c.

3 QVANDO vmbra verſa BC, interſecatur, vt ſi ſpatium notum ſit LN, reducenda eſt vtraque v[...] verſa ad rectas DK, DM. Nam rurſus erit, vt KM, differentia vmbrarum rectarum ad latus DA, ita ſpatiu[...] tum LN, ad EA.

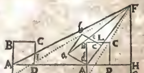
SIC etiam quando vnus radius vmbram rectam, & alter verſam interſecat, vt in ſpatio LG, conting[...] uocanda erit vmbra verſa ad rectam DK, vt iterum ſit KI. differentia vmbrarum rectarum ad DA, latus, v[...] tium notum LG, ad EA.

4 SI denique radius per C, tranſiret, ſumendum eſſet totum latus CD, pro vmbra recta, at vmbra v[...] ſi qua eſſet, ad rectam reducenda.

DISTANTIAM ab oculo, vel pede menſoris (vbicunque exiſtat) ad quoduis punctu[...] aliqua altitudine notatum per quadratum exquirere.

PROBLEMA XV.

1 EXPLORANDA ſit diſtantia puncti F, in muro aliquo ſiue perpendiculari ad Horizontem [...] inclinato, vel etiam in tecto quopiam ab oculo A, vel à pede E, poſita ſtatura menſoris AE. Et ſit primum a[...]



punctum F, quam oculus A. Concipiatur ex F[...] miſſa perpendicularis FG, & ad hanc ducta ab [...] lo A, alia perpendicularis AH. Collocato erg[...] quadrato, vt latus AD, Horizonti æquidiſtet, i[...] ciatur punctum F, radiuſque AF, vel dioptra au[...] vmbram verſam DI. Per problema 3. vel 4. vel p[...] per ſcholium problem. 7. inueſtigetur diſtantia [...] etiamſi punctum H, non appareat: diligenterqu[...] quiratur, quot partes milleſimæ lateris AD, i[...] gmento dioptræ AI, comprehendantur, quod multis modis, vt in ſchol. probl. 7. Num. 2. docuimus, exeque[...] hoc modo. Primum quoniam duo latera AD, DI, in rectangulo triangulo ADI, data ſunt, [a] ignorari non p[...] rit baſis in partibus laterum. Deinde quia per probl. 1. ex vmbra DI, notus ſit angulus DAI, [b] cognoſcetur ru[...] baſis AI. Tertio [c] quia quadrata AD, DI, quadrato AI, æqualia ſunt; ſi ex aggregato eorum radix quadrata e[...] tur, exhibebit ea radix baſem AI, notam. His peractis, [d] ſi fiat,

a 6. triang. rectil.
b 5. triang. rectil.
c 47. prim.
d 4. ſexti.

Vt latus AD, 1000.	*ad portionem dioptræ AI, nuper inuentam:*	*ita diſtantia AH, nu per etiam inuenta*	*ad*

cognita erit diſtantia AF, quæſita in partibus inuentæ diſtantiæ AH.

DISTANTIA autem EF, à pede ad datum punctum F, ita reperiemus. Quoniam in triangulo AEF, [...] latera AF, AE, cognita ſunt, cum illud proxime ſit inuentum, & hoc ſtaturæ menſoris æquale ſit; compreh[...] duntque angulum notum EAF, vtpote conſtatum ex recto EAH, & DAI, qui per problema 1. inuentus e[...] vmbra verſa DI: [e] notum efficietur latus quoque EF, quod quæritur.

e 12. triang. rectil.

2 QVOD ſi vmbra recta ſecetur in L, vt in altero quadrato, vbi iterum menſoris ſtatura eſt AK: Inu[...] ta portione dioptræ AL, in partibus milleſimis lateris quadrati ex angulo BAL, &c. necnon diſtantia AH [...]

f 4. ſexti. problem. 3. vel 4. vel ex ſcholio probl. 7. [f] Si fiat,

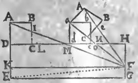
Vt BL, vmbra recta	*ad LA, portionem dioptræ inuentam:*	*Ita diſtantia AH, inuenta*	*ad AF,*

prodibit rurſus nota diſtantia AF, in partibus diſtantiæ inuentæ AH.

NON aliter procedes, ſi dioptra per C, tranſeat: [g] Cum tunc etiam ſit, vt AD, latus ad partem dioptræ AC, inuentam, vt prius, ita diſtantia inuenta AH, ad diſtantiam quæſitam AF. *g 4. ſexti.*

DISTANTIA autem KF, à pede K, vſque ad F, [h] inuenietur, vt prius, ex duobus lateribus notis AF, AK, & angulo ab ipſis comprehenſo F A K; qui nimirum conſtatur ex recto A, & D A L, complemento anguli BAL, quem per problema 1. cognitum efficit vmbra recta BL. *h 12. triang. rectil.*

3 SED ſit iam punctum F, oculo A, depreſſius, & ſtatura menſoris ſit AE. Concipiatur ex F, duci FK, Horizonti parallela, vel ad AE, perpendicularis. Item per F, recta GH, ipſi AE, parallela. Accommodato autem quadrato, vt latus AD, rectum ſit ad Horizontem, & DC, Horizonti æquidiſtans, cogitetur DC, latus productum vſque ad H, punctum perpendicularis GH. Primum itaque reperiatur altitudo AK, per problema 8. vel 9. duabus ſtationibus factis in recta DH, vel in haſta DA, protracta, vel certe per ſcholium problematis 9. Quamuis enim ſtatura menſoris AE, cognita ſit, ignoratur tamen, quanta ſit eius pars AK, quam parallela FK, per imaginationem ducta abſcindit: ita vt omnino neceſſarium ſit altitudinem AK, inquirere, quod per 8. problema facile exequemur, ſi in vtraque ſtatione vmbra verſa ſecetur in I, N, (quod plerunque hic continget) & vtraque abſciſſa BI, bN, ad rectas DM, dO, reuocetur. Nam ſi fiat,



Vt LM, differentia vmbrarum rectarum	*ad Dd, differentiam ſtationum:*	*Ita AD, latus*	*ad AK,*

inuenta erit altitudo AK, oculo poſito in eius ſummitate A, vt in dicto problem. 8. Numer. 2. diximus, &c. Quæ tamen altitudo AK, facilius per ſcholium problem. 9. reperiri poteſt.

ITAQVE quia vmbra BI, per 1 problema patefacit angulum BAI, hoc eſt, alternum AFK, ſibi æqualem, nec non & eius complementum FAK; erunt in triangulo rectangulo AKF, duo anguli acuti cogniti, vna cum latere AK, proxime inuento; [i] Itaque ſi fiat, *i 5. triang. rectil.*

Vt ſinus totus	*ad latus AK, inuentum:*	*Ita AF, ſecans anguli FAK,*	*ad AF,*

cognita fiet AF, in partibus lateris inuenti AK. Vel inuenta parte dioptræ AI, in partibus milleſimis lateris quadrati, vt ſupra dictum eſt prope initium huius problematis, [k] ſi fiat, *k 4. ſexti.*

Vt BI, vmbra verſa	*ad IA, partem dioptræ inuenta:*	*Ita KA, altitudo inuenta*	*ad AF,*

nota rurſus efficietur diſtantia AF, in partibus rectæ AK, inuentæ.

PORRO diſtantiam EF, à pede menſoris ad punctum F, [l] inueniemus, vt ſupra: propterea quod in triangulo AEF, duo latera AE, AF, nota ſunt, cum illud ſit ſtatura menſoris, hoc autem ſit proxime inuentum, angulumque continent notum FAK, vt paulo ante diximus. *l 12. triang. rectil.*

4 NON aliter vtraque diſtantia cognoſcetur, ſi punctum F, in Horizonte ſit poſitum, qui Horizon per FK, intelligatur tranſire, ita vt ſtatura menſoris, vel aliqua alia altitudo nota, ſit AK. Nam cognita portione dioptræ AI, vt ſupra traditum eſt; [m] ſi fiat, *m 4. ſexti.*

Vt BI, vmbra abſciſſa	*ad IA, portionem dioptræ inuentam:*	*Ita AK, altitudo, vel ſtatura menſoris*	*ad AF,*

nota euadet diſtantia AF, in partibus ſtaturæ menſoris, vel altitudinis notæ AK,

[n] Rurſus ſi fiat, *n 4. ſexti*

Vt BI, vmbra abſciſſa	*ad AB, latus quadrati 1000.*	*Ita AK, altitudo vel ſtatura menſoris*	*ad KF,*

cognita etiam fiet diſtantia KF, à pede menſoris vſque ad punctum F, in partibus eiuſdem ſtaturæ menſoris, vel altitudinis notæ AK. Vbi vides, vtramque diſtantiam cognoſci per vnicam ſtationem, quando punctum datum eſt in Horizonte.

5 SED vbicunque punctum F, exiſtat, ſiue in Horizonte, ſiue in ſublimi, vel infra oculum, inueniemus nihilominus vtramque diſtantiam per vnicam ſtationem, hoc modo. Quando punctum F, eſt in ſublimi, vt in prima figura, accommodetur quadratum ita, vt dioptræ centrum a, ſit ſuperius, & latus d c, verſus punctũ F, dirigatur. Inſpecto enim per dioptram puncto F, notetur vmbra verſa e b. [o] Et fiat, *o 4. ſexti*

Vt vmbra verſa e b,	*ad latus b a:*	*Ita latus a d,*	*ad AF,*

Nam numerus productus notam faciet diſtantiam AF, in partibus lateris quadrati. Non aliter diſtantiam KF, à pede menſoris elicies, ſi eodem pacto quadratum ad punctum K, applicabis, vt conſtat.

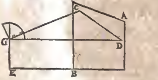
QVANDO autem punctum F, depreſſius eſt oculo, vt in ſecunda figura, erigendus eſt baculus a d, minor, quam ſtatura menſoris, & in a, applicandum quadratum, vt rurſus centrum dioptræ A, ſit ſuperius, & latus a c, ad punctum F, vergat. Nam viſo puncto F, ex A. per dioptram, notataque vmbra verſa c B, ſi fiat,

Vt vmbra verſa c B, ad latus B A, ita latus A a, ad a F,

exibit diſtantia a F, nota in partibus lateris Aa. Diſtantia porro EF, à pede menſoris conijcietur, ſi quadratum in E, applicetur, vt in prima figura dictum eſt. Quando denique punctum F, eſt in Horizonte, inuenietur vtraque diſtantia, vt Num. 4. tradidimus.

INTERVALLVM inter duo ſigna, vel puncta in quolibet plano ſiue recto ad Horizontem, ſiue inclinato, per quadratum metiri.

PROBLEMA XVI.



1 IN quolibet plano eleuato AB, inquirendum ſit interuallum CD, ex plano EB. Poſito oculo in G, vt ſtatura menſoris ſit G E, inueſtigetur per præcedens problema, vtraque diſtantia GC, GD, in partibus ſtaturæ menſoris G E. Deinde applicato quadrato ſtabili ad oculum G, ita vt eius planum per puncta C, D, tranſeat, atque vnum eius latus ad punctum D, recta vergat (quod fiet, ſi poſita linea fiduciæ dioptrę ſupra illud latus, punctum D, per foramina pinnacidiorum conſpiciatur) vertatur dioptra, donec per eam punctum quoque C, appareat, & vmbra abſciſſa notetur, per quam ex problemate 1. anguli CGD, magnitudo addiſcatur. Quod ſi alterum latus quadrati vltra rectam GC, exiſtat, erit angulus CGD, acutus: ſi vero citra rectam GC extiterit, dictus angulus erit obtuſus: quem cognoſcemus, ſi ad rectum adijciemus reliquum angulum, inter alterum illud latus, & rectam GC, quem quidem inueſtigabimus, vt de acuto CGD, diximus, ſi nimirum in recta CD mente notemus punctum, in quod alterum illud latus productum incideret. Nam ſi tunc latus illud rectæ GC, congruat, & dioptra ad punctum notatum vergat, indicabit vmbra inter latus illud, & lineam fiduciæ angulum prædictum reliquum, vt in problemate 1. dictum eſt. Si denique alterũ illud latus præciſe rectæ GC, congruat, angulus CGD, rectus erit. His peractis, quia in triangulo CGD, latera GC, GD, nota continent angulum G etiã cognitum; [a] cognoſcetur quoq; tertiũ latus CD quod quæritur.

a 12. Tria. rectil.

2 VERVM inuentis diſtantiis GC, GD, in aliqua menſura, vna cum angulo G, facilius, licet non tam certo, interuallum CD, cognoſcemus hoc pacto. Deſcripto angulo G, ſeorſum, ſumatur in GC, portio quotlibet partium lateris quadrati, verbi gratia 500. id eſt, ſemiſſis lateris. Et fiat, vt diſtantia inuenta GC, ad diſtantiam inuentam GD, ita partes acceptæ 500. ad aliud. Nam Quotiens dabit numerum quartum proportionalem earundem partium lateris quadrati; quibus ſi capiatur in GD, portio æqualis, [b] erit interuallum inter extrema puncta dictarum portionum, æquidiſtans interuallo CD; vt conſtat, ſi illæ portiones in rectas GC, GD, in figura transferrentur; propterea quod in illis extremis punctis rectæ GC GD, ſectæ eſſent proportionaliter. Quare ſi illud interuallum circino menſuretur in eiſdem partibus lateris quadrati, continebit interuallum CD, totidem particulas rectæ GC, in 500. partes æquales diuiſæ, quot in illo interuallo comprehenduntur ex particulis lateris quadrati: cum ſit vt portio particularum 500. ad interuallum illud, ita GC, diuiſa in partes æquales 500. ad CD. Quæ particulæ reducentur ad menſuram, in qua inuentæ ſunt GC, GD: ſi fiat, vt GC, quatenus 500. ad menſuras in GC, inuentas, ita CD, inuenta in particulis rectæ GC, in 500. partes diuiſæ, ad aliud.

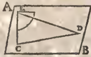
b 2 sexti

QVIA vero vix per circinum accurate reperiri poteſt interuallum illud inter extremitates proportionalium, magis exquiſite, licet laborioſius, interuallum propoſitum cognoſcetur per 12. triang. rectilineorum.

INTERVALLVM tranſuerſum in Horizonte, cuius vtrumque extremum videri poteſt, per quadratum metiri.

PROBLEMA XVII.

1 IN Plano Horizontis AB, iaceat interuallum CD, in tranſuerſum, pes antem menſoris in E, ita vt longitudo CD, in vtramque partem producta per E, non tranſeat. Nam quando recta CD, è directo menſoris iacet, inueſtigabitur ea per problema 11. Itaque vt tranſuerſum interuallum CD, cognoſcatur, inquirenda erit primum vtriuſque extremi puncti C, D, diſtantia à pede menſoris E, vt Num. 4. problematis 15. traditum eſt, per vnicam ſtationem. Deinde angulus CED, explorandus, quod fiet, ſi vnum latus quadrati rectæ EC, cõgruat, & dioptra rectæ ED. Nam vmbra abſciſſa inter latus illud, ac dioptram oſtendet quantitatem anguli CED, vt in problemate 1. dictum eſt: qui quidem acutus erit, ſi alterum latus vltra rectam ED, exiſtet: rectus vero ſi præciſe rectæ ED, congruet obtuſus denique, ſi citra rectam ED, cadet; quem cognoſcemus, ſi recto angulo adiiciemus reliquum acutum, qui deprehendetur, vt in præcedenti problemate docuimus. Quoniam ergo triangulum habemus CED, cuius duo latera EC, ED, cognita ſunt, vna cum angulo comprehenſo E: [a] cognitũ quoq; erit tertiũ latus CD, in partibus rectarũ EC, ED.



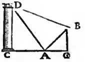
a 12. Tria. rectil.

EADEM recta CD, cognita erit, ſi in rectis EC, ED, ſeorſum deſcriptis cum angulo E, inuento ſumantur partes ipſis EC, ED, proportionales &c. vt Num. 2. præcedentis problematis factum eſt.

DISTANTIAM alicuius ſigni in Horizonte poſiti à ſummitate turris, vel muri alicuius, licet ad ipſum ſignum acceſſus nõ pateat, per quadratum eruere, vbicunq; menſor exiſtat.

PRO-

PROBLEMA XVIII.

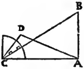


1 IN Horizontis plano punctum A, diſtet à ſummitate D, alicuius altitudinis per rectam AD, quam ſic venabimur. Vbicunque oculus menſoris exiſtat, nimirum in B, indagentur per problema 15 diſtantiæ punctorum A, D, ab oculo menſoris B. Deinde angulus exploretur ABD, vt in problemate 16. docuimus. Nam ſic habebimus triangulum ABD, cuius duo latera nota ſunt BA, BD, vna cum angulo B.[a] Igitur tertium quoque latus AD, cognitum erit.

QVOD etiam inuenietur, vt Num. 2. problem. 16. docuimus, ſi in rectis BA, BD, cum angulo B, ſeorſum ductis ſumentur partes ipſis BA, BD, proportionales, &c. a 12. Tria. rectil.

ALTITVDINEM inacceſſibilem, cuius baſis non videatur, & ad quam per nullum ſpatium ſecundum rectam lineam accedere poſſit menſor, aut recedere, vt duæ ſtationes fieri poſſint, ſed ſolum ad dextram, ſiniſtramue ad locum, è quo eius baſis cernatur, per quadratum explorare.

PROBLEMA XIX.

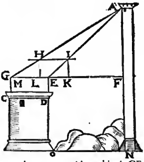


1 ALTITVDO metienda ſit AB, inacceſſibilis, ad quam ex C, loco menſoris non liceat accedere, aut ab ea recedere ſecundum lineam rectam, ſed ſolum in tranſuerſum vſque ad D, vnde baſem A, videre poſſimus. Per problema 17. inueſtigetur ex D, interuallũ tranſuerſum AC. Nam per 5. problema, quando iam diſtantia CA, manifeſta eſt, altitudo AB, reddetur nota, quam quærimus in partibus diſtantiæ inuentæ CA.

CÆTERVM ex ſcholio problematis 7. facilius per vnicam ſtationem in C, factam inueſtigabitur & altitudo AB, & diſtantia AC, vna cum hypotenuſa BC.

LONGITVDINEM maiorem ex minori cognita, etiamſi ſolum maioris altitudinis vertex cernatur, per quadratum efficere notam.

PROBLEMA XX.



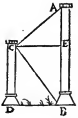
1 MAIOR altitudo AN, metienda proponatur ex minori aliqua turri CO, cognita, ex qua ſolum cacumen A, non autem baſis N, appareat. Fiant in ſummitate duæ ſtationes in C, & D, ſi planum ſummitatis id permittat, ſtaturaq; menſoris ſit CG, vel DE, & ad AN, intelligatur ducta perpendicularis GEF. Per 6. problema reperietur altitudo AF, ad quam ſi adiicietur altitudo minor DO, vna cum menſoris ſtatura CG, hoc eſt, recta FN, cognita fiet tota altitudo maior AN.

2 QVOD ſi in ſummitate tanta planities non ſit, vt duæ ſtationes fieri poſſint, erigenda eſt haſta aliqua ad Horizontem recta, niſi forte adſit ædificium quodpiam erectum, ibique faciendæ duæ ſtationes. Nam tunc per problema 7. inuenietur altitudo inter cacumen maioris altitudinis, & rectam, quę ab inferiori ſtatione Horizonti dicitur parallela. Cui ſi apponetur altitudo minor ab inferiore ſtatione vſque ad eius baſem, conflabitur tota altitudo maior. Vt in figuris problematis 4. ſi maior altitudo ſit GL, & minor AK, fiantq; duæ ſtationes in A, a, inferior vna, & altera ſuperior, reperietur per 7. problema altitudo GF, cui ſi addetur minor altitudo AK, ab inferiore ſtatione vſque ad baſem, componetur tota altitudo maior GL.

PORRO facilius ex ſcholio problem. 7. altitudinem AF, eruemus, ſi in G, bis quadratum accommodetur, vt in eo ſcholio diximus. Vt ſi in figura eius ſcholii maior altitudo foret IF, & minor cognita AH, inuenire tur GF, vt ibi oſtenſum eſt, &c.

ALTITVDINEM maiorem ex minori incognita, ſi tamen baſis maioris cerni poſſit, per quadratum venari.

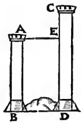
PROBLEMA XXI.



1 IN figura problematis 17. lib. 2. addiſcatur altitudo AE, vel per problema 6. vel 7. aut potius per ſcholium problema. 7. ſi C, ſit ſummitas minoris altitudinis CD. Deinde quia baſis B, maioris altitudinis ponitur poſſe videri ex C, inquiratur etiam altitudo minor CD, per problema 8. aut 9. vel potius per ſcholium problem. 9. ſi C, fuerit ſummitas minoris altitudinis CD. Hæc enim adiecta ad inuentam altitudinem AE, conficiet totam maiorem altitudinem AB, notam, quæ deſideratur.

ALTITVDINEM minorem ex maiori cognita, licet baſis minoris cerni non poſſit, per quadratum ſcrutari.

PROBLEMA XXII.



1 MINOR altitudo AB, ex maiore CD, cognita proponatur dimetienda. Intelligatur ducta recta AE, Horizonti BD, æquidiſtans, vt ED, fiat minori altitudini AB, æqualis. Si igitur ex ſummitate C, per problema 8. vel 9. aut potius per ſcholium probl. 9. exploretur altitudo CE, inſpecto nimirum cacumine A, ac ſi eſſet ſignum aliquod in Horizonte AE, ex C, viſum: atq; hæc altitudo inuenta CE, ex maiore altitudine CD, quæ cognita ponitur, detrahatur, reliqua fiet minor altitudo AB, quam inquirimus.

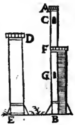
ALTITVDINEM minorem ex maiori incognita, dummodo baſis minoris appareat, per quadratum elicere.

PROBLEMA XXIII.

1 FIGVRA præcedentis problematis repetatur. Et quia baſis B, minoris altitudinis, tanquam ſignum quodpiam in Horizonte poſitum, videri poteſt, ex hypotenuſi, nota efficietur per problema 8. aut 9. vel potius per ſcholium problemat. 9. maior altitudo CD. Quare, vt in præcedenti problemate dictum eſt, minor altitudo AB, ex maiore CD, proxime inuenta cognoſcetur. Quod eſt propoſitum.

PORTIONEM altitudinis maioris ex minore altitudine, & minoris portionem ex maiore, per quadratum percipere.

PROBLEMA XXIV.

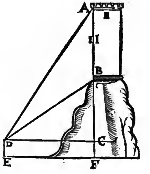


1 SIT portio AC, maioris altitudinis AB, exquirenda ex minore altitudine DE; Item portio GF, altitudinis minoris FB, ex maiore altitudine DE. Si altitudo DE, minor eſt reliqua portione CB, maioris altitudinis, inueſtiganda erit per problema 20. vel 21. vtraque altitudo maior AB, CB, ex minori DE, prout videlicet DE, cognita fuerit, aut incognita. Nam CB, ablata ex AB, notam relinquet propoſitam portionem AC. Si vero DE, maior eſt reliqua portione FB, ſi nimirum maioris altitudinis portio AF, metienda proponatur: inueſtiganda quidem erit maior altitudo AB, ex minore DE, per problema 20. vel 21. At vero minor altitudo FB, ex maiore DE, per problema 22. vel 23. exploranda erit, prout videlicet DE, nota fuerit, aut ignota. Nam rurſus FB, detracta ex AB, notam relinquet portionem propoſitam AF.

2 NON ſecus per problema 22. vel 23. indaganda erit vtraque altitudo minor FB, GB, ex maiore DE, ſi forte illarum differentia FG, inuenienda ſit.

ALTITVDINEM, cuius baſis impoſita ſit monti, vel alteri cuipiam altitudini, & vtraque illius extremitas cerni poſſit, etiamſi infimum punctum alterius, cui imponitur, lateat, & eiuſdem puncti infimi diſtantia à loco menſoris cognita non ſit, per quadratum ex valle, aut ex plano Horizontis explorare.

PROBLEMA XXV.



1 HVIVSCEMODI altitudo eſt turris ſupra montem poſita, & portio alicuius ædificii inter duas feneſtras, vel duo ſigna, quorum alterum altero ſuperius eſt. Sit igitur ſupra montem BF, altitudo turris AB, propoſita. Ex aliquo loco E, in planitie, aut valle, vnde vtrumq; turris extremum conſpiciatur, inueſtigetur per probl. 6. vel 7. tam altitudo AF, quã BF, prout ſcilicet duę ſtationes fiunt aut in plano, aut in aliqua haſta erecta. Vtraq; tamen altitudo AF, BF, facilius inuenietur per ſcholium proble. 7. ſi in E, bis quadratum accommodetur, vt in eo ſcholio factum eſt. Vtraque altitudine inuenta, altitudo montis BF, dempta ex tota altitudine AF, notam relinquet optatam altitudinem AB.

SCHO-

SCHOLIVM.

ITAQVE ſi AB, portio ſuperior totius alicuius altitudinis AF, deſideretur, indaganda erit per probl. 6. vel 7. aut potius per ſcholium probl. 7. tam tota altitudo AF, quam eius portio BF. Earum enim differentia notam dabit ſuperiorem portionem AB, deſideratam.

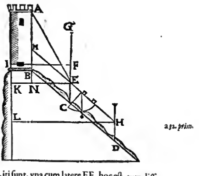
Suprema, media atque infima pars altitudinis, quo pacto metienda ſit.

SI autem media aliqua portio IB, cognoſcenda ſit, coniicienda rurſum erit per problem. 6. vel 7. aut potius per ſcholium probl. 7. vtraque altitudo IF, BF; vt earum differentia IB, nota reddatur.

SI denique infima pars BF, proponatur inquirenda, exploranda ea erit per problema quoque 6. vel 7. aut potius pet ſcholium probl. 7.

DISTANTIAM accliuem montis à loco menſoris vſque ad baſem altitudinis monti impoſitæ, etiam non viſam, vna cum ipſa altitudine, quando menſor in aſcenſu montis conſiſtit, prope verum, beneficio quadrati efficere cognitam.

PROBLEMA XXVI.



1 SIT turris AB, monti impoſita, in cuius aſcenſu, ſeu latere menſor conſiſtat in C, ex quo loco baſem turris videre non poſſit. Erigatur haſta aliqua CG, ad Horizontem, non autem ad latus montis, perpendicularis, ſitque menſoris ſtatura CE. Cogitetur ducta EK, ad altitudinem perpendicularis, aut Horizonti æquidiſtans. Applicato autem quadrato ſtabili ad haſtam in puncto E, (ſi pendulum adhibeatur, conſtituendus etiam erit oculus in E,) dirigatur dioptra verſus cacumen A; & per vmbram abſciſſam inueniatur angulus AEK, vt in problemate 1. tradidimus. Deinde fiat alia ſtatio ſuperior in F, in haſta, ductaque per cogitationem recta FI, ad altitudinem perpendiculari, dirigatur rurſus dioptra verſus A, atq; eodem modo angulus eruatur AFI,[a] Et quia angulus AFG, duobus angulis FEA, FAE, æqualis eſt, ſi auferatur AEF, complementum prioris anguli AEK, in ſtatione inferiori E, inuenti. ex AFG, complemento poſterioris anguli in ſuperiori ſtatione F, deprehenſi, reliquus fiet angulus EAF, cognitus. Quonim igitur in triangulo AEF, duo anguli A, E, cogniti ſunt, vna cum latere EF, hoc eſt, cum differentia ſtationum,[b] nota fient reliqua latera AE, AF.

a 32. prim.

b 10. Tria. rectil.

2 POST hæc erigatur alius baculus DH, ad Horizontem rectus, ſumptaque menſoris ſtatura ipſi CE, æquali, & ducta recta HL, ad altitudinem perpendiculari, applicetur ad H, quadratum, ac dioptra in punctum E, dirigatur, rurſumque per problema 1. ex vmbra abſciſſa angulus eliciatur EHL, ac radius viſualis HE, altitudini occurrere concipiatur in M,[c] qui ipſi BCD, lateri montis parallelus erit. Concipienda etenim ſunt tria puncta B, C, D, in vna recta linea iacere, ac ſi DC, producta ad baſem turris pertineret.[d] Quia vero angulus EHL, angulo MEK, internus externo æqualis eſt, ſi EHL, cognitus, hoc eſt, MEK, ex angulo AEN, in priori ſtatione E, obſeruato, detrahatur, notus relinquetur angulus AEM: Eſt autem & angulus EAM, cum complementum ſit anguli AEN, in priori ſtatione E, obſeruati, cognitus. Igitur & AME, reliquus duorum rectorum cognitus erit: qui quidem etiam relinquitur, ſi NMH, complementum anguli MHL, in ſtatione poſtrema H, inuenti ex duobus rectis detrahatur. Quapropter cum in triãgulo AEM, omnes anguli noti ſint, vna cum latere AE, quod paulo ante inueniemus,[e] cognoſcentur quoque reliqua duo latera ME, AM, ac propterea diſtantia EM, vel CB, inuenta erit. Et ſi rectæ AM, inuentæ addatur menſoris ſtatura MB, tota turris altitudo AB, cognita erit.

c 33. primi.

d 29. pri.

e 10. Tria. rectil.

CVRANDVM autem eſt magnopere, vt tria puncta B, C, D, in vna linea recta iaceant, id quod in problemate 22. lib. 2. faciendum eſſe monuimus.

3 QVOD ſi baſis altitudinis ex latere montis videri poſſit, nullo ferme labore problema per vnicam ſtationem efficiemus. Nam ſi in D, ſtatuatur quadratum, ita vt centrum dioptræ ſit ſuperius, & latus infimum recta in B, feratur, dirigenda erit dioptra verſus idem punctum B.[f] Nam ſi fiat

f 4. ſexti.

Vt vmbra verſa abſciſſa ad latus quadrati: Ita latus quadrati ad aliud.

inuenietur diſtantia DB, in partibus lateris quadrati, vt liquido conſtat ex iis, quæ in probl. 15. Numer. 5. ſcripſimus, patetque in 1. figura eiuſdem problematis; ſi in ea cogitetur aſcenſus montis AF, in ſecundo quadrato, & F, baſis altitudinis monti impoſitæ.

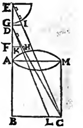
DEINDE ſi idem quadratum in D, ita ſtatuatur, vt rurſus centrũ dioptræ ſit in ſublimi, & latus infimum ad faſtigium altitudinis A, recta tendat, idemque punctum A, per dioptram inſpiciatur, reperietur eodem pacto diſtannia à D, vſque ad A; ſi fiat,

vt vmbra verſa abſciſſa ad latus quadrati: Ita latus quadrati ad aliud,

POSTREMO, accommodato quadrato, ita vt vnum latus rectæ DB, congruat, & dioptra in A, dirigatur, inuenietur angulus, quem rectæ DB, DA, efficiunt, vt in problem. 16. Num. 1. docuimus. Si ergo hic angulus ſeorſum deſcribatur, & in rectis DB, DA, capiantur duæ portiones proportionales, vt in eodem problem. 16. Numer. 2. tradidimus, reperietur altitudo AB, per interuallum inter duas illas portiones, vt ibi interuallum CD, indagauimus.

PROFVNDITATEM putei, vel ædificii cuiuſuis ad perpendiculum erecti, ſi modo angulus fundi, vel ſignum aliquod in fundo poſitum conſpiciatur, per quadratum efficere cognitam.

PROBLEMA XXVII.



1 HOC nihil eſt aliud, niſi turrim ex eius vertice, quando in Horizonte ſignum aliquod apparet, per duas ſtationes in haſta aliqua factas metiri, vt in problem. 9. factum eſt. Quare eius problematis praxim hic breuiter repetemus. Sit puteus, ſeu ædificium erectum ABCM, cuius angulus C, in fundo, vel ſignum quodpiam C, in fundo poſitum conſpici poſſit. Erecta haſta AE, in orificio putei, vel ſummitate ædificii, fiant duæ ſtationes oculi menſoris in D, E, & applicato latere quadrati ad haſtam bis, vt modo centrum dioptræ in D, & modo in E, ſtatuatur, dirigatur dioptra verſus C. Si igitur in vtraque ſtatione dioptra vmbram rectam interſecet, quod plerunque in puteorum dimenſione fieri ſolet: Fiat autem,

Vt differentia vmbrarum rectarum	*ad DE, differentiam ſtationum:*	*Ita vmbra recta maior*	*ad EB,*

exibit recta EB, nota in partibus differentiæ ſtationum DE. Si ergo auferatur recta EA, compoſita ex differentia ſtationum DE, & portione haſtæ DA, quæ plerunq; ſtaturæ menſoris eſſe ſolet æqualis, vel certe facile menſurari poteſt, nota relinquetur altitudo AB, quæſita.

2 SI vero in vtraque ſtatione vmbra verſa interſecetur, & fiat,

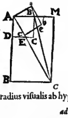
Vt differentia vmbrarum verſarum	*ad DE, differentiam ſtationum:*	*Ita vmbra verſa maior*	*ad EB,*

fiet rurſus nota recta EB, &c.

3 SI denique in vna ſtatione latus vmbræ rectæ ſecetur, & in altera latus vmbræ verſæ, reducenda erit vel vmbra recta ad verſam, vel verſa ad rectam. Nam ſi rurſus fiat

Vt differentia vmbrarum ſiue verſarum, ſiue rectarum,	*ad DE, differentiam ſtationum:*	*Ita vmbra verſa vel recta maior*	*ad EB,*

iterum producetur recta EB, in partibus differentiæ ſtationum DE, &c.



PER vnicam quoque ſtationem aſſequemur altitudiem putei, quemadmodum in ſcholio probl. 9. ex montis vertice eius altitudinem menſi ſumus: ſi videlicet in A, quadratum ita ſtatuatur, vt centrum a, dioptræ ſuperius ſit, & latus infimum AC, ex A, ad punctum C, vergat, ad inueniendam diſtantiam, vel hypotenuſam AC, &c. vt in eo ſcholio factum eſt, atq; hæc figura appoſita declarat. Secundo enim quadratum ita locandum eſt, vt A, centrum dioptræ ſit in A, & latus AD, lateri putei AB, adhæreat; adeo vt per dioptram puncto C, inſpecto, radius viſualis ab hypotenuſa AC, non differat. Itaque ſi fiat.

Vt e b, vmbra verſa	*ad latus b a,*	*ita latus a A,*	*ad aliud,*

inuenietur hypotenuſa AC. Inuenta deinde portione dioptræ AE, in ſecundo quadrato, vt in ſcholio proble. 7. docuimus:[a] Si rurſus fiat,

a 2. ſexti & componendo.

Vt portio dioptræ AE, inuenta	*ad hypotenuſam inuentam AC:*	*ita latus AD,*	*ad aliud*

prodibit altitudo, ſiue profunditas AB.

4 QVOD ſi latitudo orificij AM, vel fundi BC, cognita fuerit, quæ facile per aliquam menſuram cognoſci poterit, facilius per vnam duntaxat ſtationem in D, factam, & per vnicam applicationem quadrati, profunditatem AB, coniiciemus. Nam ſi fiat,

Vt vmbra recta, ſi ea abſciſſa fuerit,	*ad latus quadrati:*	*Ita latitudo cognita BC,*	*ad AB,*

Vel

Vt latus quadrati	*ad vmbram verſam, ſi ea fuerit abſciſſa:*	*Ita latitudo cognita BC,*	*ad AB,*

producetur AB, profunditas nota in partibus latitudinis.

Et ſi

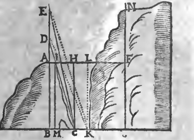
ET ſi forte dioptra per punctum C, in quadrato tranſeat, erit latitudo BC, rectæ AB æqualis.

HÆ porro praxes demonſtratæ ſunt omnes in prædicto probl. 9. hac vltima Numer. 4. excepta, quam in problem. 8. Num. 4. demonſtrauimus.

PROFVNDITATEM vallis, eiuſdemque deſcenſum obliquum, ſi non ſit valde inæqualis, & eius terminus, vel aliquod in ea ſignum conſpici poſſit, per quadratum cognoſcere.

PROBLEMA XXVIII.

1 HOC etiam aliud nihil eſt, niſi altitudinem quampiam ex eius ſummo faſtigio per duas ſtationes in haſta aliqua erecta dimetiri, vt in problem. 9. factum eſt, & in præcedenti probl.mate repetitum. Sit enim vallis inter duos montes AB, NG, poſita, & terminus ipſius C, ex monte AB, conſpici poſſit. Erecta haſta AE, in qua duæ ſtationes oculi menſoris fieri poſſint in D, E, ſi reliqua conſtruantur, vt in problemate 24. lib. 2. cuius hic figuram iterauimus; inueſtigabitur recta EB, vt in 1. figura præcedentis probl. recta EB fuit inuenta. Et ſi dematur portio haſtæ AE, altitudo montis AB, vel profunditas vallis HC, reliqua fiet nota.



2 DESCENSVS autem obliquus IC, ita colligetur. Per vmbram à dioptra ad C, directa abſciſſam eliciatur angulus BDC, ex 1. problemate, hoc eſt, angulus CIM,[a] qui ei æqualis eſt, externus interno; eritque proinde reliquus angulus ICM, notus, vt pote illius complementum. Quocirca cum in triangulo CIM, anguli acuti cogniti ſint, vna cum latere IM, nuper inuento;[b] baſis IC, ignorari non poterit. a 29. prim. b 5. Triang. rectil.

SED hæc omnia facilius per vnicam ſtationem inueſtigabuntur, ſi in D, puncto haſtæ quadratum bis applicetur, vt in præcedenti problemate Num. 2. & in ſcholio problem. 9. factum eſt in puncto A, &c.

3 QVOD ſi terminus C, non cernatur, eligatur aliquod ſignum K, in valle, quod ex ſtationibus D, & E, appareat. Ita enim per problema 9. vel potius per eius ſcholium, eadem altitudo IM, vel HC, inuenietur.

IMMO ſi in plano vallis duæ ſtationes commode fieri poſſint, percipietur ex illis eadem altitudo IM, per problem. 6. vel per ſcholium probl. 7. Deſcenſus vero obliquus IC, tanquam interuallum inter duo ſigna I, & C, per problema 16. indagandus erit.

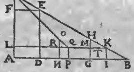
4 EANDEM denique profunditatem CH, venari licebit ex altiore monte NG, ſi modo terminus C, minoris montis, vel aliquod ſignum in valle appareat ex cacumine N, non aliter, quàm in problemate 22. vel 23. minorem altitudinem ex maiore deprehendimus. Nam hic minor altitudo inquirenda eſt CH, & maior NG, ex cuius vertice N, terminum C, videri poſſe ſtatuimus.

DISTANTIAM inter pedes menſoris, & ſignum aliquod in plano Horizontis beneficio baculi metiri, quando extremus terminus diſtantiæ videri poteſt.

PROBLEMA XXIX.

1 ABSOLVTIS dimenſionibus, quæ per quadrantem, & quadratum fieri ſolent, libet nonnullas alias rationes dimetiendi adiungere, vt illis, quando neque quadrans, neque quadratum adeſt, vti poſſimus. Ex pluribus autem modis illas ſolum ſeligemus, quæ faciliorem vſum habent.

SIT ergo diſtantia metienda DB. In D, erigatur baculus DE, minor altitudine AC, ab oculo menſoris ad pedes, rectus ad Horizontem, quod fiet, ſi filum cum perpendiculo baculo adhærebit, vel lapillus ex E, demiſſus in punctum D, cadet. Deinde retrocedat menſor vſq; ad A, donec radius viſualis ex C, prodiens, & per extremum E, baculi tranſiens occurrat puncto B; intelligaturque duci recta EF, ipſi AB, parallela. Quoniam igitur triangula CFE, EDB, æquiangula ſunt; quod anguli F, D, ſint recti,[a] & ECF, BED, æquales, internus & externus, &c.[b] Si igitur fiat. a 29. prim. b 4. ſexti.



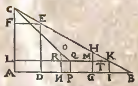
Vt CF, differentia inter baculum DE, & menſoris ſtaturam AC,	*ad FE, ſpatium inter menſorem & baculum:*	*Ita ED, longitudo baculi noti*	*ad DE,*

nota prodibit diſtantia quæſita DB, in partibus baculi DE, vel ſtaturæ menſoris AC. Debent enim baculus, & ſtatura menſoris per vnam eandemque menſuram eſſe cognita.

ALTITVDINEM turris, aut alterius rei per baculum indagare.

PRO-

PROBLEMA XXX.



1 SIT in figura præcedentis problematis metienda altitudo AC. Figatur in terra baculus GH, rectus ad Horizontem, & aliquantulum maior ſtatura menſoris ab oculo ad pedes quæ ſit IK. Deinde retrocedat menſor vſque ad I, ita vt eius oculus in K conſtitutus faſtigium C, inſpiciat: intelligaturque ducta recta KL, Horizonti AB, parallela, ſecans baculum in M. a coroll. 4. ſexti. [a] Quoniã igitur triangula KMH, KLC, ſimilia ſunt, propter parallelas MH, LC: ſi fiat,

Vt KM, ſpatium inter menſorem, & baculum	*ad MH, differentiam inter baculum & ſtaturam menſoris:*	*Ita diſtantia KL, quæ nota fiat per aliquam menſuram,*	*ad LC,*

producetur recta LC, cui ſi adiicietur ſtatura menſoris AL, tota altitudo propoſita AC, cognita erit in partibus ſtaturæ menſoris, vel diſtantiæ KL.

2 QVOD ſi acceſſus non pateat ad altitudinem AC, vt diſtantiam IA, metiri poſſimus, figatur idem baculus, vel alius illi æqualis NO, accedendo videlicet propius ad altitudinem. Deinde menſor retrocedat ad P, vt eius oculus in Q, exiſtens per ſummitatem baculi O, iterum faſtigium C, videat: ſecceturque baculus NO, à
b 4. ſexti. recta KL, in R.[b] Et quia eſt, vt KM, ad MH, ita KL, ad LC: Item vt QR, ad RO, ita QL, ad LC:[c] Eſt autem ma-
c 8. quinti. ior proportio KL, ad LC, quam QL, ad eandem LC; erit quoque maior proportio KM, ad MH, quam QR, ad RO, ipſi MH, æqualem. (Cum enim & totæ GH, NO. & ablatæ GM, NR, æquales ſint, erunt quoque reliquæ
d 10. quint. MH, RO, æquales)[d] Igitur KM, maior erit, quam QR. Abſciſſa ergo KT, æquali ipſi QR,[e] quoniam eſt, vt KM,
e 4. ſexti. ad MH, ita KL, ad LC, erit permutando, vt KM, tota ad totam KL, ita MH, ad LC. Eadem ratione erit QR, hoc eſt, KT, ablata ex KM. ad QL, ablatam ex KL, vt RO, ad LC, hoc eſt, vt MH, ad LC. Igitur & reliqua TM, ad reliquam KQ. erit vt tota KM, ad totam KL : Vt autem KM, ad KL, ita paulo ante oſtendimus eſſe MH, ad LC. Quapropter ſi fiat.

Vt TM, differentia inter ſpatia KM, & QR, vel KT, à menſore vſque ad baculos,	*ad KQ. differentiam ſtationum:*	*Ita MH, differentia inter baculum, & menſoris ſtaturam,*	*ad LC,*

efficietur nota LC, cui ſi addetur ſtatura menſoris AL, nota quoque euadet propoſita altitudo AC.

3 IAM ſi prima ſtatio fiat in Q, & ſecunda in K, recedendo magis ab altitudine, non variabitur praxis & demonſtratio, vt liquet.

DISTANTIAM in plano Horizontis inter menſorem, & ſignum quoduis beneficio normæ adinuenire.

PROBLEMA XXXI.



1 PROPOSITA ſit diſtantia AB. In A, loco menſoris figatur ad angulos rectos baculus AC. paulo minor ſtatura menſoris, & per menſuram, per quam menſoris ſtatura cognita eſt, notus. Angulus deinde rectus normæ C, ſummitati baculi applicetur, & eius latus CE, circa C, paulatim attollatur, deprimaturue, donec radius viſualis per latus interius normæ CE, incedens feratur in punctum extremum B, diligenterque notetur punctum F, in quod radius viſualis per alterum latus interius CD, tranſiens incidit.[a] Et quoniam AC, media eſt proportiona-
a coroll. 8. ſexti. lis inter AF, quæ in partibus baculi nota efficiatur, & diſtantiam AB: ſi fiat,

Vt AF, inter baculum, & punctum F, cognita	*ad baculum AC:*	*Ita baculus AC,*	*ad AB,*

Hoc eſt, ſi quadratus numerus baculi per AF, diuidatur, prodibit in Quotiente diſtantia AB, nota in partibus baculi.

2 NON abs re foret, ſi duo clauiculi in vtroque latere normæ interiori affigerentur, vt radius viſualis per illos incedens rectius in B, & F, feratur.

ALTITVDINEM turris, aut alterius rei per normam inueſtigare.

PROBLEMA XXXII.

1 IN figura præcedẽtis problematis ſit metiẽda altitudo GH. Figatur rurſus in A, loco menſoris baculus AC, cuius ſummitati C, angulus rectus normæ applicetur, eiuſque latus CE, paulatim eleuetur, deprimaturue,

donec

donec per latus interius CE, vertex altitudinis H, conſpiciatur, punctumq; F, in quo alterum latus CD, incurrit, notetur. Et quoniam ducta recta CI, Horizonti parallela, triangula ACF, HCI, æquiangula ſunt; quod anguli A, I, recti ſint, & ACF, HCI, reliqui ex rectis ACI, HCD, (ſi nimirum communis auferatur DCI,) æquales: [a] ſi fiat,

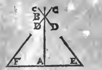
Vt baculum AC,	*ad AF, inter baculum, & punctum F, cognitam:*	*Ita diſtantia CI, vel AG, quæ nota fiat per aliquam menſuram*	*ad IH,*

a 4. ſexti.

procreabitur IH, nota, ad quam ſi adiicietur longitudo baculi AC, vel GI, propoſita altitudo GH, cognita erit.

DISTANTIAM in plano Horizontis, quæ non ſit valde magna, alio modo facillimo dimetiri.

PROBLEMA XXXIII.

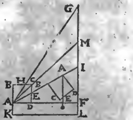


1 QVANDO planum aliquod exiguam habet longitudinem, ſed tamen menſurari non poteſt, ob aliquod impedimentum, cuiuſmodi ſunt latitudines fluminum, & ſtagnorum, quorum latitudines, quas nunc pro longitudinibus accipimus, menſurari nequeunt, ob interiectam aquam, vtemur inter alia hoc etiam artificio. Prope ripam fluminis, aut ſtagni, vel alterius cuiuſcunque rei metiendæ, figatur baculus AB, ad Horizontem rectus, cui in puncto B, accommodetur virgula CD, ita vt circa B, deprimi aut eleuari poſſit, donec radius viſualis per CD, tranſiens occurrat extremo E, diſtantiæ AE, metiendæ. Deinde virgula CD, manente immobili, ac angulus DBA, mutetur, vertatur baculus AC, ad rectos ſemper angulos Horizonti inſiſtens, donec radius viſualis per eandem virgulam CD, incedens occurrat plano alicui prope flumen, aut ſtagnum, in quo nimirum menſor exiſtit, & quod menſurari poſſit, in puncto F. Quoniam ergo duo anguli A, B, trianguli ABE, duobus angulis A, B, trianguli ABF, æquales ſunt, & latus AB, commune: [a] erunt latera AE, AF, æqualia: atque idcirco, ſi FA, in plano per aliquam menſuram efficiatur nota; diſtantia quoque AE, cognita erit. a 26. primi.

2 ALII hoc ipſum efficiunt ſine baculo, hac ratione. Erigunt ſe ad angulos rectos cum Horizonte: Deinde deprimunt pileum, qui ſit aliquantulum latus, donec radius viſualis per extremitatem pilei excurrens incidat in terminum E, diſtantiæ AE, metiendæ: Pileo vero immobili manente, vertunt ſe verſus planum aliquod menſurabile, notantque in eo punctum F, in quo radius viſualis ipſi plano occurrit. Nam rurſus longitudo AF, quæ per menſuram aliquam cognoſcenda eſt, diſtantiæ AE, propoſitæ æqualis eſt: propterea quod ſtatura menſoris fungitur tunc munere baculi AB, & pileus depreſſus vices gerit virgulæ CD, vt conſtat.

ALTITVDINEM cuiuſque rei erectæ ex eius vmbra, quam Sole lucente proiicit, ſi nota fuerit, per quadratum deprehendere.

PROBLEMA XXXIV.



1 HOC problema à quinto non differt, niſi quod hic vtimur radio Solis pro radio viſuali, & longitudine vmbræ, quam altitudo, Sole lucente, proiicit, pro diſtantia à menſore ad altitudinem vſque. Sit ergo altitudo FG, vel FI, vel FM, eiuſque vmbra proiecta FA. Dirigatur quadratum verſus Solem (licet hoc non fiat è directo altitudinis) & tranſeunte radio Solis per foramina pinnacidiorũ, notetur quanta vmbra ſiue recta, ſiue verſa à dioptra, vel filo perpendiculi in quadrato abſcindatur. Nam ita ſeſe habebit vmbra recta HB, in quadrato ad latus AB, vt vmbra proiecta AF, ad altitudinem FG. Item ea eſt proportio lateris AD, ad vmbram verſam DE, in quadrato, quæ vmbræ proiectæ AF, ad altitudinem FI. Denique dioptra, vel filo perpendiculi per punctum C, incedente, tanta erit vmbra proiecta AF, quanta eſt altitudo FM, quæ omnia in problemate 5. demonſtrata ſunt. Igitur ſi fiat

Vt vmbra recta, HB, in quadrato abſciſſa	*ad latus AB,*	*Ita longitudo vmbra proiecta AF,*	*ad FG,*

Vel

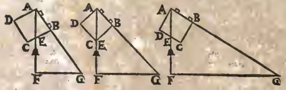
Vt latus AD,	*ad vmbram verſam, DE, abſciſſam in quadrato:*	*Ita longitudo vmbra proiecta AF,*	*ad FI,*

altitudo propoſita FG, vel FI, proueniet nota, &c.

LONGITVDINEM vmbræ ab altitudine, Sole lucente, quando altitudo eſt cognita, ope quadrati apertam, & manifeſtam facere.

PROBLEMA XXXV.

1 HOC etiam problema à ſecundo diuerſum non eſt: ſolum hic pro diſtantia accipimus longitudinem vmbræ, quam altitudo nota, Sole lucente, proijcit. Sit ergo altitudo AF, eiuſque vmbra proiecta FG. Dirigatur



quadratum verſus Solem, vbicunque menſor extra vmbram cõſtiterit, & tranſeunte radio Solari per pinnacidiorum foramina obſeruetur vmbra ſiue recta, ſiue verſa, quam filum perpendiculi, vel dioptra abſcindet. Ita namque ſe habebit latus quadrati BA. ad vmbram eius rectam BE, abſciſſam, vt altitudo AF, ad vmbram proiectam FG. Item ſic erit vmbra verſa DE, in quadrato ad latus AD, vt altitudo AF, ad vmbram proiectam FG. Dioptra denique, vel filo perpendiculi per punctum C, tranſeunte, altitudo AF, longitudini vmbræ proiectæ FG, æqualis eſt, quæ omnia in problemate 2. demonſtrauimus. Quamobrem ſi fiat,

Vt latus AB, — ad vmbram rectam abſciſſam BE, — Ita altitudo nota AF, — ad FG,

Vel

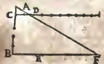
Vt vmbra verſa DE, abſciſſa in quadrato — ad latus AD; — Ita altitudo nota AF, — ad FG,

exibit nota longitudo vmbræ proiectæ FG, &c.

DISTANTIAM in Horizonte inter menſorem, & ſignum aliquod viſum, beneficio ſimpliciſſimi cuiuſdam inſtrumenti comperire.

PROBLEMA XXXVI.

1 CONSTRVATVR inſtrumentum hoc modo. Accipiatur baculus rectus AB, paulo minor, quam menſoris ſtatura, diuidaturque in 5. partes, vel etiam plures, paucioresue æquales, & in prima eius parte C, vel in alia quacunque, infigatur alius baculus CD, ad rectos angulos, in quo ſumantur ordine quotcunq; palmi, aut pedes. In extremitate quoq; baculi AB, infigatur alius baculus BE, ad angulos rectos: cõſtructumq; erit inſtrumentũ, quo varias magnitudines licebit metiri, vt patebit: Sit enim primum metienda



diſtantia BF, cuius terminum F, menſor in altero termino B, exiſtens videre poſſit ex A, etiamſi in medio ſint valles, & alia impedimenta. Conſtituatur inſtrumentum in tali ſitu, vt AB, ſit ad Horizontem perpendicularis, & BE, eidem æquidiſtans. Inſpecto extremo F, ex A, notetur ſumma cura ac diligentia punctum D, in baculo CD, per quod radius viſualis tranſit.[a] Nam cum triangula ACD, ABF, ſint ſimilia[b] ſi fiat,

a coroll. 4. ſexti.
b 4. ſexti.

Vt AC, — ad AB, — Ita CD, — ad BF,

inuenta erit diſtantia BF, in partibus CD. Itaque ſi AC, eſt quinta pars, verbi gratia, baculi AB, erit quoque CD, quinta pars diſtantiæ BF. Et quia in noſtro exemplo CD, continet 2. pedes, ſi eos multiplicemus per 5. producentur 10. pedes pro diſtantia BF.

2 CVRANDVM autem erit diligenter, vt quando radius viſualis non tranſit per aliquem pedem integrum baculi CD, inueſtigetur, quot decimæ, vel centeſimæ vnius pedis in particula abſciſſa contineantur, per ea, quæ lib. 1. cap. 2. Num. 14. ſcripſimus, quod fiet, ſi in regula CD, decem pedes comprebendantur. Idemque de quacunque alia menſura intelligendum eſt, ſi ea in CD, loco pedum ſignetur.

3 VERVM hoc eadem facilitate præſtitimus ope quadrati, tum penduli, tum ſtabilis.

DISTANTIAM inter duo montium aut turrium cacumina, ope prædicti inſtrumenti coniicere.

PROBLEMA XXXVII



1 SINT duo cacumina montium F, G. Poſito puncto B, prædicti inſtrumenti in cacumine F, minoris montis, deprimatur baculus AB, donec baculus BE, recta in cacumen G, tendat, quod per duos clauiculos in B, E, infixos, facile fiet, vt Numer. 2. problem. 31. diximus. Manente in hoc ſitu inſtrumento, inſpiciatur cacumen G, ex A, obſeruetúrque punctum D, interſectionis radii AG, cum baculo CD.[a] Nam cum æquiangula ſint triangula ACD, ABG, ſi fiat,

a coroll. 4. ſexti.

Vt AC,

Vt AC, nota in partibus AB,	*ad AB, notarum partium:*	*Ita CD, nota in data menſura*	*ad BG,*

cognoſcetur diſtantia BG, in partibus CD. Vt ſi AC, eſt quinta pars ipſius AB, & CD, contineat 1. pedem, & inſuper $\frac{2}{3}$. ſi $1\frac{2}{3}$. quinquies ſumatur, efficietur diſtantia BG, pedum $8\frac{1}{3}$.

2 NON aliter diſtantia bF, ex maioris montis cacumine G, inueſtigabitur, vt figura indicat.

EODEM modo procedet, ſi puncta F, G, ſint faſtigia duarum turrium, aut ſi vnum ſit faſtigium turris & alterum cacumen montis, vt conſtat.

3 IDEM hoc per quadratum fiet hoc modo. Sit quadratum a b f g, ſtatuaturque angulus b, in cacumine G, & latus b f, deprimatur, ita vt recta in cacumen F, tendat, ſi productum intelligatur, obſeruetur q; vmbra verſa abſciſſa g h, à radio viſuali aB. Nam quia triangula a g h, Bb a, æquiangula ſunt,[a] ſi fiat a 4. ſexti.

Vt g h, vmbra verſa	*ad g a, latus quadrati:*	*Ita latus quadrati ab,*	*ad B b,*

hoc eſt, ſi quadratus numerus lateris, nimirum 100000. diuidatur per vmbram verſam, gignetur in Quotiente diſtantia Bb.

IDEMQVE fieret, ſi angulus Quadrati in B, collocetur, infimumque latus recta à B, in cacumen G, tenderet, &c.

LONGITVDINEM aſcenſus alicuius montis, ſi eius cacumen ab oculo in radice conſtituto, videatur, eiuſdem inſtrumenti beneficio cognoſcere.

PROBLEMA XXXVIII.



1 ACCOMMODETVR prędictum inſtrumentum, vt punctum B, in radice montis ſtatuatur, & baculus BE, beneficio duorum clauiculorum infixorum, vt Num. 2. problematis 31. dictum eſt, recta in cacumen F, vergat; noteturq; interſectio D, radij viſualis cum baculo CD, inſpecto cacumine F, ex A.[a] Nam iterum triangula ACD, ABF, ſimilia erunt.[b] Quare ſi fiat, a coroll. 4. ſexti. b 4. ſexti.

Vt AC, nota in partibus AB,	*ad AB, notarum partium:*	*Ita CD, nota in data menſura*	*ad BF.*

cognoſcetur aſcenſus obliquus montis B, F, in partibus CD.

2 PARI ratione, ſi F, ſit faſtigium alicuius turris, inueſtigabis diſtantiam à puncto B, in terra vel alibi poſito, vſque ad F, hoc eſt hypotenuſam BF, vt perſpicuum eſt. Atque hoc eodem inſtrumento complures aliæ dimenſiones abſolui poterunt, quod prudens lector facile perſpiciet.

3 IDEM aſſequemur quadrato ABGH, ſi eius angulus B, in radice ſtatuatur, & latus BG, eleuetur, ita vt recta tendat in cacumem F. Obſeruata enim vmbra verſa HI, quam dioptra in cacumen F, directa abſcindit, fiunt triangula AHI, FBA, æquiangula.[c] Quamobrem, ſi fiat, c 4. ſexti.

Vt HI, vmbra verſa	*ad AH, latus quadrati:*	*Ita latus quadrati AB,*	*ad BF,*

id eſt, ſi quadratus numerus 1000000. lateris diuidatur per vmdram verſam, dabit quotiens numerus longitudinem aſcenſus obliqui BF.

ALTITVDINEM, ad cuius baſem pateat acceſſus, beneficio ſpeculi plani, vna cum diſtantia ſpeculi à cacumine altitudinis deprehendere.

PROBLEMA XXXIX.



1 SIT altitudo AB, à cuius baſe B, recedatur per quotuis paſſus, aut pedes, vſque ad C, punctum, in quo ſpeculi plani centrum collocetur, & ſecundum rectam BC, retrocedatur, donec menſoris oculus in E, conſtitutus cacumen A, intueri poſſit per radium reflexum ECA, ita vt DE, ſit ſtatura menſoris ab oculo vſq; ad planum. Et quoniam angulus incidentiæ DCE, æqualis eſt angulo reflexionis ACB, vt Perſpectiui docent, & anguli D, B, recti ſunt; erunt triangula DCE, BCA, æquiangula;[a] ideoque erit, vt CD, ad DE, ita CB, ad BA. Quocirca ſi fiat, a 4. ſexti.

Vt CD, diſtantia menſoris à ſpeculo C.	*ad DE, ſtaturam menſoris:*	*Ita CB, diſtantia ſpeculi ab altitudine*	*ad BA,*

producetur altitudo BA, quam quærimus, nota in partibus ſtaturæ menſoris DF.

ALITER.

2 MENSVRETVR per quadrantem angulus DCE, BCA, (Hoc fiet, ſi angulus rectus conſtruatur FGH, & recta FG, tot particulas æquales contineat, quot paſſus, vel pedes in CD, diſtantia continentur: I-

tem recta GH, tot particulas eaſdem, quot paſſus aut pedes ſtatura menſoris DE, complectitur. Iuncta namque b 4. primi. recta FH,[b] erit angulus F, angulo C, æqualis, quem angulum F, nullo negotio per quadrantem aliquem in gradus diuiſum cognoſcemus.) Nam ſi poſito ſinu toto CB, fiat,

Vt ſinus totus CB,	*ad BA, tangentem anguli reflexionis BCA, vel incidentiæ DCE, quem proxime inuenimus:*	*Ita CB, diſtantia cognita*	*ad BA,*

prodibit altitudo BA, nota in partibus diſtantiæ CB. Et ſi rurſum fiat,

Vt ſinus totus CB,	*ad CA, ſecantem eiuſdem anguli BCA:*	*Ita CB, diſtantia cognita*	*ad CA,*

cognita etiam erit CA, diſtantia à ſpeculo C, vſque ad cacumen A, in partibus diſtantiæ CB.

ALITER.

c 10. Triā. rectil. 3 PER ſolos ſinus ita progrediemur, ſi libet.[c] Fiat,

Vt ſinus anguli A, complementi anguli C, reflexionis, vel incidentiæ,	*ad CB, diſtantiam cognitam:*	*Ita ſinus anguli C, incidentiæ, vel reflexionis,*	*ad BA.*

d 10. trian. rectil. Nam productus numerus dabit altitudinem BA, notam in partibus diſtantiæ CB.[d] Rurſus fiat,

Vt ſinus anguli A, complementi anguli eiuſdem C,	*ad CB, diſtantiam cognitam:*	*Ita ſinus totus recti anguli B,*	*ad CA,*

Numerus enim proueniens dabit hypotenuſam CA, in partibus diſtantiæ CB, cognitam.

ALTITVDINEM inacceſſibilem beneficio ſpeculi plani, vna cum ſpeculi diſtantia tam à baſe, etiam non viſa, quam à cacumine altitudinis, cognoſcere.

PROBLEMA XL.

1 SIT rurſus in præcedenti figura altitudo AB, ſupra planum BD, erecta. Collocato ſpeculo plano in C, recedatur ab altitudine ad D, donec cacumen A. per radium reflexum ECA, cerni poſſit, obſeruetur que per quadrantem angulus ECD, ideoque & angulus ACB, vt in problemate præcedenti Num. 2. dictum eſt. Deinde collocato ſpeculo in K, puncto, quotuis paſſibus à C, verſus altitudinem diſtante, recedatur iterum ad I, donec cacumen A, inſpiciatur rurſum per radium reflexum LKA; inquiraturque magnitudo anguli IKL, ideoque & anguli AKB. Et quoniam poſito ſinu toto AB, rectæ BK, BC, tangentes ſunt angulorum BAK, BAC, qui complementa ſunt angulorum K, C, reflexionum per quadrantem cognitorum; cognita erit KC, earum tangentium differentia. Si ergo fiat.

Vt KC, differentia tangentium, quæ complementis angulorum incidentiæ debentur,	*ad AB ſinum totum*	*Ita KC, differentia poſitionum ſpeculi*	*ad AB,*



procreabitur numerus, qui altitudinem AB, notam exhibebit in partibus differentiæ poſitionum ſpeculi KC.

RVRSVS ſi fiat,

Vt KC, differentia tangentium complementorum angulorum incidentiæ ſpeculi	*ad CB, tangentem maiorem:*	*Ita KC, differentia poſitionum ſpeculi*	*ad CB,*

reperietur CB, maior diſtantia ſpeculi C, ab altitudine. Ex qua ſi auferatur KC, differentia poſitionum ſpeculi, nota remanebit KB, minor diſtantia ſpeculi K, ab eadem altitudine. Quæ etiam inuenietur, ſi fiat, vt KC, differentia tangentium prædictorum angulorum, qui complementa ſunt angulorum incidentiæ in ſpeculo, ad KB, tangentem minorem: Ita KC, differentia poſitionum ſpeculi ad aliud, vt perſpicuum eſt.

a 32 prim. [a] DEINDE quia angulus AKB, in propinquiore ſpeculi poſitione duobus angulis ACK, CAK, æqualis eſt, ſi angulus ACK, remotioris poſitionis detrahatur ex angulo AKB, poſitionis propinquioris: remanebit an-

b 10. trian. rectil. gulus CAK, notus.[b] Si igitur fiat,

Vt ſinus anguli CAK, differentiæ angulorum incidentiæ	*ad KC, differentiam poſitionum ſpeculi:*	*Ita ſinus anguli AKC, complementi anguli AKB, ad duos rectos in propinquiore poſitione ſpeculi*	*ad CA,*

c 10. triang. rectil. gignetur hypotenuſa CA, remotioris poſitionis ſpeculi, in partibus differentiæ poſitionum ſpeculi KC.[c] Et ſi rurſus fiat,

Vt ſinus anguli CAK, differentia angulorum incidentiæ	*ad KB, differentiam poſitionum ſpeculi:*	*Ita ſinus anguli reflexionis ACK, in remotiori poſitione ſpeculi,*	*ad KA,*

procreabitur quoque hypotenuſa KA, propinquioris poſitionis ſpeculi, in eiſdem partibus differentiæ poſitionum ſpeculi KC.

ALITER

2 PER ſolos ſinus idem aſſequemur hoc modo. Inuenta hypotenuſa CA, vt proxime diximus, per ſinus [d] fiat — d 10. trian. rectil.

Vt ſinus totus anguli recti B,	*ad hypotenuſam inuentam CA,*	*Ita ſinus anguli ACB, remotioris poſitionis ſpeculi*	*ad AB,*

Prodibit enim in Quotiente altitudo AB, nota in partibus hypotenuſæ inuentæ CA.[e] Quod ſi rurſus fiat, — e 10. trian. rectil.

Vt ſinus totus anguli recti B,	*ad hypotenuſam inuentam CA,*	*Ita ſinus anguli BAC, complementi anguli in remotiore poſitione ſpeculi*	*ad CB,*

Producetur CB, maior ſpeculi diſtantia ab altitudine. Ex qua ſi ſubtrahatur KC, differentia poſitionum ſpeculi, cognita etiam relinquetur diſtantia minor KB. Quæ etiam, ſi inueſtigetur hypotenuſa KB, vt ſupra traditum eſt, reperietur: ſi fiat, vt ſinus totus anguli recti B, ad hypotenuſam inuentam KB, ita ſinus anguli BAK, complementi anguli in propinquiore poſitione ſpeculi, ad aliud, vt manifeſtum eſt.

ALTITVDINEM monti impoſitam, ſi modo altitudinis baſis poſſit conſpici, vel portionem ſuperiorem alicuius turris, beneficio ſpeculi plani efficere notam.

PROBLEMA XLI.

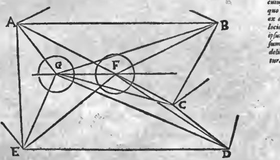
1 QVANDO ad turrim patet acceſſus, vt eius à menſore diſtantia cognoſci poſſit; ſi per probl. 39. inueſtigetur tam altitudo à ſummitate portionis propoſitæ, vſque ad baſem turris, quam altitudo ab infima parte eiuſdem portionis, vſque ad eandem turris baſem: & minor hæc altitudo ab illa maiore dematur, reliqua fiet portio, quæ inquiritur.

2 AT vero, quando altitudo monti eſt impoſita, & baſis altitudinis apparet, aut ad turrim non patet acceſſus: exquirenda erit per præcedens problema vtraque altitudo prædicta. Nam rurſus minor detracta ex maiore, reliquam faciet altitudinem, vel portionem, quæ deſideratur.

ITVM cuiuslibet campi, aut atrij, vel templi, vel etiam vrbis, aut regionis cuiuſuis in plano deſcribere, ſi è duobus locis intra ipſum ſitum aſſumptis baculi ex omnibus campi angulis erecti, vel certe ipſi anguli in ædificio, aut vrbe, vel loca regionis videri poſſint: ſimulque longitudines laterum campi, vel ædificij, nec non diſtantias inter angulos, & vtrumuis locorum aſſumptorum in data menſura cognoſcere. Quod ſi talia duo loca intra ſitum eligi nequeant, idem efficere, dummodo ſitum poſſimus circumire.

PROBLEMA XLII.

Situs campi cuiuſuis, quo pacto ex duobus locis intra ipſum aſſumptis delineetur.



1 ETSI problema hoc vel ... ographicum eſt, vel Architectonicum; tamen quia ſine ... menſione linearum abſolui ... n poteſt, lubet illud hoc loco paucis explicare. Sit ergo cā... quinque lateribus AB, BC, ... D, DE, EA, cinctus. Figan... in quinque angulis A, B, C, ... E, quinque baculi ad angu... rectos cum Horizonte, na... arq; circa medium areæ pla... n aliquantulum altum Ho... onti æquidiſtans, in quo duo ... ecta F, G, quantumlibet inter ſe diſtantia, verbi gratia 100. ... ibus, è quibus omnes quin... baculi cerni poſſint. Per F, ... ducatur recta FG, ad vtraſq; partes; continebitq; ſegmentū FG, 100. pedes ex hypotheſi. Affixa deinde dio... volubili cum pinnacidiis in vtroq; puncto F, & G, deſcriptiſq; circulis duob. ex F, & G, vt per eorū circūferentias angulorū magnitudines, qui in F, G, conſtituentur, cognoſci poſſint, inſpiciatur ex F, & G, per foramina pinnacidiorū (circūducta dioptra) baculi ex angulis A, B, C, D, E, erecti, & anguli, quos linea fiduciæ cum recta

 facit,

facit, aut quos rectæ à linea fiduciæ deſignatæ inter ſe faciunt, transferantur ordine ad puncta K, L, quomodocunque inter ſe diſtantia in recta KL, quæ ſeorſum in charta aliqua ſit deſcripta, productis lineis, quæ illos angulos in K, & L, efficiunt vt in 2. figura apparet. Si namque puncta, vbi dictæ lineæ ex K, & L, prodeuntes concurrunt, lineis rectis coniungantur, deſcripta erit figura OPQRS, ſimilis omnino figuræ campi ABCDE. Quod ſic demonſtro. Triangula AGF, OLK, ſimilia ſunt, quod anguli AGF, AFG, angulis OLK, OKL, æquales ſint, ex conſtructione.

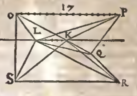
a 4. ſexti. [a] Igitur erit AG, ad GF, vt OL, ad LK. Eademque ratione, ob ſimilitudinem triangulorum FGE, KLS, erit GF, ad GE, vt LK, ad LS: ac proinde ex æquo erit AG, ad GE, vt OL, ad LS. Cum ergo & anguli AGE, OLS, circa quos latera illa ſunt proportionalia, æquales ſint, quippe cum angulo AGE, factus ſit æqualis ex conſtructione angulus OLS:

b 6. ſexti. [b] ſimilia erũt triangula AGE, OLS, hoc eſt, æquiangula. Pari ratione ob ſimilitudinem triangulorum FGD, KLR,

c 4. ſexti. [c] erit GD, ad GF, vt LR, ad LK. Item ob ſimilitudinem triangulorum FGE, KLS, erit FG, ad GE, vt KL, ad LS. Igitur erit ex æquo GD, ad GE, vt LR, ad LS: Ac proinde cum anguli DGE, RLS, ex conſtructione ſint æquales;

d 6. ſexti [d] æquiangula quoque erunt triangula DGE, RLS. Non aliter oſtẽdemus, triangula CGD, BGC, AGB, triangulis QLR, PLQ, OLP, eſſe æquiangula. Immo eiſdem argumentis concludemus, quamuis non ſit neceſſarium, triangula, quæ in F, ſupra latera campi conſtructa ſunt, æquiangula eſſe triangulis in K, ſupra latera figuræ OPQRS, conſtitutis. Ex his ſequitur, figuram ABCDE, figuræ OPQRS, æquiangulam eſſe: quippe cum earum anguli coagmentati ſint ex angulis æqualibus, nimirum angulus AED, ex angulis AEG, GED, ipſum componentibus, qui angulis OSL, LSR. angulum OSR, componentibus æquales ſunt; & ſic de cæteris. Sequitur etiam latera earundem figurarum circa æquales angulos

e 4. ſexti. eſſe proportionalia. Nam propter triangulorum ſimilitudinem, [e] eſt AE, ad EG, vt OS, ad SL: & EG, ad ED, vt SL, ad SR. Ideoque ex æquo AE, ad ED, vt OS, ad SR: Atque ita de aliis. Similes ergo ſunt figuræ ABCDE, OPQRS.



2 IAM vero vt longitudines laterum AB, BC, CD, DE, EA, & rectarum ex F, vel G, ad angulos in prima figura ductarũ inueniamus, diuidendum erit in figura inuenta, id eſt, in ſecunda, interuallum KL, in quotcunq; partes æquales. Deinde inquirendum, quotnam ex illis partibus in ſingulis lateribus, & rectis eiuſdem figuræ ſecundæ ex K, vel L, prodeuntibus contineantur, quod vel per circinum fieri poteſt, repetendo ſæpius vnam particulam in dictis lateribus rectis: vel (quod magis probo) hoc modo. Repetatur tota KL, in quolibet latere, vel recta, quoties fieri poteſt, & in reliquo ſegmento vna etiam particula interualli KL, circino iteretur, quoties fieri poteſt. Nam quoties repetita fuerit KL: toties numerus particularum ipſius KL, in latere continebitur, cum tot inſuper particulis, quot per circinum in reliquo ſegmento fuerint deprehẽſæ. Aut certe per ea, quæ lib. 1. c. 1. ad finem Num. 2. ſcripſimus, inueſtigetur in inſtrumento partium, quot particulæ interualli KL, in dictis lateribus, & rectis comprehendantur. Deinde fiat, vt numerus particularum interualli KL, aſſumptus in 2. figura, ad numerum pedum inter puncta F, & G, in prima figura aſſumptum, ita numerus particularum in quolibet latere, vel recta in ſecunda figura inuentarum, ad aliud. Quotiens enim numerus indicabit, quot pedes in aſſumpto latere, vel recta contineantur. Ratio eſt, quia cum eandem proportionem habeat KL, in 2. figura ad quodlibet latus, vel rectam eiuſdem figuræ, quam habet FG, in prima figura ad reſpondens latus, vel rectam, propter ſimilitudinem figurarum, erit permutando KL, ad interuallum FG, vt latus ad latus, &c. Verbi gratia. In 2. figura interuallum KL, ſectum eſt in 5. particulas, qualium 17. in latere OP, inuentæ ſunt: Et quia ſpatium FG, in 1. figura poſitum eſt 100. pedum: ſi fiat,

Vt KL, quinque particularum *ad FG. 100. pedum:* *Ita OP, 17. particularum* *ad AB,*

hoc eſt, ſi, vt regula aurea præcipit, 100. ducantur in 17. ſecundus numerus in tertium, & productus numerus 1700. diuidatur per 5. id eſt, per primum numerum, reperientur in Quotiente 340. pedes pro latere AB, & ſic de cæteris.

Situs campi cuiuſuis qua ratione ex vno loco intra ipſum aſſumpto deſcribatur.

3 EVNDEM ſitum campi propoſiti ABCDE, delineabimus etiam ex vno tantum loco F, intra ipſum aſſumpto hac ratione. Dioptra ad ſingulos baculos ex angulis erectos, dirigatur, notatis angulis, quos lineæ, per dioptram deſignatæ inter ſe faciunt; diſtantiæque ab F. ad ſingulos angulos inquirantur in aliqua menſura, vel catenulam aliquam ferream, quæ nec intendi poſſit, nec remitti, vel per chordam ex F, ad ſingulos angulos extenſam, vel certe, ſi diſtantiæ illæ magnæ ſint, per problema 2. vel 36. beneficio quadrati, alteriuſue inſtrumenti. Nam ſi in charta aliqua ad quodlibet punctum K, iidem anguli conſtituantur, & in rectis illos angulos efficientibus accipiantur tot particulæ inter ſe æquales cuiuſuis magnitudinis, quot menſuræ inuentæ ſunt in rectis reſpondentibus, quæ ex F, exeunt: extrema autem puncta vltimarum particularum rectis lineis coniungantur, deſcripta erit figura OPQRS, ſimilis omnino campo ABCDE:

f 6. ſexti. [f] propterea quod triangula ad punctum F, collecta ſimilia ſunt triangulis ad punctum K, collectis, ob æqualitatem angulorum in F, & K, conſtitutorum, & latera circa illos angulos proportionalia, ex conſtructione.

4 LATERVM autem longitudines in campo ABCDE, cognoſcentur, ſi per circinum inquiratur, quot particulæ in lateribus figuræ OPQRS, contineantur ex illis, quæ in quauis recta ex K, emiſſa ſumptæ fuere. Totidem namque menſuræ in lateribus campi comprehendentur, vt perſpicuum eſt ex figurarum ſimilitudine.

Vrbis cuiuſuis, ac regionis ſitus quo pacto deſcribatur.

5 EADEM prorſus ratio tenenda eſt in ſitu alicuius atrii vel templi, vel vrbis, aut regionis explorando. Solum in vrbe deſcribenda pro punctis F, & G, eligendæ ſunt duæ turres altæ, è quibus omnes vrbis anguli conſpici poſſint, & quarum diſtantia vnius ab altera vel cognita ſit, vel per præcedentia problemata inueſtigata. In regione autem delineanda pro iiſdem punctis F, & G, duo oppida deligenda ſunt, & in quolibet ex altiſſima turre circumiacentia oppida inſpicienda, vt anguli habeantur, quos rectæ ab oculo menſoris ad ſingula oppida eductæ conſtituunt. Hi autem facilius obſeruabuntur, ſi loco dioptræ, quia nimis alta eſt, ſtatuatur planum ere-

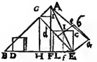
rectum in punctis F,& G, ita vt circumductum transeat per oppida circumiacentia, ſi intelligatur eſſe productum Ita namque planum ipſum rectas deſignabit quæ angulos prædictos conſtituant. Atque hoc etiam in ſitu vrbium peruestigando faciendum erit. Itaque ſi anguli vrbis cuiuſpiam, aut oppida alicuius regionis ſint A,B, C,D,E,& duę turres in F,& G, omnia perficienda erunt, vt ſupra de campi ſitu dictum eſt. Nam ſitum vrbis vel regionis exhibebit figura OPQRS, diſtantiæque locorum A,B,C,D,E, vnius ab altero cognoſcentur, vt de lateribus campi dictum eſt.

6 QVOD ſi intra ſitum propoſitum duo loca, vel vnus ſaltem nõ exiſtat, vnde omnes anguli conſpici poſſint, vt in omnibus ædificijs contingit, oportebit ſitum circumire, & inueſtigare angulos per rectas, quæ in campo à baculo ad baculum ducendæ ſunt per catenulam ferream, vel chordam, aut certe erigendum planum, quod per binos baculos tranſire conſpiciatur. Ipſum enim planum dictas rectas exhibebit. In ædificijs autem ac templis ipſi muri exteriores dictos angulos conſtituunt, quorum amplitudo inueſtigari ſolet ab artificibus inſtrumento quodam ex duab. regulis compacto, quarũ vna ſub alterã ingreſſa moueatur (quod Italis Squadra zoppa dicitur) vt hæc figura indicat, aperto namq; inſtrumento, ſi crura duobus muris angulũ efficientib. cõgruent dabunt interiora cruriũ latera in concurſu angulũ quæſitum. Et ſi idem inſtrumentũ interioribus angulis ædificiorum applicetur, dabunt eadẽ latera interiora cruriũ angulos, qui à muris efficiuntur. Inuentis angulis ac notatis, menſuranda erunt interualla inter baculos in campo erectos, vel inter angulos ædificiorum, per catenulã ferream vel chordam, aut certe in campis, ſi ea interualla longa ſint, per problema 2. vel 36. exploranda in aliqua menſura nota, vt in cubitis. Nam ſi in charta ducatur linea OP, tot particulas æquales continens, quot cubiti, verbi gratia, in interuallo AB, deprehenſi ſunt, & angulus POS, angulo BAE, inuento fiat æqualis: & in recta OS, accipiantur tot particulæ prioribus æquales vſq; ad S, quot cubiti in interuallo AE reperti ſunt: & rurſum angulus OSR, angulo AED, æqualis fiat, & ſic deinceps repreſentabitur ſitus campi per figuram OPQRS. Idemque de ſitu ædificiorum tam exteriori, quam interiori intelligendum eſt, ſi diligenter anguli ac diſtantiæ obſeruentur.



LONGITVDINEM trabis ad Horizontem inclinatæ, cuius portio ſuperior tantum conſpiciatur vna cum angulo inclinationis, diſtantia baſis à menſore & altitudine faſtigij ſupra Horizontem, per Quadratum metiri.

PROBLEMA XLIII.



1 Trabs inclinata ſupra murum CD, ſit AB, & menſor in conſtitutus è directo ipſius trabis, ita vt ipſe & trabs in eodẽ plano metiri debeat longitudinẽ AB, angulum inclinationis ABE, diſtantiam BE, & altitudinem AF, etiamſi tantum portionem ſupremam AC, videat, baſem occultante muro CD. Si quadratum ad E, bis applicetur, ſemel videlicet inclinatum, vt vnum latus recta tendat ad punctum A, & iterum demiſſum ad Horizontem, ita vt centrum dioptræ ſit in E, & latus EL, Horizonti incumbat. Nam inſpecto puncto A, ex a, [a] ſi fiat, vt vmbra verſa e b, ad latus b a, ita latus a E, ad aliud, gignetur diſtantia ſiue hypotenuſa EA. [a] 4. ſexti. Inde explorata portione dioptræ EI, vt in ſcholio Problematis 7. Numer. 2. docuimus; [b] Si fiat, vt EI, portio dioptræ inuenta ad repertam hypotenuſam EA, ita ſI, lateri quadrati æqualis ad aliud, producetur altitudo AF, [b] 2. ſexti & componendo. cognita, quod eſt quartum.

2 [c] ET ſi rurſus fiat, vt EI, portio dioptræ ad hypotenuſam EA, ita Eſ. ipſi cI, æqualis ad aliud, nota fiet [c] 2. ſext & componendo. diſtantia EF. Non aliter, ſi aliud punctum G, inſpiciatur, cognita fiet hypotenuſa EG, & altitudo GH, vna cum diſtantia EH, ſi nimirum quadratum primo ita applicetur ad E, vt vnum latus tendat recta ad G, &c. quemadmodum in ſcholio probl. 7. oſtendimus.

3 IAM ſi EF, inuenta ex cognita EH, ſubducatur, nota relinquetur FH, id eſt, GI, quæ in ſublimi ducitur parallela Horizonti. Eodem modo ſi GH cognita, vel illi æqualis FI, ex inuenta AF, dematur reliqua AI, nota fiet. Cum igitur in triangulo rectangulo AGI, in ſublimi conſtituto duo latera AI, IG, cognita ſint, [d] [d] 6. Trian. rectil cognoſcetur & baſis AG, & angulus AGI, [e] qui æqualis angulo inclinationis ABE, qui quæritur, quod eſt ſecundum. [e] 29. prim.

4 ITAQVE cum in triangulo rectangulo ABF, latus AF, notum ſit factum, vna cum angulo B, ac proinde & cum eius complemento BAF, [f] cognitum fiet alterum quoq; latus BF, cui ſi adijciatur diſtantia EF, [f] 4. Trian. rectil. cognita, tota diſtantia quæſita EB, manifeſta erit, quod eſt tertium.

5 DENIQVE in eodem triangulo ABF, rectangulo, ex latere AF, & angulo B, ac proinde & eius complemento BAF, cognitis, [g] cognoſcetur etiam baſis AB, longitudo videlicet trabis, quod eſt primum. Hæc [g] 4. Trian. rectil. nota etiam efficitur, [h] ſi fiat, vt AI, differentia altitudinum cognitarum AF, GH, ad AF, maiorem altitudinem, ita AG, paulo ante nota effecta, ad AB. [h] 2. ſexti & componendo.

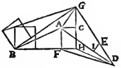
EX duarum turrium ſummitatibus, etiamſi baſes propter ædificia interiecta occultentur, diſtantiam tam inter earum baſes, quam inter earundem faſtigia, vna cum ipſarum altitudinibus ac diſtantijs à menſore conijcere.

PROBLEMA XLIV.

1 SINT duæ turres AF, GH, quarum ſola faſtigia A, G, cernantur ex loco Horizontis B. Oportet inueſtigare & diſtantiam FH, & interuallum AG, & vtriuſque turris altitudinem. Sit primum minor turris AF, inter maiorem, & menſorem, ita vt menſor in eodem eum turribus ſit plano, & minor non occultet faſtigium G, maioris. Per ſcholium problem. 7. inuenietur & vtraque diſtantia BF, BH, & vtraque altitudo AF, GH: ſi nimirum in B, Quadratum ita locetur, vt vnum eius latus cum hypotenuſis BA, BG, coincidat, &c quod eſt quartum, ac tertium. Et quia tria puncta B, F, H, ponuntur in eadem recta, erit diſtantiarum differentia FH, cognita, hoc eſt, diſtantia inter turrium baſes, quod eſt primum. Rurſus differentia altitudinum GC, nota erit,[a] ac propterea in triangulo rectangulo ACG, ex duobus lateribus, AC, CG, cognitis, baſis quoque AG, efficietur nota, quod eſt ſecundum.

a 6 triang. rectil.

2 DEINDE conſiſtat menſor in D, ita vt ipſe, ac baſes F, H, non iaceant in vna linea recta. Per ſcholium problem. 7. iterum tam altitudioes AF, GH, quam diſtaotiæ DF, DH, cognitæ fient, ſi videlicet quadrati vnum latus hypotenuſis DA, DG, congruet, &c. quod eſt tertium, ac quartum. Inueſtigatis autem hypotenuſis DA, DG, vt in eodem ſcholio traditum eſt, cognoſcetur per problema 16. præſertim per ea, quæ Numero 2. eiuſdem problematis ſcripſimus, interuallum AG, ſi nimirum in hypotenuſis accipictur portiones DI, DE, ipſis hypotenuſis proportionales, vt in illo Numer. 2. diximus, &c. quod eſt ſecundum. Et quoniam altitudines AF, GH, notæ factæ ſuot, erit etiam earum differentia GC, nota. Quamobrem ex baſe AG, & latere GC, in triangulo rectangulo ACG, cognitis, latus quoque AC, hoc eſt, diſtantia FH, inter baſes nota erit: quod eſt primum.



SI turres eſſeot AF, CH, æquales, eſſet diſtantia AC, inter faſtigia diſtantiæ FH, inter baſes æqualis.

SCHOLIVM.

Vnica regula ad omnes rectas dimetiendas, quando earum extrema videntur.

1 EX omnibus, quæ demonſtrata ſunt in hoc 3. libro, colligi poteſt regula generalis ad dimetiendas omnes longitudines, ſiue eæ ſint diſtantiæ in Horizonte, ſiue altitudines, profunditatesue, ſiue hypotenuſæ, id eſt, diſtantiæ ab oculo ad quodlibet punctum, ſiue interualla inter duo puncta, vbicunque exiſtant: dummodo vtrumque extremum longitudinis dimetiendæ videri poſſit à menſore, vbicunque etiam ipſe exiſtat. Nam ſi per problema 15. præſertim per ea, quæ Numero 5. eius problematis ſcripſimus, diſtantiæ à menſore vſque ad duo extrema longitudinis explorentur, inueſtigato prius angulo, quem duæ illæ diſtantiæ, ſiue hypotenuſæ efficiunt, vt in ſcholio problem. 7. Numero 2. docuimus; &c. factum erit, quod proponitur. Itaque ſi diligenter ea, quæ in proble. 15. ac 16. ſcripſimus, percepta fuerint, eadem ſemper ratio metiendarum rectarum tenenda erit, ſi vtraque extremitas rectæ propoſitæ cerni poteſt, vt diximus.

2 SED neque hoc omittendum puto, quando inuentæ ſunt duæ diſtantiæ à menſoris loco vſq; ad duas extremitates rectæ metiendæ, vna cum angulo ab ipſis comprehenſo, certius (quanquam laborioſius) interuallum inter duo illa extrema, hoc eſt, rectam propoſitam inueniri poſſe ex duabus illis diſtantiis, & angulo comprehenſo, per 12. triang. rectil. quam per duas dictas portiones illis diſtantiis proportionales: propterea quod interuallum inter extrema illarum portionum vix accurate per circinum reperiri poſſit. Id quod etiam in prob. 16. ad finem Num. 2. moouimus.

SPATIVM terræ inæquale pro ducendis aquis librare: aut etiam ſi lubet, Horizonti æquidiſtans efficere.

PROBLEMA XLV.

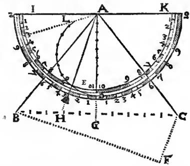
Inſtrumẽti conſtructio pro librationibus.

1 QVANDO oblatum ſpatium non eſt valde magnum, excogitauit Ioaones Ferrerius Hiſpanus nobilis Architectus, & Mathematicus, inſtrumentum percommodum pro librationibus, hoc modo. Compingantur duæ regulæ AB, AC, ex ligno aliquo ſolido, ac duro, æqualium crurum, quæ longitudinem habeant ſatis longam, ita vt diſtantiæ inter extrema B, C, contineat 10. palmos præciſe, aut etiam plures. Deinde ducta recta AG, ad BC, perpendiculari, deſcribatur ex A, ſemicirculus quantuſcunque IDK, cuius ſemidiameter AD, in tot æquales partes ſecetur, quot palmi in diſtantia BC, comprehenduntur. Deſcripto quoque circa AD, ſemicirculo occulto AED, traosferaotur ex D, in eius peripheriam omnia interualla inter D, & puncta rectæ AD: ac tandem ex A, per ſingula puncta ſemicirculi AED, rectæ occultæ emittantur, notenturque interſectiones earum cum peripheria DI, atque in alteram peripheriam DK, tranſportentur. Si namque ex A, filum cum perpendiculo egrediatur, & omnes partes excindantur, relictis ſolum cruribus inſtrumenti AB, AC, vna cum peripheria ſemicirculi IDK, conſtructum erit inſtrumentum ad librationes peropportunum.

2 NAM

2 NAM in campo aliquo, vel horto, poſitis punctis B, C, in terra, ſi filum perpendiculi tranſit per D, erunt puncta B, C, in terra eiuſdem altitudinis, ita vt ſi ſpatium interiectum BC, complanetur, ſpatium illud horti, vel campi ſit libratum, hoc eſt, Horizonti parallelum. *Spatiũ inæquale quo pacto libretur.*

SI vero filum perpendiculi AH, abſcindet ex quadrante DI, aliquot partes, nimirum 3. erit punctum C, tribus palmis altius puncto B, atque ita fodiendum ibi erit ad altitudinem trium palmorum, vt complanatum ſpatium inter B, & infimum punctum effoſſum Horizonti ſit parallelum. Quod ſi filum perpendiculi abſcinderet ex alio quadrãte DK, quotcunque partes, nimirum 5. eſſet punctum C, depreſſius quinque palmis puncto B. Quare tunc ſuperimponẽda, foret puncto C, terra ad altitudinem 5. palmorum, vt ſpatium inter B, & ſupremum punctum terræ ſuperimpoſitæ complanatum Horizonti æquidiſtet. Complanato ſpatio inter B, & aliud punctum prope C, ſiue effoſſum, ſiue eleuatum, iteranda erit eadem operatio, poſito crure AB, in puncto inuento, &c. Atque ita deinceps procedendum eſt vſque ad vltimum ſignum in horto, vel campo propoſitum. Hoc ita demonſtratur. Concipiatur ducta recta BC, & recta CF, filo perpendiculi AH, duci parallela, quæ ad Horizontem erit perpendicularis, ac proinde ducta BF, ad CF, perpendicularis Horizonti æquidiſtabit. Et quoniam in triangulis AGH, BFC, recti anguli G, F, æquales ſunt,[a] nec non & alterni C, H,[b] æquiangula erunt triangula; Eſt autem AGH, triangulo ADE, æquiangulum, quod & recti G, E, æquales ſint, & A, communis. Igitur triangula quoque ADE, BCF, æquiangula erunt.[c] Ideoque erit vt AD, 10. partium ad DE, 3. partium, ita BC, 10. palmorum, ad CE, ac proinde CF, 3. palmos continebit, tot nimirum, quot partes filum perpendiculi abſcindit ex ſemicirculo IDK. Quod ſi quadratum CF, nimirum in dato exemplo 9. palmi (cum latus CF, ſit 3. palmorum) dematur ex 100. id eſt, ex quadrato BC, 10. palmorum, reliquum fiet quadratum 91. lineæ horizontalis BF, cuius quadrata radix $9\frac{10}{19}$. dabit horizontalem diſtantiam BF, à puncto B, vſque ad perpendicularem CF. *a 29. p. b 3. c 4. ſe.*



HÆC eadem diſtantia horizontalis BF, cognoſcetur quoque ſine numerorum ſupputatione, hoc modo. Ex A, deſcribatur alius ſemicirculus, & in ſemicirculum AED, transferantur omnia interualla inter A, & puncta rectæ AD, ac tandem ex A, rectis occultis emiſſis per puncta in ſemicirculo notata, obſeruentur earum interſectiones cum ſemicirculo ex A, deſcripto, transferanturque in alterum quadrantem verſus K. Nam quot partes filum perpendiculi AH, ex vltimo hoc ſemicirculo ex A, deſcripto abſcindet, tot palmos continebit horizontalis longitudo BF:[d] propterea quod eadem eſt proportio DA, ad AE, quæ CB, ad BF, quippe cum triangula DAE, CBF, oſtenſa ſint ſimilia. Cum ergo ex conſtructione, recta AE, complectatur tot partes rectæ AD, quot ex A; in ſemicirculum AED, vſque ad filum perpendiculi ſunt translatæ, (vt in noſtro exemplo partes propemodum $9\frac{1}{2}$.) comprehendentur totidem palmi rectæ CB, in recta BF. Eſt autem conſideratione dignum, partes poſterioris ſemicirculi contrario ordine ſimiles eſſe partibus prioris ſemicirculi IDK. Nam ſi verbi gratia rectæ DE, quæ æqualis eſt tribus partibus rectæ DA, initium ſumentibus à D, accipiatur æqualis AL, trium quoque partium rectæ AD, initium ſumentium à puncto A, ducaturque recta AL, fiet angulus IAL, æqualis angulo DAE. Quia enim arcus DE, AL, æquales ſunt, erunt quoque reliqui AE, DL, æquales.[e] Igitur anguli ADE, DAL, æquales erunt, ideoque & reliqui DAE, IAL, æquales inter ſe erũt: propterea quod tam duo ADE, DAE, propter rectum E, in ſemicirculo, quam duo DAL, IAL, vni recto ſunt æquales. Ex quo fit, rectas AE, AL, ex poſteriori ſemicirculo ex A, deſcripto auferre arcum ſimilem arcui in priori ſemicirculo IDK, inter rectas AD, AE, intercepto: Eademque ratio eſt de aliis. *d 4. ſext. e 27. tertij.*

QVANDO inſtrumentum ſæpius repetitum fuit, quæritur autem, quanto altius, vel depreſſius ſit primũ punctum, quam vltimum, ſcietur hoc per altitudines, depreſſioneſue intermedias. Vt ſi primus locus fuerit altior quam ſecundus, quinque palmis; & hic altior quam tertius, duobus palmis; hic autem depreſſior, quã quartus locus, tribus palmis; & hic denique altior quam vltimus locus, vno palmo, colligemus primum locum altiorem eſſe vltimo loco quinque palmis. Nam primus locus erit altior tertio ſeptem palmis, cum primus ſecũdum quinque palmis ſuperet, & ſecundus tertium, duobus. Et quia tertius ſuperatur à quarto, tribus palmis, ſuperabit primus quartum quatuor palmis. Cum ergo hic altior ſit, quam vltimus, vno palmo, erit primus altior, quam vltimus, quinque palmis, & ſic de cæteris.

3 CÆTERVM quando duo loca multum inter ſe diſtant, explorabimus per quadratum ſtabile, quanto alter altero ſit altior, vel humilior, hac ratione. Sit primus locus A, ſecundus B, in prima figura. Erecto baculo AD, ſtaturæ menſoris æquali, concipiatur ex B, ad perpendiculum loci A, altioris perpendicularis BC, (per quadratũ autẽ facile cognoſces, vter locorum ſit altior. Nam quando per latus ſupremũ Horizonti æquidiſtatis, ex A, locus B, cernitur, eadem eſt altitudo vtriuſque loci: Si vero deprimendum eſt illud, vt B, videri poſſit, erit locus A, altior: Si denique idem latus attollendum eſt, erit locus B, altior.) Nam ſi per doctrinam ſcholij probl. 9. inueſtigetur altitudo DC, & auferatur menſoris ſtatura AD, reliqua erit altitudo AC: Ac tanto erit altior locus A, loco B. Et ſi è contrario in loco humiliori B, erigatur baculus BF, ſtaturæ menſoris æqualis, & per doctrinam ſcholij probl. 7. inquiratur altitudo AE, vſque ad perpendicularem FE, per cogitationem ad AC, ductam, & ap- *Librationes pro ducendis aquis, quo modo fiãt.*

GEOMETRIÆ PRACTICÆ LIBER IV.

AREAS

Superficierum planarum inueſtigans.

QVEMADMODVM linea recta rectas lineas metitur, ita Geometra ſuperficies planas per ſuperficiem quadratam, & corpora, ſiue ſolida, per corpus cubicum metiri ſolent. Nam ſicut linea recta dicitur 100. palmorum in qua linea vnius palmi centies continetur, ita ſuperficies plana dicitur 100. palmorum, quæ centies quadratum continet, cuius latus palmo æquale eſt: & ſolidum 100. palmorum illud dicitur, quod complectitur 100. cubos, quorum quilibet latus habet vnius palmi: quod de aliis etiam menſuris, vt de pede, cubito, paſſu, milliario, &c. intelligendum eſt. Quia vero quælibet ſuperficies tot quadrata cuiuſque menſuræ comprehendere dicitur, quot in parallelogrammo rectangulo, quod illi æquale eſt, continentur, explicandum primo loco erit, qua ratione area cuiuslibet rectanguli cognoſcatur. Deinde de area triangulorum, quadrilaterorum non rectangulorum, cæterarumque figurarum plurium laterum agemus: ac denique circulum, eiuſque partes metiemur.

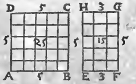
Penes quid menſura linearum rectarum, planarum ſuperficierum & ſolidorum ſumantur.

DE AREA RECTANGVLORVM

CAPVT I.

QVONIAM Euclides defin. 1. lib. 2. docet, omne parallelogrammum rectangulum contineri ſub rectis duabus lineis, quæ rectum comprehendũt angulum manifeſtum eſt, aream cuiuſque rectanguli produci ex multiplicatione duorum laterum circa rectum angulum, vnius in alterũ; adeo vt in quadrato ſatis ſit ducere vnum latus in ſe, vt eius area cognoſcatur: quippe cum duo latera circa vnum angulum rectum æqualia ſint. Vt in quadrato ABCD, cuius ſingula latera quinos palmos continent, ſi latus AB, quinque palmorum in ſe ducatur, producentur 25. quadrata, quorum quodlibet habet latus vnius palmi; atq; tot palmos quadratos continere dicetur area quadrati ABCD. At area rectanguli altera parte longioris EFGH, cuius vnum latus circa rectum angulum continet 5. pedes, & alterum 3. dicetur continere 15. palmos quadratos, propterea quod ex mutua laterum 5. & 3. multiplicatione numerus 15. procreatur.

Area quadrati, & altera parte longioris quo pacto cognoſcatur.



2 ITAQVE ſi campum aliquem rectangulum, vel parallelogrammum rectangulum metiri iubeamur, menſuranda erunt per aliquam menſuram notam, vt per palmum, vel pedem, &c. duo latera circa angulum rectum. Nam vno in alterum ducto, area propoſiti campi, vel parallelogrammi rectanguli producetur, vt dictum eſt.

Vt campus rectãgulus menſuretur, quid agendum.

DE AREA TRIANGVLORVM

CAPVT II.

1 QVANDO trianguli omnia tria latera cognita ſunt, duabus viis eius area cognoſci poteſt. Prima, quæ accuratiſſima eſt, ita ſe habet. *Colligantur omnia latera in vnam ſummam: Ex huius ſummæ ſemiſſe ſubtrahantur*

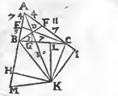
ſingula

ſingula latera, vt habeantur tres differentiæ inter illam ſemiſſem, & latera ſingula: Poſtremo tres hæ differentiæ, & dicta ſemiſſis inter ſe mutuo multiplicentur. Producti enim numeri radix quadrata erit area trianguli quæſita.

VERBI gratia, ſi latera ſint 10.17. 21. erit ſumma ex illis collecta 48. & ſemiſſis 24. Differentiæ autem inter hanc ſemiſſem, & latera erunt 14.7.3. Hæ inter ſe multiplicatæ (ducendo primum 14. in 7. deinde productum in 3.) faciunt 294. quæ ducta in 24. ſemiſſem prædictam, producunt 7056. cuius numeri radix quadrata 84. erit area dicti trianguli, cuius latera ſunt 10.17.21. Rurſus ſi in alio quopiam triangulo latera ſint 13.14.15. inueniemus eãdem aream. Nam ſumma laterum eſt 42. ſemiſſis 21. Differentiæ inter hanc ſemiſſem, & tria latera ſunt 8.7.6. quę inter ſe multiplicatæ faciunt 336. quæ ducta in 21. ſemiſſem prædictam efficiunt 7056. cuius numeri quadrata radix 84. dabit aream trianguli, quod lateribus 13.14.15. continetur. Denique ſi detur triangulum ABC, in quo latus AB, 7. BC, 10. & AC. 11. ſumma omnium eſt 28. & ſemiſſis 14. quæ latera ſuperat hiſce numeris 7.4.3. qui inter ſe multiplicati faciunt 84. quæ ducta in 14. ſemiſſem ſummæ gignunt numerũ 1176. cuius radix quadrata $34\frac{20}{69}$. fere dabit aream trianguli ABC. Ex quo colliges, non omnis trianguli aream eſſe numerum rationalem: propterea quod numerus vltimo loco productus non eſt ſemper quadratus, vt in poſtremo hoc exemplo contigit.

HANC praxim, ſiue regulam, quæ exquiſitiſſima eſt, vt dixi, ita in triangulo ABC, demonſtrabimus. Diuiſis angulis ABC, ACB, bifariam per rectas BD, CD, coeuntes in D, ducantur ex D, ad ſingula latera perpendiculares DE, DF, DG, iungaturque recta AD. Quoniam igitur duo anguli E, DBE, in triangulo DEB; æquales
a 26. prim. ſunt duobus angulis G. DBG, in triangulo DGB, & latus DB, commune; [a] erunt tam latera DE, DG, quam BE, BG, æqualia. Eodemque modo tam latera DF, DG, quam CF, CG, æqualia erunt in triãgulis DFC, DGC: ac proinde DE, DF, (cum vtraque ipſi DG, ſit oſtenſa æqualis) inter ſe æquales erunt: ideoque omnes tres perpendiculares DE, DF, DG, æquales inter ſe erunt.

b 47. prim. [b] DEINDE quia quadrato ex AD, æqualia ſunt tam quadrata ex AE, ED, quam quadrata ex AF, FD, æqualia erunt quadrata ex AE, ED, quadratis ex AF, FD; Ac proinde ablatis æqualibus quadratis rectarum ED, FD, æqualium, reliqua quadrata rectarum AE, AF, æqualia erunt: propterea que & rectæ ipſæ AE, AF, æquales erunt. Igitur cum latera AE, AD, trianguli ADE, lateribus AF, AD, trianguli ADF, æqualia ſint, & baſis ED,
c 8. primi. baſi FD; [c] erit angulus DAE, angulo DAF, æqualis.



QVIA vero AE, ipſi AF, & EB, ipſi BG, æqualis eſt oſtenſa, erit tota AB, duabus AF, BG, æqualis: additiſque æqualibus CG, CF, duæ AB, CG, duabus AC, BG, æquales erunt. Tam ergo duæ AB, CG, quam duæ AC, BG, ſemiſſem trium laterum AB, BC, AC, conſtituent. Quocirca CG vel CF, differentia erit inter ſemiſſem laterum, & latus AB. Itẽ BG, vel BE, differentia inter eandem ſemiſſem, & latus AC. Denique cum AB, CG, ſemiſſem laterum efficiant, ſitque BG, ipſi BE, æqualis, vt oſtendimus, conſtituent quoq; BC, AE, ſemiſſem eorundem laterum: ideoq; AE, differentia erit inter laterum ſemiſſem, & latus BC. Tres ergo rectæ AE, EB, CG, & ſemiſſem laterum conſtituunt, & tres differentias inter ſemiſſem laterum, & tria latera trianguli.

PRODVCTIS iam AB, AC, ſit BH, ipſi CG, & CI, ipſi BG, æqualis; ita vt tam AH, ſemiſſi laterum, rectis videlicet AB, CG, quam AI, eidem ſemiſſi laterum, rectis nimirum AC, BG, ſit æqualis, conſtetque ex tribus differentiis ante dictis. Ducta quoque HK. ad AH, perpendiculari, quæ cum AD, producta conueniat in K; connectantur rectæ KI, KB, KC. Et quia duo latera AH, AK, trianguli AHK, duobus laterib. AI, AK, trianguli AIK,
d 4. prim. æqualia ſunt, anguloſque ad A, continent æquales, vt ſupra oſtendimus, [d] æquales quoque erunt & baſes HK, IK, & anguli H, I Cum ergo H, per conſtructionem ſit rectus, rectus etiam erit I.

ABSCINDATVR præterea BL, ipſi CG, vel BH, æqualis, vt proinde reliqua CL, reliquæ BG, vel ipſi CI, æqualis ſit, iungaturque recta KL. Producta autem BH, ſumatur HM, ipſi CI, æqualis, connectaturq; recta KM. Et quia duo latera KH, HM, trianguli HMK, duobus lateribus KI, IC, trianguli CIK, æqualia ſunt, anguloſque
e 4 primi. H, I, continent æquales, vtpote rectos; [e] erunt quoque baſes KM, KC, æquales: atque adeo cum duo latera BM, BK, trianguli BMK, duobus lateribus BC, BK, trianguli BCK, æqualia ſint, (eſt namque BM, ipſi BC, æqualis,
f 8. primi. quod partes BH, HM, partibus BL, LC, ſint æquales) ſitque baſis KM, baſi KC, oſtenſa æqualis; [f] erunt quoque anguli KBM, KBC, æquales. Itaq; quoniam duo latera BH. BK, trianguli BHK, duobus lateribus BL, BK, trian-
g 4. primi. guli BLK, æqualia ſunt, æqualeſque continent angulos ad B, vt oſtendimus, [g] erunt & baſes HK, KL, & anguli H, L, æquales. Cum ergo H, ex conſtructione rectus ſit, erit quoque L, rectus. Quare cum latera KH, KB, trianguli
h 8. primi. KBH, lateribus KL, KB, trianguli KBL, æqualia ſint, & baſis BH, baſi BL, [h] erunt etiam anguli BKH, BKL, æquales.

QVONIAM autem ex iis, quæ ad prop. 32. lib. 1. Euclidis demonſtrauimus, quatuor anguli quadrilateri BHKL, quatuor rectis ſunt æquales: erunt, demptis duobus rectis H, L, duo HBL, HKL, duobus rectis æquales;
i 13. primi. ideoque duobus angulis HBL, EBL, æquales, [i] quod hi quoque duobus ſint rectis æquales, ablatoq; communi HBL, reliquus HKL, reliquo EBL, æqualis erit: ac propterea & HKB, ipſi EBD, dimidius dimidio, æqualis erit.
k 32. prim. Cum ergo & rectus H, recto E, ſit æqualis, [k] erit quoque reliquus HBK, in triangulo HBK, reliquo EDB, in tri-
l 4. ſexti. angulo EDB, æqualis; ac proinde triangula BHK, DEB, æquiangula erunt. [l] Quapropter erit vt DE ad EB, ita
m 19. prim. BH, ad HK; atque idcirco ſi lineæ hæ ad numeros contrahantur, [m] erit numerus, qui fit ex DE, in HK, æqualis
n 7. quint. numero, qui fit ex EB, in BH. [n] Eandem ergo proportionem habebit quadratus ex DE, ad productum ex DE,
o 17. ſept. in HK, & ad productum ex EB, in BH. [o] Sed ita eſt quadratus ex DE, ad productum ex DE, in HK, vt DE, ad HK: propterea quod DE, multiplicans DE, & HK, fecit & quadratum ex DE. & productum ex DE, in HK. Erit igitur quadratus quoque ex DE, ad productum ex EB, in BH, vt DE, ad HK. Vt autem DE, ad HK, ita eſt AE, ad
p 29 prim. AH. [p] Nam cum parallelæ ſint DE, HK, æquiangula erunt triangula AED, AHK, ex coroll. prop. 4. lib. 6. Euclid.
q 4 ſexti [q] Igitur erit vt AE, ad ED, ita AH, ad HK, & permutando, vt AE, ad AH, ita ED, ad HK. Igitur erit quadratus
19. ſept. quoque ex DE, ad productũ ex EB, in BH, vt AE, ad AH. [r] Quia ergo fit ex quadrato ipſius DE, in AH, æqualis

erit ei,

erit ei, qui fit ex AE, in productum ex EB, in BH. Igitur numerus, qui ex producto ex quadrato ipſius DE, in AH, multiplicato in AH, gignitur, æqualis erit numero, qui ex producto ex AE, in productum ex EB, in BH, multiplicato in eundem AH, procreatur. (Nam quia æquales numeri, nimirum productus ex quadrato ipſius DE, in AH, & productus ex AE, in productum ex EB, in BH, eundem numerum AH, multiplicant ſ habebunt producti, nimirum numerus, qui ex producto ex quadrato ipſius DE, in AH, multiplicato in AH, gignitur, & numerus, qui ex producto ex AE, in productum ex EB, in BH, multiplicato in eundem AH, procreatur, eandẽ proportionem, quam multiplicantes. Cum ergo hi æquales ſint, erunt & illi producti æquales) hoc eſt, numerus productus ex AH, in AH, id eſt, quadratus ipſius AH, ductus in quadratum ipſius DE, (per ſcholium enim propoſ. 19. lib. 8. Euclid. quomodocunque tres numeri inter ſe multiplicentur, idem ſemper numerus procreatur) æqualis erit numero, qui ex producto ex AE, in productum ex EB, in BH, nempe ex producto trium differentiarum AE, EB, BH, inter ſe multiplicatarum, ducto in AH, id eſt, in ſemiſſem laterum gignitur. At ex quadrato ipſius DE, in quadratum ipſius AH, producitur quadratus numerus areæ trianguli ABC, vt mox oſtendemus. Igitur & ex producto trium exceſſuum AE, EB, BH, inter ſe multiplicatorum, ducto in AH, ſemiſſem laterum AB, BC, AC, producitur idem quadratus numerus areæ trianguli ABC: ac proinde radix quadrata huius numeri erit dicti trianguli area: quod erat demonſtrandum.

s 18. ſepti.

QVOD autem ex quadrato ipſius DE, in quadratum ipſius AH, producatur quadratus numerus areæ trianguli ABC, in hunc modum demonſtro. Quoniam vt num. 2. oſtendemus, ex DE, in ſemiſſem lateris AB producitur area trianguli ADB; Et ex eadem DE, hoc eſt, ex DG, in ſemiſſem lateris BC, efficietur area trianguli BDC; Item ex eadem DE, id eſt, ex DF, in ſemiſſem lateris AC, gignitur area trianguli ADC: Quod autem fit ex DE, in ſemiſſes laterum AB, BC, AC, t æquale eſt ei, quod fit ex DE, in AH, ex illis ſemiſſibus conflatam: fiet propterea area trianguli ABC, ex DE, in AH; ac propterea (contractis hiſce lineis ad numeros) quadratus numerus areæ eiuſdem trianguli procreabitur ex quadrato ipſius DE, in quadratum ipſius AH. Quando enim duo numeri ſe mutuo multiplicantes fecerint aliquem, producent eorum quadrati ſe mutuo multiplicantes quadratũ illius producti, quod ita perſpicuum fiet. Duo numeri A, & B, ſe multiplicantes faciant D; & ambo ſe ipſos multiplicantes faciant C, & E. Denique hi quadrati C, & E, ſe multiplicantes faciant F. Dico F, eſſe quadratum ipſius D. Cum enim A, multiplicans ſe ipſum, & B, faciat C, & D: u erit vt A, ad B, ita C, ad D: Eademque ratione, cum B, multiplicans A, & ſe ipſum, facit D, & E, erit vt A, ad B, ita D, ad E: ideoq; C, D, E, continue proportionales erunt. x Quare qui fit ex C, in E, numerus videlicet F, æqualis erit ei, qui fit ex D, in ſe: ac proinde F, quadratus erit ipſius D. Quæ cum ita ſint, cum ex DE, in AH, producatur area trianguli ABC, vt oſtendimus, fiet ex quadrato ipſius DE, in quadratum ipſius AH, quadratus numerus areæ eiuſdem trianguli ABC. Quod erat demonſtrandum.

t 1. ſecund.

A.. B...
C....D.....E.........
F 36.

u 17. ſepti.
x 20 ſecun.

2 ALTERA via, qua ex datis lateribus area trianguli colligitur, hæc eſt.

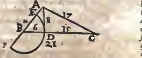
EX quouis angulo ad latus oppoſitum, etiam protractum, ſi opus eſt, perpendicularis ducatur. Hæc enim (ſi eius quantitas cognita fuerit) multiplicata in ſemiſſem baſis, ſeu dicti lateris, vel eius ſemiſſis in totam baſem producet aream trianguli, vel ſi mauis, tota perpendicularis ducta in totam baſem, numerum procreabit, cuius ſemiſſis aream trianguli efferet:

Area trianguli quo pacto aliter ex datis laterib. colligatur.

NAM vt lib. 7. propoſ. 1. demonſtrauimus, eſt area trianguli ęqualis rectangulo comprehenſo ſub perpendiculari, & ſemiſſe baſis, vel ſub ſemiſſe perpendicularis, ac tota baſe; Item ſemiſſi rectanguli ſub perpendiculari, & tota baſe comprehenſi. Cum ergo per cap. 1. huius lib. area rectanguli illius producatur ex multiplicatione vnius lateris circa angulum rectum in alterum: hoc eſt, ex perpendiculari (y quæ vni lateri æqualis eſt) in ſemiſſem baſis trianguli, vel ex ſemiſſe perpendicularis (z quæ ſemiſſi lateris eſt æqualis) in totam baſem: vel denique rectangulum trianguli duplum ex perpendiculari in totam baſem trianguli: conſtat propoſitum.

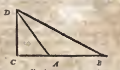
y 34. prim.
z 34. prim.

MAGNITVDO autem dictæ perpendicularis, ſicuti & baſis, in metiendis campis inueſtiganda eſt per catenulam ferream, quod hæc neque intendatur, neque remittatur, aut certe, ſi omnia latera nota ſint, Geometrice hoc modo. Sit triangulum ABC, cuius latus AB, ſit 10. & BC, 21. & AC, 17. Primum inueſtiganda ſunt ſegmenta BD, CD, inter perpendicularem, per ea, quæ lib. 1. cap. 3. Num. 9. ſcripſimus, hac ratione. Fiat vt latus BC, in quod cadit perpendicularis AD, (Semper autem eſſet demittenda perpendicularis in maximum latus, vt intra triangulum caderet) ad ſummam aliorum duorum laterum AB, AC, nimirum, vt 21. ad 27. ita differentia eorundem laterum, videlicet 7. ad aliud. Producetur enim numerus 9. (qui quoniam minor eſt latere BC, argumento eſt, perpendicularem intra triangulum cadere. Si enim maior eſſet, caderet extra, vt propoſ. 9. noſtrorum triangulorum rectil. oſtendimus) qui ablatus ex latere BC, id eſt, ex 21. relinquit 12. ſemiſſis 6. dabit minus ſegmentum BD, prope minus latus AB, quæ eadem ſemiſſis ex latere BC, ſubtracta reliquum faciet maius ſegmentum CD, nimirum 15. iuxta maius latus AC.



Segmenta baſis, quæ à perpendiculari abſcinduntur quo pacto cognoſcantur.

SIT rurſus triangulum ABD, cuius latus AB, 12. AD, 11. & BD, 20. demittenda autem ſit perpendicularis ex D, ad AB. Fiat, vt latus AB, 12. ad ſummam aliorum duorum 31. ita differentia eorundem, nimirum 9. ad aliud. Producetur enim numerus $23\frac{1}{4}$. (qui quoniam maior eſt latere AB, argumento eſt, perpendicularem cadere extra triangulum, angulumque A, eſſe obtuſum,) ex quo latus AB, 12. ſubtractum, relinquit, $11\frac{1}{4}$. Huius autem numeri ſemiſſis $5\frac{5}{8}$. dabit ſegmentum exterius AC, inter perpendicularem, & angulum obtuſum: eademque ſemiſſis addita lateri AB, efficiet aliud ſegmentum BC, inter perpendicularem, & angulum acutum $17\frac{5}{8}$. Atque hæc ratio expeditiſſima eſt.



ALITER

ALITER. Sit ducenda perpendicularis ad maximum latus BC, in priori triangulo ABC, quæ neceſſa-
a 18 prim. rio cadet intra triangulum; [a] propterea quod angulus A, maior eſt vtrolibet BC; ac proinde vterq; horum acu-
b 13 ſecun. tus eſt. [b] Quoniam autem quadratum rectæ AB, minus eſt quadratis rectarum AC, BC, rectangulo bis compre-
henſo ſub BC, & ſegmento CD, inter C, & perpendicularem: ſi quadratum rectę AB, 100. detrahatur ex ſumma
quadratorũ rectarũ AC, BC, id eſt, ex 730. reliquum fiet rectangulũ 630. bis comprehenſum ſub BC, ſegmento
CD, inter C, perpẽdicularẽ. Quare eius ſemiſſis 315. æqualis erit rectangulo illo ſemel ſumpto: ac proinde hoc re-
ctangulo 315. diuiſo per latus BC, 21. dabit Quotiens 15. ſegmentũ CD, prope angulum acutũ C, cui opponitur
latus AB, cuius quadratum ex ſumma reliquorum quadratorũ detractum fuit. Ablato autẽ ſegmento CD, 15. ea
c 13 ſecun. latere BC, 21. remanebit alterum ſegmentum BD, 6. Eodem pacto, [c] quia quadratum rectæ AC, minus eſt qua-
dratis rectarum AB, BC, rectangulo bis comprehenſo ſub CB, & ſegmento BD, inter B, & perpendicularem:
ſi quadratum rectæ AC, 289. ſubducatur ex ſumma 541. quadratorum rectarum AB, BC, reliquum fiet rectan
gulum 252. comprehenſum bis ſub CB, & ſegmento BD, inter B, & perpendicularem. Quare eius ſemiſſis 126.
æqualis erit illi rectangulo ſemel ſumpto: ac proinde hoc rectangulo 126. diuiſo per latus CB, 21. dabit Quotiens
6. ſegmentum BD, iuxta acutum angulum B, cui latus AC, quadrati ex duobus alijs quadratis detracti opponi-
tur. Quo ſegmento 6. dempto ea latere BC, 21. remanebit alterum ſegmentum CD, 15.

DEINDE in poſteriori triangulo ABD, ducenda ſit perpendicularis ad latus AB, nõ maximum. Et quia
d 18. prim. latus DB, latere AD, maius eſt; [d] erit angulus A, maior angulo B. [e] Cum ambo ergo ſimul ſint duobus rectis mi-
e 17. prim. nores, erit ſaltem minor B, acutus: [f] ac proinde quadratum rectæ AD, minus erit quadratis rectarum AB, BD.
f 13. ſecun. rectangulo bis comprehenſo ſub latere AB, & ſegmento inter B. & perpendicularem. Si ergo quadratum rectæ
AD, 121. ſubtrahatur ex ſumma quadratorum rectarum AB, BD, id eſt, ex 544. reliquum fiet rectangulum bis
comprehenſum ſub AB, & ſegmento inter B, & perpendicularem, nimirum 423. ideoque eius ſemiſſis $211\frac{1}{2}$. æ-
qualis erit illi rectangulo ſemel ſumpto. Quare ſi rectangulum hoc $211\frac{1}{2}$. diuidatur per latus AB, 12. dabit Quo-
tiens $17\frac{5}{8}$. ſegmentum inter B, & perpendicularem: quod quia maius eſt latere AB, argumento eſt, perpendicu-
larem DC, cadere extra triangulum: ac proinde angulum A, obtuſum eſſe. Quod ſi ex hoc ſegmento $17\frac{5}{8}$. dema-
tur latus AB, 12. remanebit exterius ſegmentum $5\frac{5}{8}$.

QVANDO conſtat, angulum A, eſſe obtuſum, ideoque perpendicularem DC, extra triangulum ca-
g 12. ſecun. dere, reperiemus eadem ſegmenta BC, CA, hoc etiam modo. [g] Quoniam quadratum lateris BD, ſuperat qua-
drata laterum AB, AD, rectangulo bis comprehenſo ſub latere AB, & ſegmento exteriore AC; ſi ſumma qua-
dratorum rectarum AB, AD. 265. detrahatur ex quadrato lateris BD, 400. reliquum erit rectangulum 135. bis
comprehenſum ſub AB, AC: & eius ſemiſſis $67\frac{1}{2}$. illi rectangulo ſemel ſumpto æqualis erit; ac proinde hoc re-
Qua ratio ctangulo $67\frac{1}{2}$. diuiſo per latus AB, 12. indicabit quotiens $5\frac{5}{8}$. ſegmentum exterius CA, cui ſi addatur la-
tenen- tus AB, 12. conflabitur ſegmentum BC, $17\frac{5}{8}$. Sed prior ratio, quæ ea 2. lib. Eucl. non pendet, expeditior, ac proin-
da in ſe- de tenenda: quamuis auctores alij poſteriorem viam plerunque ſequantur.
gmentis INVENTIS ſegmentis a perpendiculari factis, ita magnitudinem perpendicularis cognoſcemus.
exquiren- *DIFFERENTIA inter vtrumuis ſegmentum, & latus adiacens ducatur in ſummam ex eodem ſegmento & latere*
dis. *conflatam. Radix enim quadrata numeri producti perpendicularem exhibebit notam, vt libro primo, capite tertio, numero*
decimoſeptimo demonſtrauimus.

Perpendi- Verbi gratia. In priori triangulo ABC, ſi differentia 4. inter ſegmentum BD, & latus AB, hoc eſt, inter 6.
cularis in & 10. multiplicetur per 16. nempe per ſummam eiuſdem ſegmenti BD, & lateris AB, gignetur numerus 64. cu-
triangulo ius radix quadrata 8. dabit perpendicularem AD. Pari ratione ſi differentia 2 inter ſegmentum CD, & latus AC
quo pacto hoc eſt, 15. & 17. ducatur in 32 id eſt in ſummam eiuſdem ſegmenti CD, & lateris AC: procreabitur numerus 64.
reperia- cuius radix quadrata 8. præbebit perpendicularem AD, vt prius.
tur.

IN poſteriori autem triangulo ABD, ſi differentia $5\frac{3}{8}$ inter ſegmentum AC, & latus AD, nimirum inter
$5\frac{5}{8}$ & 11. ducatur in $16\frac{5}{8}$. hoc eſt in ſummam eiuſdem ſegmenti AC, & latus CD: producetur nu-
merus $\frac{5719}{64}$. ſiue $89\frac{23}{64}$. cuius radix quadrata in numeris exhiberi nõ poteſt, ſed paulo maior eſt,
quam appoſita fractio cuius numerator eſt $75\frac{94}{151}$. denominator autem 8. quæ ad hunc nume-
rum $9\frac{547}{1208}$. reducetur, ſi numerator per denominatorem diuidatur: atque tanta eſt ferme per-
pendicularis DC, nimirum $9\frac{547}{1208}$. Sic etiam ſi differentia $2\frac{3}{8}$. inter ſegmentum BC, $17\frac{5}{8}$. & latus
BD, 20. multiplicetur per $37\frac{5}{8}$. ſummam eiuſdem ſegmenti BC, & latus BD, gignetur idem numerus, qui prius,
$\frac{5719}{64}$. hoc eſt, $89\frac{23}{64}$. cuius radix quadrata paulo maior eſt, quam $9\frac{547}{1208}$. veluti prius. Atque hæc ratio ſatis expe-
dita eſt.

$75\frac{94}{151}$
8

h 47. prim. ALITER. [h] Quoniam quadratum rectæ AB, in priori triangulo ABC, æquale eſt duobus quadratis re-
ctarum AD, BD: ſi quadratum 36. ſegmenti BD, tollatur ex 100. quadrato lateris adiacentis AB, relinquetur
quadratum 64. perpendicularis AD. Radix ergo eius quadrata 8. erit magnitudo perpendicularis AD, vt ſupra.
Similiter ſi quadratum 225. ſegmenti CD, dematur ex 289. quadrato lateris adiacentis AC, reliquum fiet qua-
dratum 64. perpendicularis AD, cuius radix 8. magnitudo erit perpendicularis AD, vt prius.

IN triangulo vero poſteriori ABD, ſi quadratum $31\frac{41}{64}$. ſegmenti AC, $5\frac{5}{8}$. ſubtrahatur ea 121. quadrato late-
ris adiacentis AD, 11. remanebit quadratum $89\frac{23}{64}$. perpendicularis DC, cuius radix eſt paulo maior quam $9\frac{547}{1208}$.
vt ſupra. Sic etiam ſi quadratum $310\frac{41}{64}$. ſegmenti BC, $17\frac{5}{8}$. ſubtrahatur à quadrato 400. lateris adiacentis BD, 20.
Qua via remanebit rurſus quadratum $89\frac{23}{64}$. perpendicularis DC, cuius radix paulo maior eſt quam $9\frac{547}{1208}$. vt ſupra. Ve-
inueſtigan- rum prior ratio magis expedita videtur, quanquam alij poſteriorem hanc viam tradant.
da perpen- IN triangulo porro æquilatero perpendicularis hoc alio modo inuenietur. [i] Quoniam quadratum lateris
dicularis ſeſquitertium eſt quadrati perpendicularis: ſi fiat vt 4. ad 3. ita quadratum lateris ad aliud, proueniet quadratum
ſit expedi- perpendicularis. Radix ergo huius quadrati notam exhibebit perpendicularem. Vt ſi latus eſt 10. & fiat vt 4. ad
tior. 3. ita 100. quadratum lateris ad aliud, gignetur quadratum perpendicularis 75. cuius radix $8\frac{11}{17}$. proxime erit per-
i 12. quar- pendicularis quæſita.
tidecim.

DENIQVE inuentis ſegmentis baſis à perpendiculari factis, perpendicularis ipſa per ſinus ita fiet cogni-
ta in priori triangulo. Fiat vt 10. latus AB, recto angulo oppoſitum ad ſinum totum recti anguli D; ita 6. ſegmen-
tum BD,

tum BD, ad aliud; producetur que ſinus anguli oppoſiti BAD, 60000. Ergo angulus BAD, erit grad. 36. Min. 52. ac proinde angulus B, eius complementum erit grad. 53. Min. 8. Si ergo rurſus fiat, vt ſinus totus ad 10. latus AB: ita 80003. ſinus anguli BAD, ad aliud, procreabitur latus AD, hoc eſt, perpendicularis $8\frac{30}{100000}$. ferme, quę paulo maior eſt, quam 8. ſupra inuenta. quod diſcrimen oritur ex eo, quod ſinus non ſunt omnino tales, quales in tabula deſcribuntur: quod tamen in menſuratione camporum non inducit ſenſibilem admodum errorem.

ITAQVE ſi in priori triangulo ABC, perpendicularis AD, 8. ducatur in $10\frac{1}{2}$. ſemiſſem baſis BC, vel 4. ſemiſſis perpendicularis AD, in 21. totam baſem, procreabitur area trianguli ABC, 84. Quæ etiam producetur, ſi tota perpendicularis 8. in totam baſem 21. multiplicetur, & producti numeri 168. ſemiſſis accipiatur 84. *Area prioris trianguli ABC*

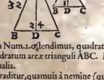
ITEM in poſteriori triangulo ABD, ſi perpendicularis DC, $9\frac{517}{1058}$. ducatur in 6. ſemiſſem baſis AB, vel ſemiſſis perpendicularis, nimirum $\frac{10039}{2116}$. vel $4\frac{1575}{2116}$ in totam baſem 12. cōficietur area trianguli ABD, $56\frac{986}{1058}$. vel $56\frac{493}{529}$. Quæ etiam producetur, ſi tota perpendicularis in totam baſem ducatur, & producti capiatur ſemiſſis. *Area poſterioris trianguli ABD.*

VT autem fractiones, quoad eius fieri poteſt, vitentur, curabis, vt quando perpendicularis eſt numerus par, & baſis numerus impar, accipias ſemiſſem perpendicularis, eamque in totam baſem ducas: quando vero perpendicularis eſt numerus impar, & baſis numerus par, ſumas ſemiſſem baſis, eamque ducas in totam perpendicularem. Quod ſi tam perpendicularis, quam baſis fuerit numerus par, vel impar, nihil intereſt, vtrius ſemiſſem capias. *Vt fractiones vitentur quid agendum.*

QVANDO etiam perpendicularis eſt radix ſurda, quæ videlicet numero exprimi nequeat, qualis fuit DC, in poſteriori triangulo ABD, recte feceris, ſi eius quadratum (non extracta radice illa ſurda) multiplices per quadratum ſemiſſis baſis. Numerus enim productus erit quadratus numerus areæ trianguli; adeo vt radix eius ſit ipſa trianguli area. Hac enim ratione minus à vero aberrabimus. Vt in dicto poſteriori triangulo ABD, ſi quadratum perpendicularis DC, $\frac{5762}{64}$. ducamus in 36. quadratum ſemiſſis baſis, producemus $\frac{207432}{64}$. quadratum areę, cuius radix eſt $56\frac{[illegible]}{[illegible]}$. area videlicet trianguli ABD, paulo maior, quā prius inuenta. Pari ratione, ſi in aliquo triangulo quadratum perpendicularis foret 72. & ſemiſſis baſis 6. ſi radicem numeri 72. nimirum $8\frac{8}{17}$. hoc eſt, ipſam perpendicularem, ducamus in 6. producemus aream $50\frac{14}{17}$. At ſi ipſummet quadratum 72. multiplicemus per 36. quadratum videlicet ſemiſſis baſis, procreabimus 2592. quadratum areæ, cuius radix paulo maior eſt, quam $50\frac{92}{101}$. qui numerus aliquanto maior eſt, quam area prius inuenta $50\frac{14}{17}$. Ratio huius noſtræ regulæ eſt, quòd, vt paulò ante ad finem Num. 1. demonſtrauimus, duo numeri ſeſe multiplicantes producant radicem numeri ex eorum quadratis producti. *Quid agendum, quando perpendicularis eſt numerus ſurdus.*

3. EXPOSITIS duabus regulis generalibus, per quas trianguli cuiuslibet area ex cognitis lateribus inueſtigatur, proponemus nunc particularia quædam præcepta pro particularibus triangulis nonnullis, quæ nonnunquam magno vſui erunt, cum per ea ſæpenumero expeditius in aliquibus triangulis areæ reperiantur, quam per illas generales regulas. Area ergo trianguli rectanguli producetur, ſi duo latera circa rectum angulum inter ſe multiplicentur, & numeri producti ſemiſſis capiatur. Nam ex multiplicatione illa gignitur parallelogrammū rectangulum ſub duobus lateribus circa angulum rectū comprehenſum, vt cap. 1. dictum eſt,[a] cuius rectanguli triangulum ſemiſſis eſt. Quod perinde eſt, ac ſi ſemiſſis vtriuſuis lateris in totum alterū, tanquam in baſem, multiplicetur. Vt in præcedenti triangulo ABC, diuiſo in duo triangula rectangula ADB, ADC; ſi AD, 8. ducatur in BD, 6. producetur numerus 48. cuius ſemiſſis 24 erit area trianguli ADB. Sic ſi AD, 8. ducatur in DC, 15. fiet numerus 120. cuius ſemiſſis 60, erit area trianguli ADC: vbi vides, duo triangula 24. & 60. componere totum triangulum ABC, 84. vt ſupra inuenimus. *Area trianguli rectanguli.* *a 41. primi*

4 AREA trianguli Iſoſcelis, vel etiam æquilateri, procreabitur, ſi quadratum ſemiſſis baſis ex quadrato lateris auferatur, & reliquus numerus in idem quadratum ſemiſſis baſis ducatur, ac deniq; huius producti radix quadrata eruatur. Vt in Iſoſcele ABC, cuius æqualia latera AB, AC, ſint 32. 32. & baſis BC, 24. ſi quadratum 144. ſemiſſis baſis dematur ex 1024. quadrato lateris AC, vel AB, & reliquus numerus 880. ducatur in 144. quadratum ſemiſſis baſis, erit producti 126720. radix quadrata $355\frac{690}{711}$. (quæ paulo minor eſt vera radice) area trianguli ABC. Nam ſi quadratum ſemiſſis baſis DC, auferatur ex quadrato lateris AC,[b] reliquum fit quadratum perpendicularis AD, quod ex ſcholio propoſ. 26. lib. 1. Euclid. perpendicularis AD, baſem BC, ſecet bifariam in D, Quare vt circa finem Num. 2. oſtendimus, quadratum perpendicularis AD, ductum in quadratum DC, ſemiſſis baſis producet quadratum areæ trianguli ABC. Eademq; ratio eſt in triangulo æquilatero, cum hoc habeat etiam duo latera æqualia. *Area trianguli Iſoſcelis.* *b 47. primi.*



5 Pro area tamē trianguli æquilateri hæc etiam regula ab auctoribus traditur, quamuis à nemine (quod ſciam) demonſtrata ſit. Quadratum lateris ducatur in 13. productuſque numerus per 30. diuidatur. Quotiens enim erit area trianguli æquilateri. Vt ſi vnum latus æquilateri trianguli ſit 10. ducatur quadratum lateris 10. nimirū 100. in 13. productuſque numerus 1300. per 30. diuidatur. Quotiens enim $43\frac{1}{3}$. erit area trianguli. Hanc regulam ita demonſtro. Area trianguli æquilateri, cuius ſingula latera ſunt 1. eſt radix quadrata huius numeri $\frac{3}{16}$. (Nam per regulam præcedentem Num. 4. explicatam, ſi $\frac{1}{4}$ quadratum ſemiſſis lateris dematur ex 1. quadrato lateris, & reliquus numerus $\frac{3}{4}$. ducatur in idem quadratum $\frac{1}{4}$. ſemiſſis lateris, producetur quadratum areæ trianguli $\frac{3}{16}$.) nimirum $\frac{13}{30}$. proxime. Cum ergo quadratum lateris 1. ad quadratum lateris 10. hoc eſt, 1. ad 100. eandem proportionem habeat, quam area $\frac{13}{30}$. trianguli, cuius vnum latus eſt 1. ad aream trianguli, cuius vnum latus eſt 10.[c] quod vtraque proportio proportionis lateris 1. ad latus 10. ſit duplicata: ſi fiat vt 1. (quadratum lateris 1.) ad 100. (quadratum lateris 10.) ita area $\frac{13}{30}$. ad aliud, producetur area trianguli, cuius vnum latus eſt 10. Hoc autem fit, ducendo ſecundum numerum 100. in tertium $\frac{13}{30}$. hoc eſt, (vt conſtat ex regula multiplicationis fractorum, ducendo 100. in numeratorem 13. & productum per denominatorem 30. diuidendo. Neq; vero opus eſt productum hunc numerum $43\frac{1}{3}$. per primum 1. partiri, cum vnitas diuidens, aut multiplicans quemcunque numerum producat numerum eundem. Sic etiam ſi latus vnū trianguli æquilateri ſit 6. ducemus eius quadratū *Area trianguli æquilateri.* *c 20. & 19 ſexti.*

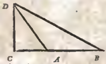
36.in $\frac{13}{30}$.hoc eſt,in 13.numeratorem,productumq; 468.per 30.partiemur. Quotiens namque $15\frac{3}{5}$.erit trianguli propoſiti area.

Radix quadrata numeri fracti quo pacto eruatur. QVOD autem $\frac{13}{30}$.ſit radix quadrata numeri $\frac{3}{16}$.patet ex regula, qua cuiuſuis fracti numeri radix extrahitur:quæ talis eſt.Numerator in denominatorem ducatur, & producti radix propinqua inueniatur. Si enim per hanc radicem diuidemus numeratorem:vel ipſam radicem per denominatorem partiemur;exibit radix fractionis propoſitæ:priori quidem modo maior quam vera,poſteriori autem minor,ſi radix illa propinqua producti ex numeratore in denominatorem fuerit minor quam vera:quia in priori illo modo fit diuiſio,per numerum vero minorē,in poſteriori autē numerus vero minor diuiditur. Quod ſi radix illa propinqua foret maior, quam vera,produceretur priori modo radix fractionis minor,quam vera,poſteriori aūt maior,vt liquet. Verbi gratia.Inuenienda ſit radix quadrata fractionis $\frac{3}{16}$.quam diximus eſſe quadratum areæ trianguli æquilateri,cuius vnum latus eſt.1. ex 3.in 16.fit numerus 48. cuius radix propinqua $6.\frac{12}{13}$. minor quam vera,per quam ſi diuidatur numerator 3 prodibit radix $\frac{13}{30}$.fractionis $\frac{3}{16}$.maior, quam vera:at ſi radicem eandem propinquam $6\frac{12}{13}$. partiamur per denominatorem 16.reperietur radix $\frac{45}{104}$.eiuſdem fractionis $\frac{3}{16}$.minor, quam vera. Ratio huius extractionis vero hæc eſt. *d 20. sep.* Quando numerator 3.denominatorem 16.multiplicat,[d] erit producti 48.radix quadrata medio loco proportionalis inter 3. & 16. quod radix in ſe ducta producat numerum 48. æqualem ei, qui ab extremis 3.& 16.inter ſe multiplicatis gignitur:ac proinde proportio 3.ad 16.erit duplicata tam proportionis 3. *e 11 octaui* ad illam radicē,quam illius radicis ad 16.[e] Cum ergo proportio 3. ad 16.ſit quoq; duplicata proportionis,quam radix numeri 3.ad radicem numeri 16.habet:erit vt 3.ad radicem producti 48. Vel vt radix huius producti ad 16.ita radix numeri 3.ad radicem numeri 16. Quapropter cum fractio, cuius numerator eſt radix numeri 3.denominator autem radix numeri 16.ſit radix fractionis $\frac{3}{16}$.erit quoque tam fractio, cuius numerator 3. & denominator radix producti 48.quam fractio cuius numerator radix producti 48. denominator autem 16. hoc eſt, tam Quotiens,qui fit ex diuiſione 3.per radicem producti 48. quam quotiens, qui fit ex diuiſione radicis producti 48.per 16.radix propinqua fractionis $\frac{3}{16}$. Eademq; de cæteris ratio eſt.

ALII hanc tradunt regulam ad aream trianguli æquilateri inueniendam. Ex quadrato lateris ſumatur tam pars decima, quam tertia.Harum enim partium ſumma erit area trianguli. Quod ſic oſtendo.Hæ fractiones $\frac{1}{10}$.& $\frac{1}{3}$.in vnam collectæ ſummam efficiunt $\frac{13}{30}$.ac proinde idem eſt ex quadrato lateris auferre $\frac{1}{10}$.& $\frac{1}{3}$.atque $\frac{13}{30}$.Sed quando auferuntur $\frac{13}{30}$.multiplicatur quadratum lateris per $\frac{13}{30}$.vt in 6.quæſtiuncula fractorum docui. Igitur cum vt Num.5.explicatum eſt,ex multiplicatione quadrati lateris in $\frac{13}{30}$.producatur area trianguli æquilateri,liquido conſtat,partem decimam,& partem tertiam quadrati lateris conficere eandem aream. Itaque ſi latus ſit 30.erit eius quadratum 900.cuius $\frac{1}{10}$.eſt 90.& $\frac{1}{3}$. eſt 300.quæ partes ſimul conficiunt numerum 390.pro area illius trianguli æquilateri.

Area trianguli rectanguli ex latere quod recto angulo opponitur, & vno angulo acuto cognito, quo pacto inueſtigetur. 6 HACTENVS expoſuimus regulas,quæ nos in cognitionem areæ cuiuſcunque trianguli ducūt, ſi ſingula latera cognita ſint.Nunc triangulorum areas per doctrinam ſinuum, Tangentium,ſecantiumque inueſtigabimus,licet non omnia latera ſint cognita,ſed vnum duntaxat, vel duo, vna cum duobus angulis, vel vno.In triangulis ergo rectangulis ita procedemus.

QVANDO in triangulo rectangulo latus ergo angulo oppoſitum cognitum eſt,cum vno angulo acuto cognoſcemus aream hoc modo. Detracto angulo acuto dato ex recto,id eſt,ex grad.90.relinquetur alter acutus angulus etiam notus. Vt in triangulo DCB, habente angulum rectum C, & latus BD,notum, vna cum angulo acuto B.[f] Et quoniam duo B, & BDC, vni recto, id eſt, gradibus 90. ſunt æquales, ſi angulus B, ex grad.90.detrahatur,reliquus fiet angulus BDC. Si ergo fiat, vt ſinus totus anguli recti C,ad oppoſitum latus BD, in qualibet menſura cognitum ; ita tam ſinus anguli B , quàm anguli BDC,ad aliud,[g] nota fient latera DC, & CB, in partibus lateris BD , atque ita omnia tria latera cognita erunt.Ergo & area cognoſcetur vel ex Num.1.huius cap. vel ex Num.3.



f 32. primi. *g 2. triang. rectil.*

ITAQVE ſi campus menſurandus triangularis eſt habens vnum angulum rectum, ſatis erit, ſi ſumma diligentia latus recto angulo oppoſitum menſuretur,& inſuper vnus angulus acutus, beneficio alicuiꝰ quadrantis in gradus diuiſi, qualis eſt à nobis conſtructus cap.2.lib.1.Nam ex his cognitis,vt proxime diximus, tota area trianguli cognoſcetur,etiamſi ad alia duo latera accedere non poſſimus.

h 3. triang. rectil. *Area trianguli rectanguli ex vno latere circa angulum rectum, & latere quod recto angulo opponitur.* QVANDO in eodem triangulo rectangulo BDC, alterutrum latus datur circa angulum rectum vna cum latere,quod recto angulo opponitur,nimirum ſi DC,& DB,cognita ſunt,[h] cognoſcetur quoque alterum latus BC,ſi fiat,vt latus DB,angulo recto oppoſitum ad ſinum totum anguli recti C,ita latus datum DC, ad aliud.Productus enim numerus erit ſinus anguli B,quo cognito ex tabula ſinuum , cognitus etiam erit eius complementum BDC.Si ergo rurſus fiat,vt ſinus totus anguli recti C,ad latus oppoſitum datum DB,ita ſinus anguli BDC,inuenti ad aliud,exibit latus oppoſitum BC.Ex duobus igitur lateribus DC,CB,cognitis,area trianguli nota fiet ex ijs.quæ Num 3.paulo ante ſcripſimus.

ATQVE ita in campo,ſi detur portio triangularis,habens angulum rectum;ſatis eſt , ſi diligenter metiretur vnum latus circa angulum rectum, vna cum latere, quod recto angulo opponitur, etiamſi ad tertium latus non pateat acceſſus.Ex illis enim duobus area cognoſcetur,vt dictum eſt.

i 4. triang. rectil. *Area trianguli rectanguli ex vno latere circa angulum rectū & vno angulo acuto.* QVOD ſi in eodem triangulo BDC,notum fuerit vnum latus circa rectum angulum,videlicet DC, vna cum alterutro angulo acuto, vtpote cum B , [i] notum efficietur alterum latus CB:ſi fiat , vt ſinus totus ad datum latus DC:Ita Tangens anguli BDC,quæſito lateri CB,oppoſiti,(cognoſcetur autē alter hic angulus BDC, ſi angulus B, ex gradibus 90.demarur)ad aliud.Nam inuentus numerus dabit latus CB,quæſitum. Vel ſi fiat,vt ſinus anguli B. dato lateri DC,oppoſiti ad latus datum DC:Ita ſinus alterius anguli BDC, ad aliud. Nā rurſus produceretur latus quæſitum BC.Ex duobus ergo lateribus DC,CB,aream cognoſcemus , vt Num. 3. traditur.

IN Campo ergo aliquo;ſi proponatur portio triangularis angulum habens rectum,ſatis erit vnum latus circa rectum angulum,& vnum angulum acuti metiri,vt eius trianguli area reperiatur,etiamſi ad alia duo latera acceſſus denegetur.Atque hæc de rectangulis triangulis,veniamus iam ad obliquangula.

7 Si

Digitized by Google

7 SI ergo in triangulo non rectangulo ABD, notum ſit vnum latus, cum duobus angulis quibuſcunque; perueniemus in cognitionem areæ hoc modo. Ex duobus angulis cognitis erit quoque tertius, cum ſit complementum aliorum duorum ad gr. 180. [e] Igitur alia duo latera cognoſcentur: ac proinde ex tribus lateribus cognitis area fiet nota ex iis, quæ Num. 1. & 2. tradita ſunt.

VT ergo campus triangularis nullum habens angulum rectum cognitus fiat, ſatis erit, ſi vnum latus cum duobus angulis accurate menſuretur. Ex iis enim duo reliqua latera nota efficientur. &c. vt dictum eſt.

RVRSVS ſi in eodem triangulo ABD, non rectangulo nota ſint duo latera, vna cum angulo ab ipſis comprehenſo; [f] inuenietur tertium latus: ac proinde, vt prius, ex omnibus tribus lateribus area trianguli efficietur cognita.

ITAQVE ſatis erit, ſi in campo quouis triangulari duo latera, vna cum angulo ab ipſis comprehenſo menſurentur: vt area ipſius nota reddatur.

e 10. triang. rectil. *Area trianguli obliquanguli ex vno latere & duobus angulis.* *f 12. triang. rectil.* *Area trianguli obliquanguli ex duobus lateribus & angulo ab iis comprehenſo.*

8 NEQVE vero hoc omittendum videtur: ſi videlicet vnũ latus trianguli, vel cuiuſuis figuræ rectilineæ in partes quotlibet æquales ſecetur, reliqua latera in eiſdẽ partibus fieri poſſe cognita, beneficio inſtrumẽti partium vt ad finem Num. 1. cap. 1. lib. 1. declarauimus. Verum vt magis exquiſitè reperiantur, inquirendum erit fragmentum vltimæ particulæ (ſi quod ſuperfuerit) in partibus milleſimis, per ea, quæ Num. 14. cap. 2. lib. 1. docuimus. Ita enim in dimenſionibus figurarum minus à vero aberrabimus.

Diuiſo vno latere figuræ in quotuis partes æquales, quo pacto alia latera in eiſdem partibus fiant nota.

9 NEMINEM autem moueat, aut perturbet, quod rectas dixerimus metiendas eſſe nonnunquam mechanice per catenulam aliquam ferream, aut per inſtrumentum partiũ. Nam in hoc dimetiendi negotio, præſertim in campis, & agris admittenda omnino eſt huiuſmodi mechanica linearum dimenſio, tum quia apud omnes agrimenſores hic mos eſt: tum quia non ſemper via Geometrica id præſtare poteſt; tum vero maxime, quia in dimenſionibus agrorum, ſiue figurarum ſatis eſt rem prope verum attingere, dummodo notabilis error non committatur. Quod ſi hæc dimenſio quarundam linearum alicui non probetur, is profecto è medio tollat, neceſſe eſt omnem agrorum, figurarumue dimenſionem. Vnde enim conſtat, agrum propoſitum, vel figuram habere latera cognita, niſi hæc ipſa per menſuram aliquam materialem ſint exploratа? Si igitur laterum dimenſio mechanica, tanquam à vero parum aberrans, ab omnibus vſurpatur, cur eam in lineis intra figuras metiendis reiiciendam cenſeamus, non video. Non nego tamẽ, viam Geometricam, quando fieri poteſt, adhibendam eſſe. In figuris quoque, vbi latera non ſunt nimis magna, vtendum cenſeo doctrina, quam in inſtrumento partium lib. 1. cap. 1. ad finem Num. 2. tradidimus, nõ neglectis etiam iis, quę in eodem lib. 1. cap. 2. Num 14. de quauis particula lineæ cognoſcenda, in partibus ſaltem milleſimis, ſcripſimus, quod hac ratione vix à vero quis aberrare poſſit.

IDEM de mechanica angulorum dimenſione per quadrantem intelligendum eſt: præſertim ſi præter gradus inueſtigentur quoque minuta, vt lib. 1. cap. 2. docuimus.

In negotio dimenſionum admittendam eſſe in nonnullis lineis & angulis mechanicam menſurationem.

DE AREA QVADRILATERORVM NON RECTANGVLORVM.

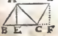
CAPVT III.

1 TRIA ſunt genera quadrilaterarum figurarum, quæ vel nullum angulum rectum habent, vel certe non omnes rectos: Rhombus, Rhomboides, & Trapezium. Primæ duæ figuræ nullum habent angulum rectum: poſterior autem poteſt habere vel vnũ rectum, vel duos, vel etiam nullum: Item duo latera oppoſita parallela, vel non parallela. Rhombi & Rhomboidis, quorum latera nota ſint, area producitur ex ductu perpendicularis in latus, in quod perpendicularis cadit. Ita vt magnitudo perpendicularis accurate ſit prius exploranda vel per inſtrumentum partium initio huius operis conſtructi, vt paulo ante cap. 2. Num. 8. monuimus, vel alio modo, vt mox dicam. Verbi gratia, in Rhombo & Rhomboide ABCD, producetur area ex multiplicatione perpendicularis AE, in latus BC, [g] Nam rectangulum AF, ſub AE, & AD, comprehenſum æquale eſt parallelogrammo BD, quòd hæc duo parallelogramma ſint inter parallelas AD, BC, & ſuper eandem baſem AD. Itaque fruſtra alii præcipiunt, vt diameter ducatur AC, & beneficio perpendicularis AE, area trianguli ABC, inquiratur, quod hæc duplicata aream exhibeat totius parallelogrammi: [h] quippe cum triangulum ABC, ſemiſſis ſit parallelogrammi. Fruſtra, inquam, hoc præcipiunt, cum expeditius area inueniatur ſi perpendicularis in totum latus BC, ducatur, quam ſi in ſemiſſem multiplicetur, ac productus deinde numerus dupletur.

Rhombi & Rhomboidis area.



g 35. primi

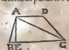


h 34. primi.

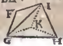
SI per quadrantem cap. 2. lib. 1. conſtructum inueſtigetur quantitas anguli B, reperietur perpendicularis AE, per ſinus, hac ratione. Fiat vt ſinus totus anguli recti E, ad latus oppoſitum AB, ita ſinus anguli B, ad aliud. [i] Productus enim numerus erit perpendicularis AE, cognita in partibus lateris dati AB.

Perpendicularis inuentio. *i 2. triang. rectil.*

2 TRAPEZII, in quo duo latera oppoſita ſint parallela AD, BC, & omnia latera nota, area producitur ex perpendiculari AE, inter duo latera parallela multiplicata in ſemiſſem ſummæ ex lateribus parallelis conflatæ. Nam ducta diametro AC, area trianguli ABC, producitur ex perpendiculari AE, in ſemiſſem baſis BC, vt cap. 2. Num. 2. dictum eſt: Item area trianguli ACD, ex eadem perpendiculari AE, in ſemiſſem baſis AD: Ac proinde hæ duæ areæ ſimul aream totius Trapezii ABCD, conficient. [k] Cum igitur idem fiat ex AE, in ſummam ex ſemiſſe rectæ BC, & ex ſemiſſe rectæ AD, conflatam, id eſt, in ſemiſſem rectarum BC, AD, ſimul: quod ex AE, in ſemiſſem lateris BC, & ex AE, in ſemiſſem lateris AD, liquido conſtat, aream Trapezii gigni ex perpendiculari AE, in ſemiſſem ſummæ laterum AD, BC. Atque hæc ratio locum etiam habet in Trapezio habente vnum angulum rectũ, vel duos rectos.



Area trapezii habentis duo latera parallela. *k 1. ſecũdi*



PERPENDICVLARIS vero AE, inuenietur, vt in Rhombo, & Rhomboide diximus, duobus modis, ſi per quadrantem angulus B. inueſtigetur, &c.

Area trapezij nullis habentis latera parallela.

IN Trapezio autem FGHI, in quo nulla ſunt latera parallela, omnia tamen latera ſunt nota, menſuranda primum eſt diameter IG, per inſtrumentum partium. Deinde vtriuſque trianguli FGI, GHI, area inuenienda, vt cap. 2. Num. 1. & 2. tradidimus. Ambæ enim areæ ſimul conficient aream totius Trapezij

e 2. triãg. rectil. Nu. 2.

QVOD ſi malueris angulum F, vel H, per quadrantem inuenire, cognoſcemus diametri GI, magnitudinem, per doctrinam Sinuum, ac Tangentium, [e] vt lib. 1. cap. 3. docuimus, ex duobus lateribus FG, FI, & angulo F, ab ipſis comprehenſo, vel ex duobus lateribus HG, HI, & angulo H, quem continent.

Area figuræ quadrilateræ irregularis.

3 NON aliter aream conſequemur cuiuſcunque quadrilateri irregularis, etiamſi non habeat omnes angulos introrſum, ſicut Trapezium. Vt ſi in Trapezio FGHI, ducantur ex G, & I, duæ rectę GK, IK, conſtituetur quadrilaterum GHIK, irregulare, cum ſolum habeat tres angulos GHI, HIK, HGK. Nam ad K, non fit angulus GKI, introrſum verſus H, cum illud ſpatium ſit duobus rectis maius, ſed verſus F, extrorſum. Huius ergo figuræ quadrilateræ irregularis aream colligemus, ducta diametro KH, ex duabus areis triangulum IKH, GKH, vt de Trapezio FGHI, dictum eſt.

DE AREA MVLTILATERARVM FIGVRArum irregularium.

CAPVT IV.

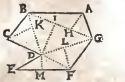
Area multilateræ figuræ.

1 FIGVRAS multilateras irregulares, quæ videlicet plura latera habent inæqualia, quam quatuor, etiãſi valde irregulares ſint, metiemur, vt trapezia irregularia; reſoluendo nimirum illas in triangula, & ſingulorũ triangulorũ areas inueſtigando. Nã omnes areæ in vnã ſummam collectæ æquales ſunt areæ totius figurę propoſitæ. Vt ſi figura ſeptem laterum ABCDEFG, reſoluatur in quinque triangula ABG, GBD, DBC, DEF, FDG, ita vt eorum latera ſe mutuo non interſecent, inquirendæ ſunt areæ ſingulorum hoc modo.

Quando figura in triangula reſolui poteſt, quomodo eius area colligatur.

f 9. triang. rectil.

Quando omnia latera triangulorum nota effici poſſunt per aliquam menſuram, ſiue figura agrum aliquem repreſentet, ſiue in charta ſolum ſit deſcripta, demittantur ex angulis ad latera oppoſita perpendiculares AH, DI, CK, DM, FL, ſingulæ in ſingulis triangulis. Deinde in triangulo ABG, [f] inquirantur ex tribus lateribus notis ſegmenta BH, HG; & ex his perpendicularis AH, vt cap. 2. huius lib. Num. 2. declarauimus Nam AH. in ſemiſſem baſis BG, ducta producet aream trianguli ABG. Eademque ratione aliorum triangulorum areæ perueſtigentur: atque omnes areæ in vnam redigantur ſummam, vt area totius figuræ habeatur. Quod ſi malueris, poteris omnium triangulorum areas indagare ex tribus lateribus cognitis, per ea, quæ cap. 2. Num. 1. ſcripſimus, etiamſi neque perpendiculares ductæ ſint, neque ſegmenta BH, GH, inuenta.



Quando figura in triangula reſolui nõ poteſt quomodo eius area deprehendatur.

2 QVANDO latera triangulorum interiora menſurari nequeunt, immo neque duci, vt non raro accidit in campis, aut agris, qui vel propter arbores, vel paludes interiectas, rectis itineribus pertranſiri non poſſunt; alia ratione ſcopum attingemus, hac videlicet. Cognitis lateribus figuram ambientibus per aliquam menſuram, inueſtigentur quoq; anguli ab ipſis comprehenſi beneficio quadrantis alicuius in gradus diuiſi. In propoſita figura angulus CDE, indagandus non eſt, quod ſit extra figuram. Reſoluta deinde figura mente, aut cogitatione in triangula, ac ſi latera interiora ducta eſſent, vt prius: [g] explorentur in triangulo ABG, duo anguli B, G, ex duobus lateribus AB, AG, anguloq; ab ipſis comprehenſo; atq; inſuper latus BG. Hinc n. in triangulo rectangulo ABH, vel AGH, [h] demiſſa perpendicularis ex A, cognoſcetur ex baſe AB, & angulo B, vel ex baſe AG, & angulo G: ac proinde area trianguli reperietur, vt antea ex ijs, quæ c. 2 huius lib. Nũ. 1. & 2. tradita ſunt. Nõ aliter area trianguli BCD, nota fiet ex duob. laterib. CB, CD, notis angulum C, notũ ambientibus, [i] ſi nimirũ inueſtigentur prius anguli B, D, vna cum latere BD, [k] & ex his demiſſa perpendicularis CK. Poſt hæc in triangulo BDG, ſi anguli ABG, CBD, iam cogniti detrahantur ex toto angulo ABC, noto, remanebit angulus DBG, notus. Cum ergo latera BD, BG, ipſum includentia facta ſint etiam nota; [l] cognoſcentur eodem modo & anguli D, G, & latus DG; [m] atq; inſuper perpendicularis ex B, in DG, demiſſa, &c. Similiter in triangulo GDF, ſi ex angulo noto AGF, tollantur anguli AGB, BGD, iam noti effecti, relinquetur angulus DGF, notus. Cum igitur & latus GD, notum factum ſit: [n] cognoſcemus & duos angulos GDF, GFD, & inſuper latus DF, [o] vna cum perpendiculari ex G, in DF, demiſſa, &c. In triangulo deniq; DEF, cum omnia latera ſint nota; [p] efficientur quoq; noti omnes tres anguli: ac proinde demiſſa perpendicularis DM, ex D, demiſſa, vel ex quocunq; alio angulo [q], nota fiet, &c. Ex his facile intelliges, quomodo in alijs figuris irregularibus te gerere debeas.

g 2. triãg. rectil.
h 2. triãg. rectil.
i 12 trian. rectil. Nu. 2.
k 2. trian. rectil.
l 12. trian. rectil. Nu. 2.
m 2. trian. rectil.
n 12. trian. rectil.
o 2. trian. rectil.
p 16. triã. rectil.
q 2 trian. rectil.

Quomodo figura agro propoſito ſimilis deſcribi poſſit.

POTES etiam, ſi vis, deſcribere in charta aliqua figuram agro ſimilem: ſi nimirum ſumas rectam AB, tot particularum æqualium, quot menſuræ in latere agri reſpondente includuntur, angulumq; conſtituas ABC, æqualem ei, quem in ambitu agri inueniſti. Deinde in BC, tot particulas accipias, quot in latere agri reſpondente continentur, iterumq; angulum BCD, æqualem illi conſtituas, quem in figura deprehendiſti. Denique ſi idem facias de angulo CDE, & reliquis, necnon de rectis CD, DE, & alijs, deſcripta erit figura ſimilis agro: quæ ſi reſoluetur in triangula, quorum latera intra figuram per inſtrumentum partium menſurentur, reperietur eius area, ſicuti prius, quando ager reſolui poterat in triangula.

QVAN-

Digitized by Google

QVANDO campi planities non eſt impedita, magis exquiſitè figura ei ſimilis deſcribetur per ea, quæ lib. 3. Problemat. 42. Num. 3. ſcripſimus: ſi videlicet intra campum eligatur punctũ quodpiam, ex quo ad omnes angulos rectæ ducantur, notatis angulis, quos efficiunt. Nam ſi illæ rectæ menſurentur, anguliq; ad aliquod punctum in charta transferantur, & in rectis angulorum capiantur tot particulæ æquales, quot menſuræ in rectis angulorum circa punctum in campo electum conſiſtentium deprehenſæ ſunt, continebunt rectæ extrema puncta connectentes figuram ſimilem campo, vt in loco citato demonſtrauimus. Quod ſi duo puncta eligantur in campo, è quibus rectæ ad angulos ducantur, notatis punctis, vbi binæ rectæ conueniunt, deſcribetur etiam figura campo ſimilis, quamuis rectæ illæ non menſurentur: quemadmodum ibidem Num 1. declarauimus.

MANIFESTVM autem eſt, eodem pacto menſurari poſſe campum, in quo lacus, vel ſilua comprehendatur, licet in triangula reſolui non poſſit, dummodo eius latera exteriora cum angulis cognoſci poſſint. Quod ſi in circuitu agri fuerit aliqua portio curua, & non recta, ſecanda ea erit in tot partes, donec à rectis lineis parum differant, eæque pro lateribus rectis aſſumendæ. *Qua ratione campus intra quẽ lacus vel ſilua exiſtat menſuretur.*

3 AGRIMENSORES ne cogantur totum campum ſæpius perambulare, vt perpendiculares in triangulis ducant, anguloſque metiantur, hanc ineunt rationem. In agro, ſeu figura conſtituunt, quam poſſunt, maximum rectangulum, atque ad eius latera ex angulis figuræ perpendiculares concipiunt demitti, quod faciunt, applicando vnum latus normæ ad latus rectanguli, & aliud ad angulum figuræ oppoſitum dirigendo. Ita namq; tota figura reſoluta erit in rectangulum illud conſtitutum, & in trapezia duorum laterum parallelorum, atque in triangula rectangula. Deinde vel ipſimet metiuntur latera rectanguli: & perpẽdiculares, vel vt ab alijs menſurentur, præcipiunt, quod quidem per catenulam ferream exequuntur. Poſtremo triangula quidem rectangula metiuntur, vt cap. 2. Num. 3. tradidimus, trapezia vero duorum laterum parallelorum, vt cap. 3. Num. 2. docuimus. Rectangulum deniq; per ea, quæ cap. 1. ſcripſimus, menſurant. Horum enim area in vnam ſummam collectę conficiunt aream totius agri, ſeu figurę. In propoſito octangulo ABCDEFGH, continetur rectangulum IKLM, trapezia HSTG, GTQF, OLRE; & triangula rectangula ANK, ANI, ISH, FQM, MOE, DPR, CDP, BCV, BKV. *Ratio communis menſorum in area cuiuſuis figuræ inueſtiganda.*

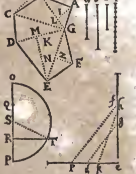


ALII non conſtituunt rectangulum intra campum, vel figuram, ſed lineam, quam poſſunt, longiſſimam ducunt, nimirum à puncto A, ad latus EF, quam fundamentalem appellant. Ad hanc ex angulis demittunt perpendiculares: atque ita totam rurſus figuram in trapezia duorum laterum parallelorum, & in triangula rectangula diſpertiunt, &c. Sed prior ratio commodior videtur: quippe in qua perpendiculares ex angulis deductæ breuiores ſint, ac propterea facilius menſurentur, ac certius.

QVANDO intra agrum dictæ operationes fieri nequeunt, ſolent etiam menſores circa agrum includentem ſiluas, lacus, & ædificia, vel alia impedimenta, formare rectangulum. Nam ſi ad eius latera ducantur perpendiculares ab angulis exterioribus agri, conſtituentur iterum trapezia rectangulum duorum laterum parallelorum, vel parallelogramma, & triangula rectangula extra agrum: quorum areæ ſi ex area totius rectanguli ſubducantur, reliqua fiet area propoſiti agri.

4 SED neque aſpernanda mihi videtur ea ratio, quam olim meis auditoribus explicare ſolebam. Vt nimirum toti figuræ (reducto prius agro ad ſimilem figuram, vt paulo ante Num. 2. præcepi) conſtituatur quadratum æquale, vel certe latus eius quadrati inueniatur. Nam ſi vnum huius quadrati latus menſuretur, atque in ſeipſum ducatur, prodibit area figuræ propoſitæ. Menſurandum porro eſt latus in particulis laterum figuræ, quæ menſuris laterum agri reſpondent, quod facile fiet per inſtrumentum partium. *Pulchra ratio areæ inuenienda cuiuſcunq; figuræ.*

QVO pacto autem cuilibet figuræ quadratum æquale ſine magno labore conſtrui poſſit, docui in ſcholio propoſ. 14. libr. 2. Euclid. quod hoc loco, paucis in melius mutatis, repetendum cenſeo. Sit ergo heptagonum irregulare ABCDEFG, quo reſoluto in 5. triangula ABG, BCG, CDG, DEG, EFG, ducantur ad BG, baſem communem duorum triangulorum ab angulis oppoſitis A, C, perpendiculares AL, CH, quarũ poſterior in GB, protractam cadit in noſtra figura. Deinde in recta quacũq; OP, ſumantur OQ, QR ipſis AL, CH, æquales. Item RP, ipſi, BI, ſemiſſi baſis BG, æqualis; ac circa OP, ex medio puncto S, ſemicirculus deſcribatur OTP: ac deniq; ex R, termino rectę OR, quę duabus perpendicularibus AL, CH, æqualis eſt, ad OP, perpendicularis excitetur RT, ſemicirculum ſecans in T. Dico quadratum rectæ RT, duobus triangulis ſimul ABG, BCG, eſſe æquale. Quia enim rectangulum ſub BI, ſemiſſe baſis, & perpendiculari AL, æquale eſt triangulo ABG, ex propoſ. 1. lib. 7. huius; & rectangulum ſub eadem BI, & perpendiculi CH, æquale, eſt triangulo BCG: Quod autem ſub BI, & aggregato ex AL, CH, hoc eſt, ſub RP, OR, (quod RP, ipſi BI, ſumpta ſit æqualis, & OR, ipſis AL, CH, ſimul) [i] æquale eſt eis, quæ ſub BI, & AL, CH, comprehenduntur, rectangulis; erit rectangulum ſub OR, RP, duobus triangulis ABG, BCG, ęqualis.[k] Cum ergo quadratum ex RT, rectangulo ſub OR, RP, ſit æquale, (quod ex ſcolio propoſ. 13. lib. 6. Euclid: RT, media proportionalis ſit inter OR, RP,) erit quoque quadratum ex RT, duobus triangulis ABG, BCG, æquale. quod eſt propoſitum. Immo quadratum ex RT, rectangulo ſub OR, RP, æquale eſſe, demonſtrabitur hoc etiam modo ſine ope lib. 6. Euclid.[l] Rectangulum ſub OR, RP, vna cum quadrato ex SR, æquale *Quadratũ datæ figuræ æquale qua ratione conſtruatur.*



i 1. ſecundi

k 17. ſexti.

l 5. ſecundi

Digitized by Google

m 47. primi. eſt quadrato ex SP, hoc eſt, (ducta ST,) quadrato ex ST,[m] hoc eſt, quadratis ex SR, RT, Ablato ergo communi quadrato rectæ SR, reliquum rectangulum ſub OR, RP, reliquo quadrato ex RT, erit æquale.

EODEM modo reperiemus quadratum duobus triangulis CDG, DEG, æquale, ſi ad baſem communē DG, ducantur perpendiculares CD, EM, quarum prior in noſtra figura cum latere CD, coincidit, &c. Atq; ita deinceps, ſi plura fuerint triangula, reperiemus ſemper binis triangulis ſingula quadrata ęqualia. Sed quia in noſtra figura ſupereſt vnum tantum triangulum EFG, inueniemus ei quadratum æquale, ſi, ducta perpendiculari FN, circa rectā ex FN, & ſemiſſe baſis EZ, cōflatam ſemicirculus deſcribatur, &c. Sint ergo a, b, c, latera quadratorum trapezijs ABCG, CDEG, & triangulo EFG, æqualium, quibus omnibus quadratis vnum æquale exhi-

n 47. primi. bebimus hac arte. Fiat angulus rectus d e f, & lateribus a, b, æquales ſumantur rectæ e d, e g,[n] eritque quadratum ductæ rectæ d g, quadratis rectarum ed, eg, hoc eſt, laterum a, b, æquale. Capiatur rurſus e k, lateri c, & recta e h,

o 47. primi. rectæ d g, æqualis;[o] eritque rurſus quadratum ex kh, æquale quadratis ex k e, e h, id eſt, ex c, e h, nimirum tribus ex a, b, c. Si igitur latus ex k b, menſuretur, & in ſe ducatur, gignetur area figuræ propoſitæ ABCDEFG.

EODEM artificio, ſi plura ſint latera, inueniemus quadratū omnibus quadratis æquale. Vt ſi foret alterū latus q, acciperemus ei æqualem rectam e p. Item rectam e f, rectæ k h, æqualem. Nam quadratum ex p f, quadratis ex e p, hoc eſt, ex q, & ex e f, id eſt, ex a, b, c, erit æquale, & ſic de pluribus.

Facilis ratio menſurandi trapezij irregularis. EX his colligitur facilis ratio metiendi trapezij irregularis cuiuſmodi eſt in proxima figura trapezium ABCG. Nam ducta diametro BG, ſi ad eam duæ perpendiculares demiſſæ AL, CH, menſurentur, earumque aggregatum in medietatem diametri BG, multiplicetur, procreabitur area trapezij, vt demonſtratum eſt.

IN octauo porrò lib. propoſ. 6. docebimus quoque, qua ratione datæ figuræ rectilineæ rectangulum æquale conſtruatur: quod ſi fiat hoc loco, efficietur illi rectangulo quadratum æquale, per vltimam propoſ. lib. 2. Euclidis, ſine vllo negotio, aut moleſtia.

DE AREA MVLTILATERARVM FIGVRARVM regularium.

CAPVT V.

1 QVAMQVAM regulares figuræ, quæ ſcilicet ſunt & æquilateræ & æquiangulæ, menſurari poſſint, vt irregulares præcedentis capitis, reſoluendo eas in triangula, &c. ſolet tamen dari propria ac peculiaris regula, qua cuiuſque figuræ regularis area inuenitur: quæ ita ſe habet.

Area figuræ regularis. *SEMISSIS ambitus figuræ multiplicetur in perpendicularem è centro figuræ ad vnum latus cadentem. Numerus enim productus area erit figuræ.*

NAM vt lib. 7, de Iſoperimetris propoſ. 2. demonſtrabimus, area cuiuslibet figuræ regularis æqualis eſt rectangulo contento ſub perpendiculari à centro figuræ ad vnum latus ducta, & ſub dimidiato ambitu eiuſdem figuræ.

Perpendicularis & ſemidiameter figuræ regularis quo pacto inueniatur. 2 PERPENDICVLARIS porro è centro figuræ in vnum latus cadens, vna cum ſemidiametro circuli figuram ambientis ſic reperietur. Numerus laterum, ſiue angulorum duplicetur, & à duplo auferantur 4. Nam reliquus numerus indicabit, quot rectis angulis omnes anguli figuræ æquiualeant, per ea, quæ in ſcholio propoſ. 32 lib. 1. Euclid. demonſtrata ſunt. Hic idem numerus reliquus, videlicet, numerus angulorum rectorum per numerum angulorum diuidatur, vt Quotiens vnius anguli figuræ magnitudinem exhibeat, qui in hexagono continet rectum cum parte tertia, hoc eſt, grad. 120. Et quoniam ſemidiameter ſecat angulum figuræ bifariam, vt conſtat ex demonſtratione propoſ. 12. lib. 4. Euclid. fit vt ſi ſemiſſis lateris, in quod perpendicularis cadit, ponatur ſinus totus, perpendicularis ſit Tangens ſemiſſis anguli figuræ, & ſemidiameter, Secans. Si fiat ergo

Vt 100000. ſinus totus	*ad ſemiſſem lateris:*	*ita Tangens ſemiſſis anguli, vel ſecans,*	*ad aliud,*

prodibit tam perpendicularis, quam ſemidiameter in partibus lateris figuræ. Verbi gratia, in Hexagono regulari, cuius vnum latus ſit 12. ſi fiat: vt 100000. ſinus totus ad 6. ſemiſſem lateris ita 173205. tangens ſemiſſis anguli Hexagoni ad aliud, reperietur perpendicularis 10 $\frac{39230}{100000}$. vel 10 $\frac{3923}{10000}$. Item ſi fiat, vt 100000. ſinus totus ad 6. ſemiſſem lateris; ita 200000. Secans ſemiſſis anguli Hexagoni ad aliud, exibit ſemidiameter figuræ 12.

ITAQVE ſi perpendicularis 10 $\frac{3923}{10000}$. ducatur in 36. ſemiſſem ambitus Hexagoni ex tribus lateribus conflatam, producetur area Hexagoni 374 $\frac{1228}{10000}$. vel 374 $\frac{123}{1000}$. Eodemque modo procedendum eſt in alijs figuris regularibus, in quibus angulorum ſemiſſes in tabula Tangentium, ac ſecantium accipi poſſunt.

Quare ex latere figuræ regularis dato non ſemper poſſit inueniri area, niſi figura ipſa deſcripta ſit. 3 QVONIAM vero circa quamlibet figuram regularem circulus deſcribi poteſt, vt ex lib. 4. Eucl. cōſtat, proponemus hic plurimarum figurarum regularium latera in partibus diametri circuli ambientis 20000000. vel ſemidiametri, ſiue ſinus totius 10000000. ex probatis auctoribus, vt earum areæ magis exquiſite inueniri poſſint per regulam Num. 1. propoſitam. Nam ſi ex ſolo vno latere in aliqua menſura cognito aream inueſtigare velimus, quemadmodum in Hexagono factum eſt, occurrēt multæ difficultates ac magnæ, propterea quod ſemidiametri, perpendicularesq; ex ſinubus, Tangentibus, ac ſecantibus erui non poſſunt, niſi quando ſemiſſis anguli figuræ comprehēdit præcisè gradus, vel gradus cum minutis, vel gradus cum minutis & ſecundis: (quamuis ſi ſecunda adſint, neceſſe ſit partem proportionalem adhibere) ſicut in Hexagono paulo ante factum eſt, cuius anguli ſemiſſis continet grad. 60. quod in quamplurimis figuris non contingit. Nam, verbi gratia in Heptagono omnes 7. anguli ex ſcholio propoſ. 32. lib. 1. Euclid. ęquiualent 10. rectis, ideoq; vnus angulus complectitur

vnum

vnum rectum cum ℥. hoc eſt, gradus 128. Min. 34. Sec. 17. Ter. 8. Quar. 34. &c. atque eius ſemiſſis grad. 64. min. 17. Secun. 8. Ter. 34. Quar. 17. &c. ex qua ſemiſſe neque Tangens pro perpendiculari, neque ſecans pro ſemidiametro per tabulas Tangentium, atque Secantium excerpi poteſt. Idemque in alijs figuris innumeris accidere comperies. Quod ſi ſcientia inuenta eſſet conſtruendi omnes figuras regulares, ſuperari aliquo modo poſſet hæc difficultas: propterea quod cognito latere vno in quantiſcunque partibus, cognoſci quoque poſſet tam perpendicularis, quam ſemidiameter in iiſdem partibus, beneficio inſtrumenti partium, vt lib. 1. cap. 1. ad finem Num. 1. tradidimus. Sed quia pauciſſimas figuras æquilateras deſcribere nouimus intra circulum, areas plurimarum ignorari neceſſe eſt. Hanc ob cauſam nonnulli Geometræ, inter quos ſtrenuã operam nauauit Ludolphus à Collen, ingenti labore latera figurarum, ſiue deſcriptæ eæ ſint, ſiue non, explorarunt: quamuis earum anguli præter gradus, ac minuta comprehendant inſuper Secunda, Tertia, Quarta, &c. vt earum areas conſequi poſſimus.

TABVLA CONTINENS LATERA FIGVRArum regularium à triangulo vſque ad figuram 80. laterum, poſita diametro 20000000. vel ſinu toto 10000000.

Num. lat. vel angulor.	Latera figurarum regularium, poſita diametro 20000000 vel ſiuu toto 10000000	Num. lat. vel angulor.	Latera figurarum regularium, poſita diametro 20,000000 vel ſinu toto 10000000	Num. lat. vel angulor.	Latera figurarum regularium, poſita diametro 20000000 vel ſinu toto 10000000
3	17320508	29	2162380	55	1141776
4	14142135	30	2090569	56	1121408
5	11755705	31	2023366	57	1101755
6	10000000	32	1960341	58	1082778
7	8677674	33	1901120	59	1064443
8	7653668	34	1845367	60	1046719
9	6840402	35	1792786	61	1029575
10	6180339	36	1743114	62	1012983
11	5634651	37	1696118	63	996917
12	5176380	38	1651586	64	981353
13	4786313	39	1609331	65	966275
14	4450418	40	1569181	66	951638
15	4158233	41	1530985	67	937445
16	3901806	42	1494601	68	923669
17	3674990	43	1459906	69	910291
18	3472963	44	1426783	70	897296
19	3291891	45	1395129	71	884666
20	3128689	46	1364848	72	872387
21	2980845	47	1335852	73	860444
22	2846296	48	1308062	74	848824
23	2723332	49	1281404	75	837513
24	2610523	50	1255810	76	826499
25	2506664	51	1231218	77	815771
26	2410733	52	1207569	78	805318
27	2321858	53	1184812	79	795130
28	2239289	54	1162896	80	785196

Nam ex latere cuiuſcunque figuræ regularis cognito in partibus diametri circuli circumſcripti, vel ſinus totius, veniemus per ea, quæ cap. 2. Num. 2. ſcripſimus, in cognitionem lineæ perpendicularis ex centro in vnum latus deductæ, ac proinde totam aream nanciſcemur, vt paulo ante Num. 1. docuimus. Latera igitur in quam plurimis figuris in tabula præcedenti expoſita habes, quæ omnia veris lateribus ſunt paulo minora; & ſi adieceris vnitatem, fient paulo maiora veris; ita vt verum latus trianguli æquilateri inter hos duos numeros 17320508. 17320509. conſiſtat.

Ex cognita ſemidiametro circuli inuenire latus figuræ regularis in eo circulo deſcriptæ.

4. IAM vero cognita ſemidiametro alicuius circuli in partibus cuiuſcunque menſuræ, reperiemus in iiſdem partibus latus figuræ regularis, cuius laterum numerus maior non eſt, quam 80. beneficio præcedentis tabulæ: ſi nimirum fiat, vt ſinus totus 10000000. ad latus figuræ propoſitæ in præcedenti tabula, ita ſemidia-

meter circuli propoſiti data ad aliud. Sit verbi gratia, ſemidiameter alicuius circuli 12. & inueniendum ſit latus decagoni reſpectu dictæ ſemidiametri: Fiat vt 10000000. ſinus totus ad 6180339. latus Decagoni; ita 12. ſemidiameter data ad aliud; exibitque latus quæſitum 8 $\frac{164068}{10000000}$. vel in minoribus numeris 8 $\frac{41017}{2500000}$.

Fractionẽ magnam ad minorẽ fere æquiualentem reducere. inter duas fractiones inuenire mediam.

ET ſi moleſtum videatur operari cum fractione tam magna, reduces eam ad minorem quaſi æquiualentem hoc modo. Elige pro Numeratore quemuis numerum, vt 10. Et fiat vt Numerator 164068. ad ſuum Denominatorem 10000000. ita Numerator electus 10. ad aliud, reperiesque Denominatorem 609 $\frac{81588}{164068}$. Ita vt relicta hac fractione, Denominator 609. ſit minor quam verus; & 610. maior, hoc eſt, fractio $\frac{10}{609}$. ſit maior fractione $\frac{164068}{10000000}$. fractio autem $\frac{10}{610}$. minor. Inter has autem duas fractiones $\frac{10}{609}$. $\frac{10}{610}$. produces mediam $\frac{20}{1219}$. cuius Numerator ex Numeratoribus, & Denominator ex Denominatoribus conflatus eſt. Eritque hæc fractio inuenta fere maiori illi æqualis.

FRACTIONEM porro, cuius Numerator ex duobus Numeratoribus, & Denominator ex Denominatoribus duarum minutiarum componitur, eſſe maiorem minore, & minorem maiore, demonſtrabimus lib. 8. propoſ. 10.

Ex cognito latere figuræ regularis, inuenire ſemidiametrum circuli circumſcripti.

VICISSIM ex dato latere cuiuslibet figuræ regularis cognoſcemus ſemidiametrum circuli circumſcribentis: ſi fiat, vt latus propoſitæ figuræ in tabula antecedente ad 10000000. ita latus datum ad aliud. Vt ſi latus Pentagoni detur 12. & fiat, vt 11755705. ad 10000000. ita 12. ad aliud, reperietur ſemidiameter circuli circumſcripti 10 $\frac{2442950}{11755705}$. Et ſi fiat, vt Numerator huius fractionis ad ſuum Denominatorem: ita Numerator electus quicunque, nimirum 1. ad aliud, inuenietur Denominator ſequens 4 $\frac{1983905}{2442950}$. ita vt fractio $\frac{1}{4}$. ſit maior, quam $\frac{2442950}{11755705}$. at $\frac{1}{5}$. minor. Ex additione numeratorum 1. 1. inter ſe, & Denominatorum 4. 5. inter ſe, efficies fractionem $\frac{2}{9}$. mediam: quæ adhuc maior eſt, quam $\frac{2442950}{11755705}$. Media autem inter $\frac{1}{5}$. & $\frac{2}{9}$. eſt $\frac{3}{14}$. quæ parum ab illa differt: ita vt ſemidiameter quæſita dici poſſit eſſe 10 $\frac{3}{14}$. Atque in hunc modum per minores numeros operationes fieri poſſunt, quamuis non omnino exquiſite, quod fractiones aſſumptæ non ſint omnino veræ; ſed hic error in dimenſionibus camporum tolerabilis eſt.

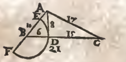
5 ANTEQVAM rectilinearum figurarum dimenſionem concludam, lubet regulam attexere, qua ex cognita area cuiuſcunque figuræ latus habentis notum venire poſſimus in cognitionem alterius figuræ ſimilis illi ſimiliterque poſitæ latus homologum etiam notum habentis: quæ ſic ſe habet.

Qua ratione ex area cuiuslibet figuræ eruatur area alterius figuræ ſimilis.

QVADRATVS numerus denominatoris proportionis, quam latus figuræ ignotæ ad latus figuræ cognitæ habet, (qui denominator habebitur, ſi latus figuræ ignotæ per latus figuræ cognitæ diuidatur,) ſi ducatur in aream cognitam, producetur area alterius figuræ quæſitæ. Debent autem figuræ eſſe ſimiles, ſimiliterque poſitæ, & earum latera homologa ſunt vt dictum eſt.

a 19. vel 20. ſexti.

NAM denominator proportionis lateris figuræ quæſitæ ad latus figuræ datæ in ſe multiplicatus gignit denominatorem proportionis duplicatæ eorum laterum, vt ad defin. 10. lib. 5. Euclid. ſcripſimus. [a] Cum ergo figuræ ſimiles ſimiliterque poſitæ habeant etiam proportionem duplicatam laterum homologorum; fit vt denominator proportionis duplicatæ laterũ prædictorũ multiplicans aream cognitã producat aream quæſitam, hoc eſt, numerum, qui ad aream cognitam proportionẽ habeat duplicationẽ proportionis datorum laterũ, denominatã ſcilicet à denominatore, qui ex denominatore proportionis eorum laterũ in ſe multiplicato producitur. Verbi gratia, Trianguli ABC, cuius latus AB, 10. AC, 17. & BC, 21. area eſt 84. Si ergo ſit aliud triangulum huic ſimile habens latus ipſi AB, homologum 70 ipſi vero AC, homologum 119. & ipſi BC, homologũ 147. diuidatur latus 70. per 10. vt denominator 7. proportionis lateris 70. ad latus 10. procreetur, & quadratus numerus huius denominatoris, nimirum 49. ducatur in 84. aream trianguli ABC, producetur area 4116. poſterioris trianguli. Rurſus quia area trianguli æquilateri, cuius ſingula latera ſint 1. area eſt $\frac{13}{30}$. ferme, vt ſupra patuit, ſi detur aliud triangulum æquilaterum, cuius ſingula latera ſint 70. inueniemus eius aream hoc modo. Denominator proportionis laterum eſt ipſummet latus 70. quod 70. diuiſa per 1. faciant 70. Ducemus ergo 4900. quadratum lateris 70. in $\frac{13}{30}$. aream cognitam. Productus enim numerus 2123 $\frac{1}{3}$. erit area poſterioris trianguli.



Regula ſupradicta aliter propoſita.

b 19. vel 20. ſexti.

6. HÆC regula ita quoque proponi poterit. *Fiat vt quadratus numerus lateris figuræ cognitæ ad quadratum numerum lateris figuræ quæſitæ, ita area figuræ cognitæ ad aliud. Productus enim numerus erit area figuræ quæſitæ.* Propterea quod eadem eſt proportio quadrati lateris cognitæ figuræ ad quadratum lateris figuræ quæſitæ, quæ figuræ notæ ad figuram quæſitam: [b] quippe cum vtraque proportio ſit duplicata proportionis laterum homologorum. Et quoniam quadratum lateris 1. eſt 1. fit, vt quotieſcunque latus figuræ aream cognitam habentis fuerit 1. ſatis ſit, quadratum numerum lateris figuræ quæſitæ multiplicare in datam aream, vt quæſita area producatur: Adeo vt operæ pretium ſit areas inueſtigare plurimarum figurarum regularium, quarum latera ſint 1. Ex his enim ſine magno labore areæ aliarum figurarum ſimilium elicientur, quarum latera cognita ſint. Areas decem figurarum regularium, quarum latera ſunt 1. hic ſubiecimus, vt per eas ſimilium figurarum, quarum latera vnitatem ſuperant, inueſtigari poſſint ex regula Num. 5. vel 6. præſcripta; quamuis in quadrato id neceſſarium non ſit, cum latus datum in ſe ductum producat ſuum quadratum.

Figu-

	Figuræ regulares.	Areæ prædictarum figurarum ſunt fere hæ.
Quarum latera ſunt 1	Trigonum	$\frac{1875000}{4330127}$ Vel $\frac{13}{30}$
	Tetragonum	1
	Pentagonum	$1\frac{8469719}{11775706}$
	Hexagonum	$2\frac{2990381}{5000000}$
	Heptagonum	$3\frac{5507221}{8677674}$
	Octogonum	$4\frac{1585127}{1913417}$
	Enneagonum	$6\frac{1243755}{6840402}$
	Decagonum	$7\frac{858089}{1236068}$
	Vndecagonum	$9\frac{517050}{1408663}$
	Duodecagonum	$11\frac{84614}{431365}$

POSSVNT autem hæ fractiones ad minores fere æquiualentes, ſi placet, reuocari, vt ſupra Num. 4. docuimus. *Quarationε beneficio laterum ſuperioris tabulæ areæ figurarum regularium inueniantur.*

7. AREÆ porro hæ procreatæ ſunt per regulam Num. 1. præſcriptam, inuentis prius perpendicularibus ex centris in latera cadentibus, licet in nonnullis figuris anguli contineant ſecunda, ac tertia, præter gradus, & minuta; hoc modo. Pro heptagono, verbi gratia, ex ſuperiori tabula ſumpta eſt ſemiſſis lateris heptagoni 4338837. (quando numerus lateris eſt impar, addenda eſt 1. vt fiat par, ac proinde ſemiſſem habeat, quandoquidem minus eſt vero latere, vt diximus. Deinde, quia, vt in tractatione ſinuum dictum eſt, ſemiſſis hæc ſinus eſt anguli oppoſiti in centro, quæſitus eſt is angulus ex tabula ſinuum (adhibita parte proportionali, quemadmodum ad finem Lemmatis 53. noſtri Aſtrolabij docuimus, vt angulus reperiretur in gradibus, minutis, ac ſecundis.) inuentusque eſt grad. 25. min. 42. ſec. 51.

POST hæc, [c] quia eſt, vt ſinus huius anguli inuenti, nimirum ſemiſſis ipſa 4338837. lateris ex ſuperiori tabula excerpti, ad $\frac{1}{2}$. ſemiſſem lateris, ita ſinus complementi eiuſdem anguli inuenti, hoc eſt, ita ſinus grad. 64. min. 17. ſec. 9. (adhibita quoq; parte proportionali, propter ſecunda.) nimirũ 9011398. ad perpendicularem huic complemento inuẽti anguli oppoſitam in triangulo rectangulo: Inuenta eſt hæc perpendicularis [illegible] quæ tandem ducta in $\frac{7}{2}$. ſemiſſem ambitus heptagoni produxit aream heptagoni 3 [illegible]. vel in minoribus numeris 3 [illegible]. Atque hac eadem ratione aream cuiuſcunque figuræ regularis latus habentis 1. dummodo numerus laterum maior non ſit, quam 80. reperies: Ex qua deinde aream ſimilis figuræ latus habentis maius, quam 1. per regulam Num. 5. vel 6. traditam elicies. *c 4. triãg. rectil.*

EODEM tamen artificio hoc Num. 7. expoſito aream cuiuſuis figuræ regularis, etiamſi latus habeat maius, quam 1. (ſi placet) colligere licebit, quamuis non reperiatur prius area figuræ ſimilis, cuius latus ſit 1. ſi nimirum loco $\frac{1}{2}$. ſemiſſis lateris 1. accipiatur ſemiſſis lateris dati, quod maius ſit quam 1. vt perſpicuum eſt.

8. Cognita area figuræ regularis, cuius numerus laterum maior non ſit, quam 12. cognoſcetur eius latus hoc modo. Fiat vt area figuræ ſimilis latus habentis 1. ex præcedenti tabula deſumpta ad aream figuræ propoſitæ: Ita 1. quadratum lateris 1. ad aliud. Productus enim numerus erit quadratus lateris quæſiti. Radix ergo eius quadrata dabit latus quæſitum. Nam ita eſt area ad aream, vt quadratum lateris ad quadratum lateris; [d] quod vtraque proportio ſit proportionis laterum duplicata. *Ex area cognita quo pacto latus eruatur.* *d 10. vel 20. ſexti.*

QVOD ſi area cognita ſit figuræ regularis plura latera habentis, quam 12. non plura tamen, quam 80. inuenienda primum erit area figuræ ſimilis latus habentis 1. beneficio ſuperioris tabulæ laterum, vt Num. 7. docuimus. Deinde latus exquirendum, vt hoc Num. 8 declaratum eſt. Et ſi tabula ſuperior laterum extenſa eſſet ad plura latera, inueniretur eodem modo latus figuræ plurium laterum, quam 80. ex eius area. Exempli gratia. Sit area alicuius trianguli æquilateri $15\frac{3}{5}$. Et quia area æquilateri trianguli, cuius latus eſt 1. inuenta eſt ſupra $\frac{13}{30}$. ſi fiat vt $\frac{13}{30}$. ad aream propoſitam $15\frac{3}{5}$. ita 1. quadratum lateris 1. ad aliud, reperietur quadratum lateris quæſiti 36. cuius radix quadrata 6. dabit latus, quod quæritur.

DE DIMENSIONE CIRCVLI EX Archimede.

CAPVT VI.

VT circulum quemlibet propoſitum, eiuſque partes metiri poſſimus, neceſſe eſt probe
1 noſſe, quæ Archimedes de circuli dimenſione tradidit. Non abs re ergo erit, ſi eius libellum de circuli dimenſione acutiſſimum ſane, & ſubtiliſſimum hic interſeram, tum quia breuiſſimus eſt, quippe qui tribus duntaxat propoſitionibus conſtet: tum ne ſtudioſus, vt rem tam vtilem, atque apud omnes artifices peruulgatam intelligat, Archimedē ipſum adire cogatur: tum vero maxime, quod cum Archimedis ſcripta ob affectatam breuitatem, ſint paulo obſcuriora, illis nos lucem aliquam allaturos ſperamus. Neq; dubitamus etiam, quin res hæc ſtudioſo lectori grata, ac iucunda ſit futura.

PROPOSITIO I.

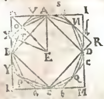
AREA cuiuſlibet circuli æquális eſt triangulo rectangulo, cuius vnum quidem latus circa angulum rectum ſemidiametro circuli, alterum vero peripheriæ eiuſdem circuli æquale eſt.

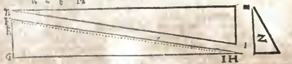
SIT circulus ABCD, cuius centrum E, ſemidiameter EA: ſitque triangulum rectangulum FGH, angulum habens rectum G, latus vero FG, ſemidiametro circuli EA, & latus GH, peripheriæ eiuſdem circuli æquale. Dico circulum ABCD. triangulo FGH, æqualem eſſe. Si enim dicatur non eſſe æqualis, ſit primum, ſi fieri poteſt, circulus maior quam triangulum, magnitudine z: adeo vt circulus æqualis ſit triangulo, & magnitudini z, ſimul; proptereaque maior, quam z. Si igitur ex circulo auferatur plus, quam dimidium, & à reſiduo plus etiam, quam dimidium, & ita deinceps: [a] relinquetur tandem magnitudo minor, quam z.

a 1. deci

HÆC autem detractio continua fiet, ſi primo loco auferatur ex circulo quadratum inſcriptum ABCD. Hoc enim cum dimidium ſit quadrati IKLM, circulo circumſcripti, vt in ſcholio propoſ. 9. lib. 4. Euclid. oſtendimus: circulus autem ipſius quadrati IKLM, pars ſit: erit quadratum inſcriptum ABCD, maius quam dimidium circuli. Deinde ſi auferantur à reſiduis quatuor ſegmentis quatuor triangula Iſoſcelia AOB, BPC, CQD, DNA, ductis rectis ad media puncta arcuum. Hæc enim ſimul maiora ſunt, quam dimidium quatuor ſegmentorum ſimul, cum vnumquodque maius ſit, quam dimidium ſegmenti, in quo exiſtit. Completo enim rectangulo AR, [b] erit eius dimidium triangulum AND: ac proinde idem triangulum maius erit quam dimidium ſegmenti AND. Eademque ratio eſt de alijs. Pari ratione, ſi à reſiduis octo ſegmentis auferantur octo alia triangula Iſoſcelia in illis conſtituta, &c. atque ita deinceps.

b 41. pri.





PONANTVR ergo iam octo ſegmenta AO, OB, BP, PC, CQ, QD, DN, NA, relicta eſſe minora magnitudine z. & quoniam circulus æqualis conceditur triangulo FGH, & magnitudini z, ſimul: ſi demantur inæqualia, nimirum iſta ſegmenta ex circulo, & magnitudo z, ex aggregato trianguli cum z, reliqua erit figura inſcripta, octogona videlicet, maior triangulo FGH, quod eſt abſurdum, quippe cum multo minor ſit. Si namque ex centro E, ad latus BO, ducatur perpendicularis ET, & in triãgulo ſumatur Gk, ipſi ET, & recta G i, ambitui octogoni æqualis, cadet punctum k, citra F, & i, citra H, quod ET, minor ſit ſemidiametro circuli, & ambitus octogoni minor peripheria eiuſdem circuli. Igitur ducta recta k i, erit triangulum G k i, minus triangulo FGH, pars toto. Eſt autem triangulum G k i, octogono æquale: quippe cum ex ſcholio propoſ. 41. lib. 1. Euclid. æquale ſit rectangulo ſub Gk, & ſemiſſe ipſius G i, comprehenſo, quod per propoſitionem 2. lib. 7. de Iſoperimetris octogono æquale eſt. Octogonum ergo minus eſt triangulo FGH. Non ergo maius eſt: ac proinde circulus triangulo maius eſſe nequit.

SIT deinde, ſi fieri poteſt, circulus ABCD, minor, quam triangulum FGH, magnitudine z. Circumſcribatur circulo quadratum IKLM, cuius latera circulum tangant in punctis A, B, C, D. quod maius erit triangulo FGH. Cum enim eius ambitus (vt lib. 8. propoſ. 1. probabimus) maior ſit peripheria circuli, hoc eſt, recta GH, & perpendicularis EA, ipſi FG, æqualis, erit triangulum rectangulum latus vnum habens æquale ipſi FG, & alterum maius latere GH, (æquale nimirum ambitui quadrati IKLM.) maius triangulo FGH. Cum ergo triangulum illud, per ſcholium propoſ. 41. lib. 1. Euclid. ſit æquale rectangulo ſub FG, & ſemiſſe ambitus quadrati IKLM, comprehenſo: hoc autem rectangulum per propoſ. 2. lib. 7. de Iſoperimetris, quadrato IKLM, æquale; erit quoque quadratum IKLM, maius triangulo FGH. Et quia triangulum FGH, ponitur æquale circulo, & magnitudini z, ſimul, ac proinde maius quam z. erit quoque quadratum IKLM, (quod maius eſſe oſtendimus triangulo FGH,) maius, quam z. Si igitur ex quadrato IKLM, auferatur plus, quam dimi-

Digitized by Google

dimidium, & à reſiduo plus etiam quam dimidium, atque ita deinceps, [a] relinquetur tandem magnitudo minor, quam z. (a 1. deci.)

Hæc autem detractio continua fiet, ſi primo loco auferatur circulus ABCD: Hic enim maior eſt ſemiſſe quadrati IKLM, propterea quod quadratum inſcriptum (quod minus eſt circulo, pars toto) ſemiſſis eſt quadrati circumſcripti, ex ſcholio propoſ. 9. lib. 4. Euclid. Quod ſi ducta recta EK, ſecante circulum in O, ducatur per O, ad EK, perpendicularis VX, [b] *quæ circulum tanget in O: idemque fiat, ductis rectis EL, EM, EI, &c. deſcriptum erit Octogonum æquilaterum, & æquiangulum VXYabcdeV, vt conſtat ex conſtructione, demonſtrationeque propoſ. 12. lib. 4. Euclid. quippe cum ad EA, EO, & ad reliquas ſemidiametros octogoni inſcripti ductæ ſint perpendiculares Ve, VX, &c. Quoniam vero vA, vO, per 2. coroll. propoſ. 36. lib. 3. Euclid. æquales ſunt;* [c] *& eſt KV, maior quam vO: erit quoque KV, maior quam vA, ideoque & triangulum KvO, triangulo vAO, maius erit;* [d] *cum ſit triangulum ad triangulum, vt baſis ad baſem. Igitur triangulum KVO, maius erit, quam dimidium trianguli KAO; ac proinde multo maius, quam dimidium trianguli mixti KAO, cuius vnum latus eſt arcus AO. Eadem ratione erit KOX, maius, quam dimidium trianguli mixti KOB, cuius vnum latus eſt arcus OB. Auferendo ergo triangulum KVX, ex figura miſtilinea KAB, in qua vnum latus eſt arcus AOB, ablatum erit plus quam dimidium. Subtractis igitur quatuor eiuſmodi triangulis KVX, LYa, Mbc, Ide, ablatũ erit plus, quã dimidium ex quatuor reſiduis extra circulum, & ſic deinceps.* Ponantur igitur iam octo triangula mixta reſidua, quorum baſes ſunt arcus AO, OB, BP, &c. minora magnitudine z. Cum ergo circulus cum z, æqualis poſitus ſit triangulo FGH, erit circulus cum illis octo reſiduis, hoc eſt, figura Octogona VXYabcdeV, minor eodẽ triangulo FGH, quod eſt abſurdum, cum maius ſit: quippe cum perpendicularis EO, æqualis ſit lateri FG, & ambitus Octogoni maior circumferentia circuli, hoc eſt, recta GH. Hinc enim fit, triangulũ rectangulum, cuius latus FG, æquale perpendiculari O, & alterum latus æquale ambitui Octogoni maius videlicet, quam GH, maius eſt triangulo FGH. Cum ergo illud triangulum ſit, ex ſcholio propoſ. 41. lib. 1. Euclid. æquale rectangulo ſub FG, & ſemiſſe ambitus octogoni comprehenſo; hoc autem rectangulum octogono æquale, ex propoſ. 2. lib. 7. de Iſoperimetris: erit quoque octogonum maius triangulo FGH. Non ergo minus eſſe poteſt, ac proinde circulus ABCD, minor non eſt triangulo FGH. Sed neque maior eſt, vt demonſtrauimus. Igitur æqualis eſt, quod erat demonſtrandum.

(b 16. tert.) (c 19. pri.) (d 1. ſexti)

SCHOLIVM.

IOSEPHVS Scaliger, vel quia vim huius demonſtrationis non perpendit, vel quia ſuæ circuli quadrandi rationi vidit eſſe contrariam, non eſt veritus Archimedem hoc loco falſitatis arguere; conaturque oſtendere, non recte ab eo demonſtratum, circulum æqualem eſſe triangulo rectangulo, cuius vnum latus ſemidiametro, & alterum circumferentiæ circuli eſt æquale. Nam, ait, ſi demonſtratio Archimedis bona eſt, demonſtrabitur eodem modo, circulum æqualem eſſe triangulo rectangulo, cuius vnum latus circa angulum rectum ſemidiametro æquale eſt, & alterum peripheria circuli maius. Sit enim in triangulo lmn, latus quidem lm, trianguli ſemidiametro circuli EA, æquale, at mn, peripheria maius. Concedit ergo Scaliger, circulum non eſſe maiorem triangulo FGH, recte eſſe ab Archimede demonſtratum, hoc eſt, triangulum FGH, cuius latus GH, peripheriæ eſt æquale, non eſſe minus circulo, ac proindeque triangulum lmn, cuius latus mn, maius eſt peripheria, circulo minus eſſe. Concedit item, recte probatum eſſe, circulum non eſſe minorem triangulo FGH, ſi latus GH, peripheriæ ſit æquale, hoc eſt, triangulum FGH, non eſſe maius circulo. Sed negat, ex hoc ſequi, triangulum FGH, eſſe æquale circulo. Cur? quia, inquit, eodem modo, ſi baſis mn, maior eſt peripheria, ſed minor circumſcripti polygoni ambitu, (hoc enim contingere, ait, nihil prohibet) polygonum erit quidem maius triangulo lmn, quod ambitus Polygoni maior ſit recta mn, & ſemidiameter EA, rectæ lm, æqualis. Sed reſectis portionibus, ſequeretur, idem polygonum eſſe triangulo lmn, minus, quod eſt ineptum. Itane vero mi Scaliger? Non aduertis te cum hypotheſi pugnare? Nam poſito latere mn, maiore, quam peripheria; quando eo peruentum erit, polygonum eſſe minus triangulo lmn, (ſi nimirum relictæ portiones fuerint magnitudine z,) ſequitur neceſſario, ambitum polygoni minorem eſſe latere mn. Cum enim triangulum rectangulum, cuius altitudo ſemidiametro polygoni, & baſis ambitui æqualis eſt, æquale ſit, ex ſcholio propoſ. 41. lib. 1. Euclid. rectangulo ſub eadem ſemidiametro, & ſemiſſe ambitus Polygoni comprehenſo; hoc autem, per propoſ. 2. lib. 7. huius de Iſoperimetris, polygono æquale: erit quoque triangulum illud minus triangulo lmn. Quare cum hæc triangula habeant æquales altitudines; [e] erit vt illud triangulum ad lmn, ita baſis illius ad baſem mn: ac proinde illa baſis, hoc eſt, ambitus polygoni, baſe mn, minor erit. Non ergo ponere potes baſem trianguli lmn, ſi maior eſt, quam peripheria circuli, minorem ambitu polygoni: In demonſtratione autem Archimedis conſtat, ambitum polygoni maiorem eſſe baſe trianguli FGH, ſi GH, æqualis eſt peripheriæ circuli, cum maior ſit, quam peripheria: ac propterea recte concluſit Archimedes, polygonum eſſe maius triangulo FGH, cum tamen ex hypotheſi aduerſarij oſtenſum ſit eſſe minus. Itaque potuiſſet Archimedes ita quoque propoſitum colligere. Polygonum minus eſt triangulo FGH, propter relictas ſectiones minores magnitudine z. Ergo eius ambitus minor eſt baſe GH, (quemadmodum proxime demonſtrauimus.) hoc eſt, peripheria circuli, quod eſt abſurdum, cum ambitus polygoni maior ſit quam peripheria. Quod abſurdum doctiſſime Scaliger, colligere non potes in tuo triangulo lmn, cum ſtatuas baſem mn, peripheria circuli maiorem. Et ſane miror te, Mathematicus cum ſis, negare quantitatem aliquam illi eſſe æqualem, qua neque maior eſt, neque minor. Si enim æqualis non eſt, erit inæqualis. Igitur vel maior vel minor, contra hypotheſim, cum dicatur neque maior eſſe, neque minor. An non vides, non ſolum Archimedem, ſed etiam Euclid. lib. 12. hunc argumentandi modum frequentiſſime vſurpare. (e 1. ſexti)

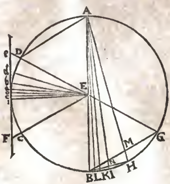
PRO-

PROPOSITIO II.

CVIVSLIBET circuli peripheria tripla eſt diametri, & adhuc ſuperat parte, quæ quidem minor eſt decem ſeptuageſimis, hoc eſt, ſeptima parte diametri, maior vero decem ſeptuageſimis primis.

HÆC eſt Archimedis propoſitio 3. quam nos ſecundam facimus, vt doctrinæ ordo ſeruetur, quandoquidem ſequens propoſitio 3. quam ipſe 2. facit, hanc noſtram propoſitionem 2. in demonſtrationem adhibet.

SIT igitur circulus ABCD, cuius centrum E, diameter AB, quam ad rectos angulos ſecet ſemidiameter
a 16. tert. E c, & e c F, ad E c, perpendicularis ducatur, ᵃ quæ circulum tanget in c. Ducatur latus hexagoni A D, ᵇ quod
b 15. quar. ſemidiametro æquale erit, & arcus A D, grad. 60. Ideoque D c, grad. 30. Ducta ergo recta E D e, erit angulus e E c, tertia pars recti, cum rectus angulus contineat grad. 90. Fiat quoque angulus c E F, angulo c E e, æqualis, eruntque anguli e, F, inter ſe æquales, quod vterque complementum ſit tertiæ partis anguli recti, ac proinde vterque duas tertias partes vnius recti comprehendet.
c 32. pri. ᶜ Cũ ergo omnes tres anguli in triangulo eEF, contineant $\frac{6}{3}$. vnius recti, continebit quoque e E F, $\frac{2}{3}$. vnius recti, ipſumque triangulum æquiangulum erit, hoc eſt, per coroll. propoſ. 6. lib. 1. Euclid. æquilaterũ; proptereaq; perpendicularis E c, baſem e F, bifariã ſecabit, ex ſcholio propoſ. 26. lib. 1. Euclid. atque ideo E e, ipſius e c, dupla erit. Poſita igitur e c, 153. erit E e, 306. Et ſi quadratũ ipſius e c, 23409. dematur ex 93636. quadrato ipſius



d 47. pri. E e, ᵈ reliquum fiet quadratum ipſius E c, 70227. cuius radix eſt paulo maior, quam 265.
e 8. quin. ᵉ ac proinde E c, ad e c, maiorem habebit proportionem, quam 265. ad 153.

f 3. ſexti. SECTO iam angulo eEc, bifariam per rectam E d; ᶠ erit e E, ad E c, vt e d, ad d c. Et componendo eE, Ec, ſimul ad E c, vt e c, ad d c. Et permutando e E, E c, ſimul ad e c, vt E c, ad c d. Quia vero e E, Ec, ſimul maiores ſunt, quam 571. (quippe cum e E, ſit 306. & E c, paulo maior, quam 265.) & e c, poſita eſt 153.
g 8. quin. ᵍ habebunt e E, E c, ſimul ad e c, maiorem proportionem, quam 571. ad 153. ideoq; & proportio E c, ad c d, maior erit, quã 571. ad 153. ac proinde ſi c d, ponatur 153.
h 10. quin. ʰ erit E c, paulo maior, quam 571. Igitur quadratum ipſius E c, paulo maius erit, quam 326041. atque idcirco, cum
i 47. pri. quadratum ipſius c d, ſit 23409. erit quadratum ipſius E d, ⁱ quod quadratis rectarum E c, c d, eſt æquale, paulo maius, quam 349450. eiuſque radix maior, quam 591 $\frac{1}{8}$. quippe cum huius radicis quadratum ſit tantum
k 8. quin. 349428 $\frac{49}{64}$. ᵏ Habebit igitur E d, ad d c, maiorem proportionem, quam 591 $\frac{1}{8}$. ad 153.

l 3. ſex. & componendo permutandoq. SECTO rurſus angulo d E c, bifariã per rectam E b; ˡ erit rurſus vt d E, Ec, ſimul ad d c, ita E c, ad c b. Quia vero d E, E c, ſimul maiores ſunt, quam 1162 $\frac{1}{8}$. (quippe cum E d, maior ſit, quam 591 $\frac{1}{8}$. & E c, maior, quam 571.) & d c, poſita eſt 153. ᵐ habebunt d E, Ec, ad d c, maiorem proportionem, quam 1162 $\frac{1}{8}$. ad 153.
m 8. quin. ideoque & E c, ad c b, proportionem habebit maiorem, quam 1162 $\frac{1}{8}$. ad 153. ac proinde ſi ponatur c b, 153. erit
n 10. quin. E c, maior, quam 1162 $\frac{1}{8}$. ⁿ Igitur quadratum ipſius E c, maius erit quam 1350534 $\frac{33}{64}$. cui ſi addatur quadra-
o 47. pri. tum 23409. ipſius c b, erit quadratum ipſius E b, ᵒ quod quadratis rectarum E c, c b, æquale eſt, maius, quam 1373943 $\frac{33}{64}$. eius radix propterea, id eſt, recta E b, paulo maior, quam 1172 $\frac{1}{8}$. quippe cum huius radicis qua-
p 8 quin. dratum ſit tantum 1373877 $\frac{1}{64}$. ᵖ Habebit ergo E b, ad b c, maiorem proportionem, quam 1172 $\frac{1}{8}$. ad 153.

q 3. ſexti. & componendo permutandoque. SECTO item angulo b E c, bifariã per rectam E a; ᑫ erunt b E, E c, ſimul ad b c, vt E c, ad c a. Quia vero bE, maior eſt, quam 1172 $\frac{1}{8}$. & E c, maior, quam 1162 $\frac{1}{8}$. erunt b E, E c, ſimul maiores, quam 2334 $\frac{2}{8}$. vel 2334 $\frac{1}{4}$. Cum ergo c b, poſita ſit 153. ʳ habebunt b E, E c, ſimul ad c b, maiorem proportionẽ, quam 2334 $\frac{1}{4}$. ad 153. ideoque & E c, ad c a, proportionem habebit maiorem, quam 2334 $\frac{1}{4}$. ad 153. ac proinde, ſi c a, ponatur
r 8. quin. 153. ˢ erit E c, maior, quam 2334 $\frac{1}{4}$. Igitur quadratum ipſius E c, maius erit, quam 5448723 $\frac{1}{16}$. cui ſi addatur
s 10. quin. quadratum 23409. ipſius c a, erit quadratum ipſius E a, ᵗ quod quadratis rectarum E c, c a, æquale eſt, maius
t 47. pri. quam 5472132 $\frac{1}{16}$. eiuſque radix maior, quam 2339 $\frac{1}{4}$. cum huius radicis quadratum ſit tantum 5472090 $\frac{1}{16}$. ᵘ Ergo E a, ad a c, maiorem proportionem habebit, quam 2339 $\frac{1}{4}$. ad 153.

u 8. quin. SECTO denique angulo quoque a E c, bifariam per rectam E o, ˣ erunt a E, Ec, ſimul ad a c, vt E c, ad
x 3 ſexti & componendo permutandoque. c o. Quia vero a E, maior eſt, quam 2339 $\frac{1}{4}$. a & E c, maior quam 2334 $\frac{1}{4}$. erunt aE, Ec, ſimul maiores, quam 4673 $\frac{1}{2}$. Cum ergo c a, poſita ſit 153. ʸ habebunt aE, Ec, ſimul ad c a, hoc eſt, Ec, ad co, maiorem proportionem, quam 4673 $\frac{1}{2}$. ad 153. ac propterea ſi ponatur c o, 153. ᶻ erit Ec, maior quam 4673 $\frac{1}{2}$.

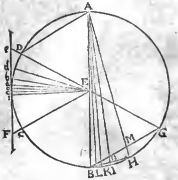
y 8 quin. QVONIAM igitur angulus c E c, tertia pars eſt recti, erit eius ſemiſſis d E c, ſexta pars recti, & huius ſe-
z 10. quin. miſſis b E c, $\frac{1}{12}$. recti, & huius ſemiſſis a E c, $\frac{1}{24}$. recti, & denique huius ſemiſſis o E c, $\frac{1}{48}$. recti. ᵃ Qualium ergo
a 33. ſexti. partium 48. eſt quadrans Ac, talium 1. erit arcus c o: & idcirco erit c o, $\frac{1}{192}$. totius circumferentiæ. Fiat angulus
b 33. ſexti. c E i, angulo c E o, æqualis; eritq; totus angulus o E i, $\frac{1}{96}$. quatuor rectorum: ᵇ ideoque arcus o i, $\frac{1}{96}$. totius circumferentiæ. Per doctrinam ergo propoſ. 12. lib. 4. Euclid. recta o i, latus erit polygoni circulo circumſcripti, quod lateribus æqualibus 96. continetur. Et quia oſtenſum eſt, E c, ad c o, maiorem habere proportio-
c 15. quin. nem, quam 4673 $\frac{1}{2}$. ad 153. ᶜ habebit quoque diameter A B, ipſius E c, dupla ad o i, ipſius c o, duplam maiorem

Digitized by Google

iorem proportionem quam $4673\frac{1}{2}$ ad 153. Si ergo o i, latus polygoni ponatur 153. [d] erit diameter AB, maior, quam $4673\frac{1}{2}$ Multiplicentur 153. per 96. vt totus ambitus polygoni producatur 14688. [e] habebitq; ambitus polygoni ad diametrum AB, minorem proportionem, quam 14688. ad $4673\frac{1}{2}$. [f] Eſt autem proportio 14688. ad $4673\frac{1}{2}$. minor, quam tripla ſeſquiſeptima; quod 14688. ad $4673\frac{5}{11}$. (qui numerus paulo minor eſt quam $4673\frac{1}{2}$. habeant proportionem triplam ſeſquiſeptimam. [g] Igitur & ambitus Polygoni ad diametrum AB, proportionē habet minorem tripla ſeſquiſeptima: [h] atq; adeo circumferentia, quæ (vt lib. 8. propoſ. 1. probabimus) minor eſt ambitu polygoni, multo minorem proportionē tripla ſeſquiſeptima diametrum habebit; ideoq; circumferētia tripla eſt diametri, & adhuc ſuperat parte, quæ minor eſt $\frac{10}{70}$. hoc eſt, $\frac{1}{7}$. diametri. Nā ſi contineret ter, & $\frac{1}{7}$. haberet circumferentia ad diametrum proportionem triplam ſeſquiſeptimam: ſi vero contineret ter, & plus quam $\frac{1}{7}$. haberet maiorem proportionem, quam triplam ſeſquiſeptimam, cum tamen minorem habeat, vt demonſtratum eſt.
d 10. quin.
e 8. quin.
f 8. quin.
g ſchol. 13. quin.
h 8. quin.

IAM vero in eodem circulo ſit latus hexagoni BG, ſemidiametro ęquale, per coroll. propoſ. 15. lib. 4. Euclid. iunganturque rectæ AG, EG. Et quia triangulum EBG, eſt æquilaterum conſtans ex tribus ſemidiametris; [i] erit angulus BEG, $\frac{2}{3}$. vnius recti, [k] ac proinde eius ſemiſſis BAG, erit $\frac{1}{3}$. vnius recti. Et quia diameter AB, dupla eſt ſemidiametri BG, ſi BG, ponatur 780. erit AB, 1560. [l] Cum ergo quadratum ipſius AB, æquale ſit quadratis rectarum BG, GA; [m] quod angulus AGB, in ſemicirculo rectus ſit: ſi quadratum 608400. ipſius BG, dematur ex 2433600. quadrato ipſius AB. reliquum fiet quadratū 1825200. ipſius AG, cuius radix paulo minor eſt, quam 1351. cum huius quadratum 1825201. mai⁹ ſit, quam 1825200. [n] Igitur AG, ad GB, minorem habebit proportionem, quam 1351. ad 780. ac proinde ſi BG, ponatur 780. [o] erit AG, minor, quam 1351.
i coroll. 3. propoſ. 32. lib. 1.
k 20. tert.
l 47. pri.
m 31. tert.
n 8. quin.
o 10. quin.

SECTO iam angulo BAG, bifariam per rectam AH, ſecantem BG, in M, ductaque HB, erunt triangula BHM, AHB, æquiangula: [p] propterea quod angulus HBM, æqualis eſt angulo HAG, ob eādem baſem GH; ideoq; per constructionē angulo HAB, & angul⁹ rect⁹ H, in ſemicirculo cōmunis. [q] Igitur erit AH, ad HB, vt HB, ad HM. Item AB, ad BH, vt BM, ad MH: & permutando AB, ad BM, vt BH, ad HM: ideoq; erunt tres hæ ꝓportiones AH, ad, HB, HB, ad HM: & AB, ad BM, æquales. Sed vt AB, ad BM, ita eſt vtraque ſimul BA, AG, ad BG, [r] *Nam vt AG, ad AB, ita eſt GM. ad MB; & componendo vt AG, AB, ſimul ad AB, ita GM. MB. ſimul, id eſt, tota GB, ad MB: Et permutando vt AG, AB, ſimul ad GB, ita AB, ad MB.* Igitur erit quoque, vt vtraque AG, AB, ſimul ad GB, ita AH, ad HB. Eſt autem AG, oſtenſa minor, quam 1351. & AB. poſita eſt 1560. & GB, 780. Igitur vtraque AG, AB, ſimul (cum minus efficiant, quam 2911.) [s] minorem habebit proportionem ad GB, quam 2911. ad 780. Quare etiam proportio AH. ad HB, minor erit, quam 2911. ad 780. ac proinde ſi HB, ponatur 780. [t] erit AH, minor, quam 2911. ideoq; eius quadratum minus, quam 8473921. cui ſi addatur quadratum 608400. ipſius BH, fiet quadratum ipſius AB, [u] (quod quadratis rectarum AH, HB, æquale eſt) minus, quam 9082321. ideoque eius radix, vel recta AB, minor, quam $3013\frac{3}{4}$. cum huius quadratum $9082689\frac{1}{16}$. maius ſit, quam 9082321. Igitur AB, ad BH, minorem proportionem habebit, quam $3013\frac{3}{4}$. ad 780. ac proinde ſi BH, ponatur 780. [x] erit AB, minor quam $3013\frac{3}{4}$.
p 21. tert.
q 4. ſexti
r 3 ſexti.
s 8 quinti.
t 10. quin.
u 47. pri.
x 10. quin.



SECTO rurſus angulo HAB, bifariam per rectam AI, ſecantem HB, in N; erunt vt prius, triangula BIN, AIB, æquiangula. Ergo vt ſupra demonſtrabimus, vtramque BA, AH, ſimul ad HB, habere eandem proportionem quam AI, ad IB. Eſt autem BA, oſtenſa minor, quam $3013\frac{3}{4}$. & AH, minor, quam 2911. & ob id earum ſumma minor, quam $5924\frac{3}{4}$. ipſa autem HB, poſita eſt 780. [y] Igitur vtraque BA, AH, ſimul ad HB. hoc eſt, AI, ad IB, minorem habebit proportionem, quam $5924\frac{3}{4}$. ad 780. Si ergo IB, ponatur 780. [z] erit AI. minor, quam $5924\frac{3}{4}$. Et quoniam eſt, vt $5924\frac{3}{4}$. ad 780. ita 1823. ad 240. quod idem numerus fiat ex primo in quartum, qui ex ſecundo in tertium, quæ quidem proportio denominatur à $7\frac{143}{240}$. habebit quoque AI, ad IB, minorem ꝓportionē, quam 1823. ad 240. ideoq; poſita IB, 240. [a] erit AI, minor quam 1823. atq. ob id quadratū ipſi⁹ AI, minus, quam 3323329. cui ſi addatur quadratū 57600. ipſius IB, fiet quadratum ipſius AB, [b] (quod quadratis rectarum AI, IB, æquale eſt) minus quam 3380929. eiuſque radix propterea, vel recta AB, minor quam $1838\frac{9}{11}$ cum huius quadratum $3381252\frac{37}{121}$ maius ſit, quam 3380929. [c] Igitur AB, ad BI, minorem proportionem habebit, quam $1838\frac{9}{11}$. ad 240. ac proinde poſita BI, 240. [d] erit AB, minor, quam $1838\frac{9}{11}$.
y 8. quint.
z 10. quin.
a 10. quin.
b 47 prim.
c 8. quin.
d 10. quin.

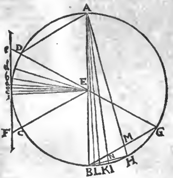
SECTO item angulo IAB, bifariam per rectam AK, oſtendemus eodem modo, vtramque BA, AI, ſimul ad IB, habere eandem proportionem, quam AK, ad KB. Sunt autem BA, AI, ambæ ſimul minores, quam $3661\frac{9}{11}$ (quod BA, oſtenſa ſit minor, quam $1838\frac{9}{11}$ & AI, minor, quam 1823.) & IB, poſita eſt 240. [e] Vtraque ergo BA, AI, ſimul ad IB, hoc eſt, AK, ad KB, minorem habebit proportionem, quam $3661\frac{9}{11}$. ad 240. Vt autem $3661\frac{9}{11}$ ad 240. ita eſt 1007. ad 66. quod idem gignatur numerus ex primo in quartum, qui ex ſecundo in tertium, quæ quidem proportio denominatur à $15\frac{17}{66}$. Igitur AK, ad KB, minorem quoque proportionem habebit, quam 1007. ad 66. ideoque poſita KB, 66. [f] erit AK, minor, quam 1007. ac propterea eius quadratum minus, quam 1014049. cui ſi addatur quadratum 4356. ipſius KB; fiet quadratum ipſius AB, [g] (quod illis duobus æquale eſt) minus quam 1018405. eiuſque radix propterea, id eſt, recta AB, minor, quam $1009\frac{1}{6}$ cum
e 8. quint.
f 10. quin.
g 47 prim.

Digitized by Google

h 8. quin. huius quadratum 1018417 $\frac{13}{36}$ ſit maius, quam 1018405. [h] Quocirca AB, ad BK, minorem proportionem ha-
i 10. quin. bebit, quam 1009 $\frac{1}{6}$. ad 66. atque idcirco poſita BK, 66. [i] erit AB, minor, quam 1009 $\frac{1}{6}$.

SECTO denique angulo KAB, bifariam, per rectam AL, demonſtrabimus eadem ratione, vtramque BA, AK, ſimul ad CK, eſſe, vt AL, ad LB. Sunt autem ambæ BA, AK, ſimul minores, quam 2016 $\frac{1}{6}$ (quod BA,
k 8. quin. ſit oſtenſa minor, quam 1009 $\frac{1}{6}$. & AK, minor, quam 1007.) & BK, poſita eſt 66. [k] Igitur vtraque BA, AK, ſimul ad CK, hoc eſt, AL, ad LB, habebit proportionem minorem, quam 2016 $\frac{1}{6}$ ad 66. atque idcirco ſi LB, pona-
l 10. quin. tur 66. [l] erit AL, minor, quam 2016 $\frac{1}{6}$. ideoque quadratum eius minus quam 4064928 $\frac{1}{36}$. cui ſi addatur qua-
m 47. pri. dratum 4356. ipſius LB; fiet quadratum ipſius AB, [m] (quod duobus illis eſt æquale) minus, quam numerus 4069284 $\frac{1}{36}$. ideoque eius radix, id eſt, recta AB, minor, quam 2017 $\frac{1}{4}$. cum huius quadratum 4069297 $\frac{9}{16}$. ſu-
n 2. quin. peret 4069284 $\frac{1}{36}$. [n] Quamobrem AB, ad BL, minorem proportionem habebit, quam 2017 $\frac{1}{4}$. ad 66. ideoque
o 10. quin. ſi BL, ponatur 66. [o] erit AB, minor, quam 2017 $\frac{1}{4}$.

p 26. tert.



q 2. quin.

r 8. quin.

QVONIAM igitur angulus GAH, angulo HAB, æqualis eſt; [p] erit arcus GH, arcui HB, æqualis: eademque ratione arcus HI, arcui IB, & IK. ipſi KB, & KL, ipſi LB, æqualis erit. Cum ergo GB, ſit $\frac{1}{6}$. totius circumferentiæ, erit HB, $\frac{1}{12}$. & IB, $\frac{1}{24}$. & KB, $\frac{1}{48}$. & LB, $\frac{1}{96}$. ac proinde recta BL, latus erit Polygoni circulo inſcripti, quod 96. lateribus æqualibus continetur. Quoniam vero BL, poſita eſt 66. ſi 66. ducantur in 96. fiet ambitus Polygoni 6336. [q] Quapropter ambitus Polygoni ad diametrum AB, maiorem proportionem habebit, quam 6336. ad 2017 $\frac{1}{4}$. cum diameter AB, oſtenſa ſit minor, quam 2017 $\frac{1}{4}$. [r] Eſt autem proportio 6336. ad 2017 $\frac{1}{4}$. maior, quam tripla ſuperdecupartiens ſeptuageſimas primas, quod proportio 6336. ad 2017 $\frac{65}{223}$. (qui numerus maior eſt, quam 2107 $\frac{1}{4}$.) ſit tripla ſuperdecupartiens ſeptuageſimas primas. Ergo ambitus Polygoni maiorem proportionem habet ad diametrum, quam $3\frac{10}{71}$. Cum igitur circumferentia circuli ſit ma-
s 8. quin. ior ambitu polygoni, [s] habebit circumferentia ad diametrum multo maiorem proportionem, quam $3\frac{10}{71}$. Ac proinde circumferentia diametrum continebit ter, & inſuper partem maiorem, quam $\frac{10}{71}$. Nam ſi contineret $\frac{10}{71}$. haberet circumferentia ad diametrum proportionem $3\frac{10}{71}$. Si autem contineret maiorem partem, quam $\frac{10}{71}$. haberet proportionem minorem, quam $3\frac{10}{71}$. cum tamen maiorem habere demonſtratum ſit. Et quoniam $\frac{1}{8}$. minor eſt, quam $\frac{10}{71}$. liquet ex hac ſecunda parte propoſitionis, circumferentiam continere diametrum ter, & plus, quam $\frac{1}{8}$. diametri. Cum ergo ex prima parte conſtet, circumferentiam continere diametrum ter, & minus, quam $\frac{1}{7}$ diametri: perſpicuum eſt, veram proportionem circumferentiæ ad diametrum conſiſtere inter triplam ſeſquiſeptimam, & triplam ſeſquioctauam.

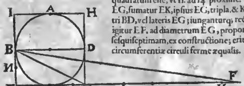
COROLLARIVM.

ITAQVE ſi diameter per $3\frac{1}{7}$. multiplicetur, gignetur numerus maior, quam circumferentia: ſi vero multiplicetur per $3\frac{10}{71}$. procreabitur minor numerus, quam circumferentia. E contrario, ſi circumferentia diuidatur per $3\frac{1}{7}$. producetur numerus minor, quam diameter: ſi vero diuidatur per $3\frac{10}{71}$. prodibit numerus maior, quam diameter.

PROPOSITIO III.

CIRCVLVS quilibet ad quadratum diametri proportionem habet, quam 11. ad 14. proxime.

SIT circulus ABCD, & quadratum diametri BD, circulo circumſcriptum EGHI. Dico circulum ad quadratum eſſe, vt 11. ad 14 proxime. Producto enim latere EG, ſumatur EK, ipſius EG, tripla, & KF, ſeptima pars diametri BD, vel lateris EG; iunganturq; rectæ BG, BF. Quoniam igitur EF, ad diametrum EG, proportionem habet triplam ſeſquiſeptimam, ex constructione; erit per præcedentem EF, circumferentiæ circuli ferme æqualis. Cum ergo BE, æqualis



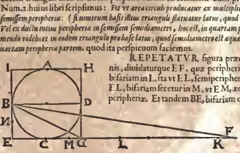
ſit ſemidiametro: erit per 1. propoſ. triangulum BEF, circulo æquale proxime: Triangulum autem BEG, quarta
a 1. ſexti. pars erit quadrati EH. Quia vero poſito latere EG, 7. recta EF, eſt 22. [a] erit triangulum BEF, hoc eſt, circulus ABCD, ad triangulum BEG, vt 22. ad 7. Sed poſito triangulo BEG, 7. quadratum EGHI, ipſius quadruplum, eſt 28. Igitur circulus ad quadratum, eſt ferme, vt 22. ad 28. hoc eſt, vt 11. ad 14. quod erat demonſtrandum.

DE A-

DE AREA CIRCVLI, INVENTIONEQVE CIRcumferentiæ ex diametro, & diametri ex circumferentia.

CAPVT VII.

QVONIAM triangulum rectangulum, cuius vnum latus circa angulum rectum ſemidiametro circuli, & alterum peripheriæ eiuſdem æquale eſt. [a] areæ circuli adæquatur: huius autem trianguli area ex ductu perpendicularis in ſemiſſem baſis producitur, vt cap. 2. Num. 2. huius libri ſcripſimus: *Fit vt area circuli producatur ex multiplicatione ſemidiametri in ſemiſſem peripheriæ: (ſi nimirum baſis illius trianguli ſtatuatur latus, quod peripheriæ æquale eſt.) Vel ex ductu totius peripheriæ in ſemiſſem ſemidiametri, hoc eſt, in quartam partem diametri: (ſumendo videlicet in eodem triangulo pro baſe latus, quod ſemidiametro eſt æquale.) Vel denique ex ductu totius diametri in quartam peripheriæ partem.* quod ita perſpicuum faciemus. *a 1. de Dimenſ. circuli.* *Area circuli trib. viis ex cognita diametro, & circumferentia.*



REPETATVR figura præcedentis propoſitionis, diuidaturque EF, quæ peripheriæ circuli eſt æqualis, biſariam in L, ita vt EL, ſemiperipheriæ ſit æqualis: Item EL, biſariam ſecetur in M, vt EM, æqualis ſit quartæ parti peripheriæ. Et tandem BE, biſariam quoque ſecetur in N, vt EN, ſemiſſis ſit ſemidiametri BE, hoc eſt, quarta pars totius diametri. [b] Et quia triangulum BEF, æquale eſt circulo ABCD; erit quoq; rectangulū ſub ſemidiametro BE, & ſemiperipheria EL, comprehenſum (quod per propoſitionem 1. lib. 7. huius, triangulo æquale eſt.) eidem circulo æquale; quod eſt primum. *b 1. de Dimenſ. circuli.*

NON aliter rectangulum comprehenſum ſub tota peripheria EF, & EN, quarta parte diametri (quod per propoſ. 1. lib. 7. huius, eidem triangulo æquale eſt) eidem circulo erit æquale, quod eſt ſecundum.

DENIQVE quia quatuor lineæ EI, EB, EL, EM, proportionales ſunt, quod tam priores duæ, quam poſteriores duæ habeant proportionem duplam; [c] erit rectangulum ſub EI, diametro, & EM, quarta parte peripheriæ comprehenſum, rectangulo ſub EB, ſemidiametro, & EL, ſemiperipheriæ comprehenſo æquale. Cum ergo hoc in prima parte oſtenſum ſit æquale circulo, erit quoque illud eidem circulo æquale. quod eſt tertium. *c 16. ſexti.*

VT fractiones interdum vitentur, ducenda erit tota diameter in totam circumferentiam. Quarta enim pars numeri producti area erit circuli: propterea quod numerus productus quadruplus eſt numeri producti ex ſemidiametro in ſemicircumferentiam, vt liquet.

SEQVITVR ex prima parte, aream ſemicirculi produci ex ſemidiametro in quartam circumferentiæ: quia nimirum producitur ſemiſſis eius, quod fit ex ſemidiametro in ſemiſſem peripheriæ. Item aream Quadrantis procreari ex ſemidiametro in octauam partem circumferentiæ: Et aream octauæ partis ex ſemidiametro in ſextamdecimam partem circumferentiæ: Et aream ſextædecimæ partis ex ſemidiametro in $\frac{1}{32}$. circumferentiæ, & ſic deinceps: quia ſemper producitur ſemiſſis præcedentis producti; quemadmodum & partes circuli ſemiſſes ſunt præcedentium partium: nimirum Quadrans ſemiſſis eſt ſemicirculi; & octaua pars ſemiſſis Quadrantis; & ſextadecima pars ſemiſſis octauæ partis, &c. *Area ſemicirculi, Quadrantis octaua partis, &c.*

2. IGITVR vt area circuli reperiatur, neceſſe eſt tam eius diametrū. quam circumferentiam eſſe cognitam. Quare trademus hic regulas nonnullas, per quas ex data diametro circumferentia tum maior, tum minor, quam vera, ex propoſ. 2. de Dimenſione circuli inueniatur. Deinde alias regulas præſcribam, per quas area circuli tum maior, tum minor, quam vera, vel ex ſola diametro, vel ex ſola circumſtantia cognita eruatur.

I.

EX data diametro circuli circumferentiam vera maiorem reperire.

FIAT vt 7. ad 22. ita data diameter, verbi gratia, 28. ad aliud, procreabiturque circumferentia 88. maior quam vera. [a] Quoniam enim proportio circumferentiæ ad diametrum minor eſt, quam tripla ſeſquiſeptima, proportio autem 88. ad 28. eſt tripla ſeſquiſeptima, eadem videlicet, quæ 22. ad 7. [b] erit numerus 88. maior, quam circumferentia circuli, cuius diameter eſt 28. *a 2. de Dimenſ. circuli.* *b 10. quin.*

II.

EX data diametro circuli circumferentiam vera minorem elicere.

FIAT vt 71. ad 223. ita data diameter 28. ad aliud, producetur que circumferentia $87\frac{57}{71}$. minor quam vera [a] Quoniam enim proportio circumferentiæ ad diametrum maior eſt, quam tripla ſuperdecupartiens ſeptuageſimas primas; proportio autem $87\frac{57}{71}$. ad 28. eſt tripla ſuperdecupartiens ſeptuageſimas primas, nimirum eadem, quæ 223. ad 28. [b] erit circumferentia circuli, cuius diameter 28. maior, quam $87\frac{57}{71}$. *a 2. de Dimenſ. circuli.* *b 10. quin.*

I I I.

EX data circuli circumferentia, diametrum verâ maiorem indagare.

FIAT vt 223. ad 71. ita data circumferentia, verbi gratia 88. ad aliud. Productus enim numerus $28\frac{4}{223}$ *dabit diametrum vera maiorem.* [a] *Cum enim circumferentia ad diametrum habeat maiorem proportionem, quam triplam ſuperdecupartientem ſeptuageſimas primas, hoc eſt, maiorem quam 223. ad 71. habebit quoque data circumferentia 88. ad ſuam diametrum proportionem maiorem, quam ad* $28\frac{4}{223}$. [b] *ac proinde diameter circumferentiæ 88. minor erit, quam* $28\frac{4}{223}$.

a 2. de Dimenſ. circuli.
b 10 quin.

I V.

EX data circuli circumferentia diametrum inueſtigare vera minorem.

FIAT vt 22. ad 7. ita circumferentia data 88. ad aliud. Numerus enim procreatus 28. offeret diametrum vera minorem. [a] Cum enim circumferentia ad diametrum habeat minorem proportionem, quam triplam ſeſquiſeptimam, hoc eſt, quam 22. ad 7. habebit quoque circumferentia data 88. ad ſuam diametrum proportionem minorem, quam ad 28. [b] atque idcirco diameter circumferentiæ 88. maior erit, quam 28.

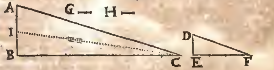
a 2. de Dimenſ. circuli.
b 10 quin.

3. IAM vero vt doceamus, qua ratione area circuli vel ex ſola diametro cognita, vel ex ſola circumferentia cognoſcatur, ita vt neceſſe non ſit ex diametro circumferentiam, vel ex circumferentia diametrum inueſtigare, demonſtrandæ prius erunt ſequentes tres propoſitiones, quarum primam deinde lib. 8. propoſ. 2. ex Pappo Alexandrino aliter quoque demonſtrabimus,

PROPOSITIO I.

Circulorum diametri inter ſe ſunt, vt circumferentiæ.

SINT diametri duorum circulorum A B, D E, & rectæ circumferentijs æquales BC, EF, quæ cum diametris angulos rectos efficiant B, E, compleanturque triangula ABC, DEF. Dico ita eſſe diametrum A B, ad diametrum DE, vt eſt circumferentia BC, ad circumferentiam EF. Diametris enim AB, DE, inueniatur tertia proportionalis G: Et tribus rectis BC, EF, DE, quarta proportionalis H. Et quia continue proportionales ſunt AB, DE; G; [a] erit quadratum ex A B, ad quadratum ex D E, vt A B, ad G. [b] Sed vt quadratum ex AB, ad quadratum ex DE, ita eſt circulus diametri AB, ad circulum diametri DE. [c] Et vt circulus ad circulum, ita eſt triangulum ABC, ad triangulum DEF, quod hæc triangula circulorum ſint dupla. (Nam diuiſa diametro AB, bifariam in I, ductaque recta IC, [d] erit triangulum IBC, circulo æquale: ac proinde cum [e] triangula AIC, IBC, æqualia ſint; erit triangulum ABC, duplum trianguli IBC, hoc eſt, circuli, cuius diameter AB. Eademque ratione triangulum DEF, duplum erit circuli, cuius diameter DE.) Igitur erit quoque triangulum ABC, ad triangulum DEF, vt AB, ad G. At vt triangulum ABC, ad triangulum DEF, ita eſt AB, ad H, quod vtraque proportio compoſita ſit ex iiſdem proportionibus. ([f] Nam proportio trianguli ABC, ad triangulum D E F, compoſita eſt ex proportione baſis A B, ad baſem D E, & ex proportione altitudinis B C, ad altitudinē EF, hoc eſt, ex proportione DE, ad H, quæ ex conſtructione eadem eſt, quæ BC, ad EF. Proportio autem AB, ad H, componitur quoque ex proportionibus A B, ad D E, & D E, ad H. ex defin.) Igitur erit, vt A B, ad G, ita AB, ad H; [g] ideoque G, & H, æquales erunt: [h] ac proinde erit DE, ad G, vt DE, ad H. Eſt autem per conſtructionem AB, diameter ad diametrum D E, vt D E, ad G, hoc eſt, vt DE, ad H. Et vt DE, ad H, ita per conſtructionem, circumferentia BC, ad circumferentiam EF. Igitur erit quoque diameter AB, ad diametrum DE, vt circumferentia BC, ad circumferentiam E F. quod erat demonſtrandum.



a coroll. 20 ſexti.
b 2. duodec.
c 15. quin.
d 1 de Dimenſ. circuli.
e 38. pri
f ſchol. 23. ſexti.
g 9. quin.
h 7. quin

PROPOSITIO II.

PROPORTIO quadrati ex diametro cuiuſlibet circuli deſcripti ad circuli aream maior eſt, quam 14. ad 11. minor autem, quam 284. ad 223.

[a] QVONIAM enim quadratum diametri cuiuſuis circuli ad quadratum diametri alterius circuli eſt, vt circulus ad circulum: erit permutando quadratum diametri ad circulum eiuſdem diametri, vt quadratum alterius diametri ad circulum eiuſdem diametri. Poſita autem diametro alicuius circuli 1. proportio quadrati ipſius ad circulum maior eſt, quam 14. ad 11. minor autem, quam 284. ad 223. Igitur proportio quadrati diametri cuiuſuis alterius circuli ad ipſum circulum, maior quoque erit quam 14. ad 11. minor autem, quam 284. ad 223.

a 2. duodec.

QVOT-

QVOD autem proportio quadrati diametri 1. ad ſuum circulum maior ſit, quam 14. ad 11. minor vero, quam 284. ad 223 ita perſpicuũ fiet Si fiat vt 7. ad 22. ita diameter 1. ad aliud, prodibit ex regula prima Num. 2. circumferentia $3\frac{1}{7}$. vel [a] $\frac{22}{7}$ maior, quam vera. Igitur ex eius ſemiſſe $\frac{11}{7}$. in $\frac{1}{2}$. ſemidiametrum procreabitur, vt Num. 1. dictum eſt, area circuli $\frac{11}{14}$. maior tamen, quam vera: [b] Ac proinde quadratum diametri 1. quod eſt 1. ad veram aream circuli, quæ minor eſt, quam $\frac{11}{14}$. maiorem proportionem habebit, quam ad $\frac{11}{14}$. Cum ergo ſit 1. ad $\frac{11}{14}$. vt 14. ad 11. (Quoniam enim ex propoſitione 2. Minutiarum ad finem lib. 9. Euclid. eadem proportio eſt numeratoris 11. ad denominatorem 14. quæ minutiæ $\frac{11}{14}$. ad ſuum integrum 1. erit conuertendo, vt 14. ad 11. ita 1. ad $\frac{11}{14}$.) habebit quoque quadratum diametri 1. ad aream circuli veram, maiorem proportionem, quam 14. ad 11. quod eſt propoſitum. Conſtat ergo prima propoſitionis pars. [b] 2. quin.

RVRSVS ſi fiat, vt 71. ad 223. ita diameter 1. ad aliud, reperietur per regulam 2. Num. 2. circumferentia circuli $3\frac{10}{71}$. vel [a] $\frac{223}{71}$. minor, quam vera. Igitur, vt Num. 1. dictum eſt, ex eius ſemiſſe $\frac{223}{142}$. in $\frac{1}{2}$. ſemidiametrum producetur area circuli $\frac{223}{284}$. minor tamen quam vera: [c] Ac proinde quadratum diametri 1. quod eſt 1. ad veram circuli aream, quæ maior eſt, quam $\frac{223}{284}$. minorem habebit proportionem, quam ad $\frac{223}{284}$. Cum ergo ſit 1. ad $\frac{223}{284}$. vt 284 ad 223. (Nam quia ex propoſ. 2. Minutiarum, eadem eſt proportio numeratoris 223. ad denominatorem 284. quæ minutiæ $\frac{223}{284}$. ad ſuum integrum 1. erit conuertendo, vt 284 ad 223. ita 1. ad $\frac{223}{284}$. habebit quoque quadratum diametri 1. ad aream veram circuli minorem proportionem, quam 284. ad 223. quod eſt propoſitum. Conſtat ergo ſecunda etiam pars propoſitionis. [c] 8. quin.

PROPOSITIO III.

PROPORTIO quadrati à circumferentia circuli cuiuſuis deſcripti ad circuli aream maior eſt, quam 892. ad 71. minor autem, quam 88. ad 7,

[a] QVONIAM enim circumferentia cuiuſuis circuli ad circumferentiam alterius circuli eſt, vt diameter ad diametrum: [b] erit quoque quadratum circumferentiæ ad quadratum circumferentiæ, vt quadratum diametri, ad quadratum diametri. [c] Sed vt quadratum diametri ad quadratum diametri, ita eſt circulus ad circulum. Igitur erit quadratum quoque circumferentiæ ad quadratum circumferentiæ; vt circulus ad circulum: Et permutando quadratum circumferentiæ, ad ſuum circulum, vt quadratũ alterius circumferentiæ ad ſuum circulum. Poſita autem circumferentia alicuius circuli 1. proportio quadrati circumferentiæ illius circuli ad circulum maior eſt, quam 892. ad 71. minor vero, quam 88. ad 7. Igitur & proportio quadrati circumferentiæ cuiuslibet alterius circuli ad ipſum circulum maior erit, quam 892 ad 71. minor autem, quam 88. ad 7. [a] 1. huius Num. 9. [b] 22. ſex. [c] 2. duode.

QVOD autem proportio quadrati ex circumferentia 1. deſcripti, ad ſuum circulum maior ſit, quam 892. ad 71. minor vero, quam 88. ad 7. ſic demonſtrabimus. Quoniam ſi fiat, vt 223. ad 71. ita data circumferentia 1. ad aliud, diameter procreatur $\frac{71}{223}$. maior, quam vera, vt ex 3. regula Num. 2. conſtat. fit vt $\frac{1}{2}$. ſemiſſis circumferentiæ ducta in $\frac{71}{446}$. ſemiſſem diametri inuentæ producat aream circuli $\frac{71}{892}$. vera maiorem, vt Num. 1. dictum eſt. [d] Igitur quadratum circumferentiæ 1. quod eſt 1. ad veram aream circuli, quæ minor eſt, quam $\frac{71}{892}$. maiorem proportionem habebit, quam ad $\frac{71}{892}$. Vt autem 1. ad $\frac{71}{892}$. ita eſt, ex propoſ. 2. minutiarum, & conuertendo, 892. ad 71. Igitur & quadratum circumferentiæ 1. ad veram circuli aream maiorem proportionem habebit, quam 892. ad 71. quod eſt propoſitum. Vera ergo eſt prior propoſitionis pars. [d] 8. quin.

RVRSVS, quia ſi fiat, vt 22. ad 7. ita data circumferentia 1. ad aliud, diameter producitur $\frac{7}{22}$. minor quam vera: fit vt $\frac{1}{2}$. ſemiſſis circumferentiæ ducta in $\frac{7}{44}$. ſemiſſem diametri inuentæ producat aream circuli $\frac{7}{88}$. vera minorem, vt ex ijs conſtat, quæ Num. 1 diximus. [e] Igitur quadratum circumferentiæ 1. quod eſt 1. ad aream veram circuli, quæ maior eſt, quam $\frac{7}{88}$. minorem habebit proportionem, quam ad $\frac{7}{88}$. Vt autem 1. ad $\frac{7}{88}$. ita eſt, ex propoſitione 2. Minutiarum, & conuertendo, 88. ad 7. Ergo etiam quadratum circumferentiæ 1. ad aream circuli minorem proportionem habebit, quam 88. ad 7. quod eſt propoſitum. Vera igitur etiam eſt poſterior pars propoſitionis. [e] 8. quin.

4 HIS ita demonſtratis, ſequuntur iam quatuor regulæ, per quas aream circuli propoſiti ſiue maiorem, ſiue minorem vera, vel ex ſola diametro, vel ex ſola circumferentia cognita coniicere licebit.

I.

EX diametro aream circuli vera maiorem inueſtigare.

FIAT vt 14. ad 11. ita quadratum datæ diametri ad aliud. Productus enim numerus dabit aream circuli vera maiorem. [a] Cum enim maior ſit proportio quadrati diametri ad aream circuli, quam 14. ad 11. Sit autem quadratum diametri datæ ad aream inuentam, vt 14. ad 11. erit quoque maior proportio quadrati diametri datæ ad veram aream circuli, quam ad aream inuentam. [b] Ac proinde vera circuli area erit minor, quam inuenta: hoc eſt, area inuenta maior erit, quam vera. [a] 2. Nũ. 9. [b] 10. quin.

II.

EX diametro aream circuli vera minorem inueſtigare.

FIAT vt 284. ad 223. ita quadratum datæ diametri ad aliud. Numerus enim procreatus aream circuli vera minorem efficiet. [a] Cum enim minor ſit proportio quadrati diametri datæ ad aream circuli, quam 284. ad 223. ſit autem quadratum diametri datæ ad aream inuentam, vt 284. ad 223. erit quoque minor proportio quadrati diametri datæ ad veram aream circuli, quam ad aream inuentam: [b] Atque idcirco vera area circuli maior erit, quam inuenta, hoc eſt, inuenta area erit minor, quam vera. [a] 2. Nu. 9. [b] 10. quin.

III.

EX circumferentia aream circuli vera maiorem colligere.

FIAT vt 892 ad 71. ita quadratum data circumferentia ad aliud. Procreatus namque numerus aream circuli vera maiorem indicabit. [a] Cum enim maior ſit proportio quadrati circumferentiæ ad aream circuli, quam 892. ad 71. Sit autem quadratum datæ circumferentiæ ad aream inuentam, vt 882. ad 71. erit quoque maior proportio quadrati datæ circumferentiæ ad veram aream circuli, quam ad aream inuentam: [b] ideoq; vera circuli area minor erit, quam inuenta; hoc eſt, inuenta area maior erit, quam vera.

a 3. Nu. 3. *b 10. quin.*

IV.

EX circumferentia aream circuli vera minorem concludere.

FIAT vt 88 ad 7 ita quadratum circumferentia data ad aliud. Numerus namq; qui gignitur, erit area circuli minor, quam vera. [a] Cum enim minor ſit proportio quadrati circumferentiæ datæ ad aream circuli, quam 88. ad 7. ſit autem quadratum circumferentiæ datæ ad aream inuentam, vt 88. ad 7. erit quoque minor proportio quadrati datæ circumferentiæ ad veram aream circuli, quam ad aream inuentam: [b] Ac proinde area circuli vera erit maior, quam innenta: hoc eſt, area inuenta minor erit, quam vera.

a 3. Nu. 3. *b 10. quin.*

5. OMNES hæ viæ, quibus area circuli inquiritur, pendent ex proportione circumferentiæ circuli ad diametrum, quam Archimedes inuenit eſſe quidem minorem tripla ſeſquiſeptima, maiorem vero tripla ſuperdecupartiente ſeptuageſimas primas: ac proinde cum hæ proportiones accuratæ non ſint, neceſſe eſt, aream inuentam vel veram magnitudinem circuli ſuperare, vel ab ea deficere, vt ex ſuperioribus regulis liquet. Et quamuis differentia inter veram aream, atque inuentam in paruis circulis perexigua ſit, in magnis tamen circulis negligenda non videtur. Quamobrem qui magis accuratam circuli aream deſiderat, aſſumat proportionem diametri ad circumferentiam vero propinquiorem, quam poſteriores Geometræ, præſertim Ludolphus à Collen, & Chriſtophorus Gruenbergerus inuenerunt, vt ſequitur.

Accuratior proportio diametri ad circumferentiam.

Diameter	Circumferentia maior quam vera
100000000000000000000.	31415926535897932384 7.

Diameter	Circumferentia minor quam vera
100000000000000000000.	31415926535897932384 6.

$$3\frac{14159265358979323847}{100000000000000000000}$$

$$3\frac{14159265358979323846}{100000000000000000000}$$

Ita vt proportio circumferentiæ ad diametrum maior, quam vera, denominetur ab hoc primo numero, quę minor eſt, quam tripla ſeſquiſeptima. Proportio vero minor, quam vera, denominetur ab hoc ſecundo numero quæ maior eſt, quam tripla ſuperdecupartiens ſeptuageſimas primas: qui denominatores habentur, ſi vtraq; circumferentia per diametrum diuidatur.

Accuratior inuentio circũferẽtia ex data diametro & diametri ex data circumferentia.

ITAQVE ſi fiat, vt diameter prædicta ad circumferentiam vera maiorem, ita diameter alicuius circuli data ad aliud, reperietur circumferentia maior, quam vera, minus tamen differens à vera, quam illa Archimedis, quæ Num. 2 ex regula 1. inuenta fuit. Si autem fiat, vt eadem diameter prædicta ad circumferentiam vera minorem, ita data diameter alicuius circuli ad aliud, reperietur circumferentia minor, quam vera, magis tamen ad veram accedens, quam illa Archimedis, quæ Num. 2. ex reg. 2. inuenitur. E contrario vero, ſi fiat vt prædicta circumferentia minor, quam vera, ad diametrum, ita circumferentia alicuius circuli data ad aliud, prodibit diameter maior quam vera: Si autem fiat, vt circumferentia prædicta maior, quam vera, ad diametrum, ita circumferentia alicuius circuli data ad aliud, proueniet diameter minor, quam vera. Vtraque tamen diameter inuenta magis ad veram accedet, quam illa Archimedis, quæ Num. 2. per reg. 3. & 4. inuenta fuit.

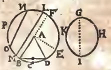
Accuratior inuentio area circuli.

INVENTA circumferentia ex diametro, vel diametro ex circumferentia, reperietur area circuli, vt Num. 1. traditum eſt: ſi nimirum ſemidiameter in ſemicircumferentiam ducatur: vel tota circumferentia in ſemiſſem ſemidiametri: vel denique tota diameter in quartam partem circumferentiæ. quæ quidem area minus à vera diſtabit, quam illa, quæ ex proportione Archimedis inuenitur. Sed quia difficilius eſt per magnos numeros calculum inſtituere, quam per minores, vſus artificum obtinuit, vt proportio Archimedis ad calculum adhibeatur. Quando tamen deſideratur accuratior calculus, vtendum erit poſteriori hac proportione Ludolphi, præſertim in maioribus circulis.

DE AREA SEGMENTORVM CIRCVLI.

CAPVT VIII.

SIT primum propoſitus ſector circuli ABCD, comprehenſus duabus ſemidiametris AB, AD, & arcu BCD. Huius aream ita explorabimus. Si tam ſemidiameter AB, nota ſit, nimirum palmorum 7. quam arc⁹ BCD, palmorum videlicet 3$\frac{4}{7}$, ducatur ſemidiameter 7. in $1\frac{1}{8}$ id eſt, in ſemiſſem arcus, Productus enim numerus 12$\frac{5}{8}$. palm. erit area ſectoris ABCD, vt demonſtrabimus Si autem neque ſemidiameter AB, neque peripheria BCD, data ſit, menſuranda erit ſemidiameter aliqua menſura nota, & ſecundum eandem menſuram inuenienda circumferentia circuli per regulas antecedentis cap. nec non recta BD. Deinde fiat, vt AB, nota in aſſumpta menſura ad ſinum totũ 100000. ita BD, nota in eadem menſura aſſumpta ad aliud. Numerus enim procreatus dabit rectam BD, cognitam in partibus ſinus totius. Huius autem medietas ſinus erit ſemiſſis arcus BD: ac proinde ex tabula ſinuum ſemiſſis BC, in gradibus nota erit, ideoque totus arcus BD, non ignorabitur, Et quia tota circuli circumferentia nota facta eſt in aſſumpta menſura: ſi fiat vt grad. 360 ad totam circumferentiã in aſſumpta mẽſura cognitam, ita arcus BD, in gradibus cognitus ad aliud, cognoſcetur idem arcus BD, in menſura aſſumpta. Quare, vt prius, area ſectoris ABCD, reperietur. Poſſent quoq; gradus in arcu BD, contenti inueſtigari beneficio quadrantis alicuius in gradus diuiſi, adhibita doctrina cap. 2. lib. 1. Num. 10. tradita, vt minuta etiam cognoſcantur, quando in arcu BD vltra gradus aliqua particula ſupereſt.



AREAM porro ſectoris produci ex ſemidiametro in ſemiſſem arcus ſectoris, ſic demonſtro. Sit quadrans BE, & ſemicirculus BEF.[a] Et quoniam eſt, vt arcus BD, ad quadrantem BE, ita ſector ABCD, ad ſectorem ABDE: erit quoq; ex ſcholio propoſ. 22. lib. 5. Euclid. vt arcus BD, ad quadruplum quadrantis BE, hoc eſt, ad totam circũferentiam, ita ſector ABCD, ad quadruplum ſectoris ABDE. hoc eſt, ad totum circulum.[b] Vt autem arcus BD, ad totam circumferentiam, ita eſt BC ſemiſſis arcus BD, ad BEF, ſemiſſem totius circumferentiæ. Igitur erit quoq; vt BC ad BEF, ita ſector ABCD ad totum circulum.[c] Sed vt BC, ad BEF. ita eſt rectangulum ſub AB, BC. ad rectangulum ſub AB. BEF. Ergo erit quoque ſector ABCD, ad totum circulum, vt rectangulum ſub AB, BC, ad rectangulum ſub AB. BEF. Cum ergo vt cap. 7. Num. 1. tradidimus, circulus æqualis ſit rectangulo ſub AB, BEF,[d] erit quoque ſector ABCD, rectangulo ſub AB, BC, æqualis. quod erat demonſtrandum.

a 33. ſexti.
b 15. quin.
c 1. ſexti.
d 14. quinti.

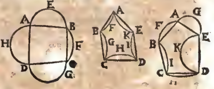
EADEM ratione procreabitur ſector ABFDA: ex ſemidiametro AB, in ſemiſſem arcus BFD.

2 SIT deinde ſegmentum BCD.[e] Inuento centro A, arcus BCD, & cognitis per aliquam menſuram lateribus trianguli ABD. & arcu BCD, in eadem menſura, vt Num. 1. diximus, inueſtigetur tam area ſectoris ABCD, quam trianguli ABD. Hæc enim detracta ex illa relinquet aream ſegmenti propoſiti BCD.

e 25. tertij

3 SIT præterea figura lenticularis duobus arcubus GHI, GKI. contenta. Ducta recta GI, inquiratur, vt Num. 2. docuimus, vtriuſq; ſegmenti GHI, GKI, area. Summa n. ex duabus hiſce areis conflata, erit area propoſitæ figuræ GHIK. Quod ſi ſegmenta GHI, GKI, ſint æqualia, ſatis erit vnius aream inueſtigare. Hæc namq; duplicata dabit propoſitæ figuræ GHIK, aream.

4 NON aliter metiemur figuras ex varijs circulorum ſegmentis coagmentatas, ſiue omnes circumferentiæ extrorſus vergant, ſiue introrſum, ſiue partim introrſum, & partim extrorſum. Vt in tribus his figuris, ſi arcubus ſubtendantur chordæ, metiemur in prima quadrilaterum ABCD, vt cap. 1. vel 3. docuimus: & ſegmenta AEB. BFC. CGD, DHA, vt hoc cap. Num. 2. traditum eſt. Si enim hęc ſegmenta quadrilatero adijciantur, quod omnia extrorſum tendant, conflabitur area figurę AEBFCGDH, ex quatuor arcubus compoſitæ.



IN ſecunda autem metiemur pentagonum ABCDE, per ea, quæ cap. 4. ſcripta ſunt: Ex quo ſi dememus quinq; ſegmẽta introrſum vergentia, quæ quidem ex ijs, quæ Num. 2. huius cap. ſcripſimus, cognoſcentur, reliqua fiet area figuræ AFBGCHDIEK, ex quinque arcubus conflatæ.

IN tertia denique pentagono ABCDE, adijciemus tria ſegmenta, AFB, AGE, CHD, extrorſum vergentia & ex compoſito numero duo ſegmenta BIC, DKE, introrſum vergentia tollem⁹, vt area relinquatur figuræ AFBICHDKEG, ex quinque arcubus compoſitæ. Atque hoc modo agrum quantumuis irregularem metiri licebit.

5 SIT denique in prima figura huius cap. ſegmentum circuli LMON, comprehenſum duabus rectis LM, NO, & duobus arcubus LN, MO. Exploretur, vt Num. 2. declaratum eſt, area vtriuſque ſegmenti PLM. PNO. Minor enim area PNO, detracta ex maiori PLM, reliquam faciet aream propoſiti ſegmenti LMON.

6 VT quartus hic liber concludatur, lubet hic appendicis loco regulas quaſdam alias à noſtro inſtituto non alienas ſubiungere.

I.

DATA circuli area, circumferentiam, ac diametrum cognoſcere.

FIAT vt 7. ad 88. ita data area ad aliud. Productus enim numerus erit quadratũ circũferentiæ vero maius, vt ex 4. reg. Num. 4, cap. 7. liquet. Radix ergo quadrata numeri producti dabit circumferentiam vera maiorem. Quod ſi fiat, vt 71. ad 892. ita data area ad aliud, gignetur quadratum circumferentiæ vero minus, vt conſtat ex 3. reg. Num. 4. cap. 7. Ac proinde eius radix quadrata circumferentiam vera minorem indicabit.

FIAT rurſus, vt 223. ad 284. ita area propoſita ad aliud. Procreatus namq; numerus erit quadratũ diametri vero maius, vt ex 2 reg. Num. 4. cap. 7. perſpicuum eſt. Radix ergo quadrata numeri producti diametrum exhibebit vera maiorem. Quod ſi fiat, vt 11. ad 14. ita area data ad aliud, reperietur quadratum diametri vero minus, vt ex reg. 1. Num. 4. cap. 7. colligitur Ac proinde radix eius quadrata diametrum offeret vera minorem.

I I.

DATO arcu cuiuſuis circuli, diametrum circuli in numeris inueſtigare.

f corol. 1. tertii. g 35. tertii.

SIT datus arcus ABC. Ducta chorda AC, ſectaque bifariam in F, ducatur per F, perpendicularis FB,[f] quæ per centrum circuli tranſibit,[g] ideoque rectangulum ſub CF, AF, hoc eſt, quadratum ex AF, æquale erit rectangulo ſub BF, & reliqua portione diametri. Si igitur AF. FB, per aliquam menſuram fiant notæ, & quadrans numerus rectæ AF, diuidatur per FB, prodibit reliqua portio diametri FD, quæ addita perpendiculari FB, conficiet totam diametrum BD, notam in eadem menſura, in qua AF, FB, cognitæ ſunt.



GEOMETRICE eadem portio FD, reperietur, ſi duabus FB, AF, inueniatur tertia proportionalis FD: propterea quod ex ſcholio propoſ. 13. lib. 6. Eucl. AF, media proportionalis eſt inter diametri ſegmenta.

I I I.

DATIS diametris duorum circulornm, vel circumferentijs: Aut duobus lateribus homologis duarum figurarum ſimilium, ſimiliterque poſitarum: quam proportionem circuli, vel figuræ inter ſe habeant, cognoſcere.

QVONIAM circuli, & figuræ ſimiles ſimiliterq; poſitæ, habent duplicatam proportionem diametrorum vel circumferentiarum, & laterũ homologorum: ſi maior diameter, vel circumferentia per minorem, & maius latus homologum per minus diuidatur, prodibit denominator proportionis, quam maior diameter, circumferentiaue ad minorem, vel maius latus homologum ad minus habet. Si igitur hic denominator in ſe ducatur, producetur denominator duplicatæ proportionis, quam videlicet circulus, vel figura ad minorem habet. Vt ſi diameter vnius circuli ſit 56. & circumferentia 176. Alterius autem circuli diameter 14. & circumferentia 44. Diuiſis 56. per 14. vel 176. per 44. fit Quotiens 4. qui ductus in ſe producit 16, denominatorem proportionis maioris circuli ad minorem. Eandemque proportionem habebit figura ad minorem ſimilem, ſimiliterque poſitam, ſi latera homologa ſint 56. & 14. vel 176. & 44.

I V.

DATIS pluribus circulis, quorum diametri, vel circumferentiæ cognitæ ſint: Item pluribus figuris ſimilibus ſimiliterque poſitis, quarum latera homologa ſint nota: Inuenire diametrum, vel circumferentiam, cuius circulus omnibus circulis propoſitis æqualis ſit. Item latus reperire, cuius figura ſimilis, ſimiliterque poſita æqualis ſit omnibus propoſitis figuris.

MVLTIPLICENTVR diametri, vel circumferentiæ, aut latera homologa in ſe, & numeri producti in vnam ſummam colligantur. Radix enim quadrata huius ſummæ erit diameter, circumferentiaue, aut latus homologum quæſitum. Verbi gratia, ſi ſint quatuor diametri, circumferentiæue circulorum, aut latera homologa ſimilium figurarum, ſimiliterque poſitarum, 84. 3. 4. 12. atque in ſe multiplicentur, gignentur numeri 7056 9. 16. 144. quorum ſumma 7225. Radix ergo quadrata huius ſummæ 85. erit diameter, circumferentiaue circuli, aut latus homologum, quod quæritur: ita vt circulus, cuius diameter, vel circumferentia eſt 85. aut figura ſupra rectam 85 ſimilis, ſimiliterq; poſita figuris datis, æqualis ſit quatuor circulis, aut figuris propoſitis. Nam

h 2. duod.

cum quadratum 7225. radicis 85. æquale ſit quatuor quadratis 7056. 9. 16. 144. radicum 84. 3. 4. 12. [h] Circuli autem eandem habeant proportionem, quam quadrata diametrorum: ac proinde quam quadrata circumferentiarum; quod circumferentiæ diametris ſint proportionales: Item figuræ ſimiles, ſimiliterque poſitæ inter ſe ſint, vt quadrata laterum homologorum, [i] propterea quod tam quadrata, quam figuræ habent duplicatam proportionem laterum: erit quoque tam circulus, cuius diameter, circumferentiaue 85. æqualis quatuor circulis, quorum diametri, circumferentiæue 84. 3. 4. 12. quam figura ſupra latus 85. ſimilis ſimiliterque poſita, quatuor figuris, quarum latera 84. 3. 4. 12. æqualis, quod eſt propoſitum.

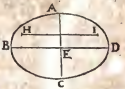
i 20. ſexti.

V. Aream

V.

Aream propoſitæ Ellipſis indagare.

LVBET deniq; librũ hunc quartũ duob' problematibus terminare, quæ ab Archimede Syracuſano acutiſſime inuenta ſunt, ac demonſtrata. Vnum eſt de area Ellipſis; alterũ de area Parabolæ. Sit ergo Ellipſis ABCD, cuius maior diameter BD, & minor AC, ſecans maiorem in E, bifariam. [b] Inueniatur HI, media proportionalis inter BD, & AC: & circuli circa diametrũ HI, deſcripti area, inquiratur, per ea, quæ cap. 7. huius lib. ſcripſimus. Dico hanc aream areæ Ellipſis ABCD, eſſe æqualem. [c] Quoniam enim eſt, vt BD, ad AC, ita quadratum ex BD, ad quadratum ex HI, [d] Vt autem quadratum ex BD, ad quadratum ex HI, ita eſt circulus diametri BD, ad circulum diametri HI. Igitur erit quoque, vt BD ad AC, ita circulus diametri BD, ad circulum diametri HI. Cum ergo per propoſitionem 5 Archimedis de Conoidibus, & ſphæroidibus, ſit quoque, vt maior diameter BD, ad minorem AC, ita circulus diametri BD. ad Ellipſim ABCD; [e] habebit circulus diametri BD, eandem proportionem ad circulum diametri HI, & ad Ellipſim ABCD. [f] Ideoque area circuli diametri HI, areæ ellipſis ABCD, æqualis erit. quod erat demonſtrandum.

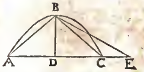


b 13. ſexti.
c coroll. 20 ſexti.
d 2. duod.
e 11. quin.
f 9. quinti.

V I.

AREAM propoſitæ parabolæ inueſtigare.

SIT data parabola ABC, cuius baſis AC, & axis BD, diuidens baſem bifariam in D, & vertex B. Inſcribatur parabolę triangulum ABC, eandem habens baſem, ac verticem cum parabola. Producta autem baſe AC, ſumatur CE, tertia pars ipſi' AC; ita vt AE, ipſius AC, ſit ſeſquitertia. Iungatur recta EB. Inquiraturq; deniq; per cap. 2. huius lib. area trianguli ABE quam dico eſſe æqualem areæ parabolæ ABC. [g] Quoniam enim eſt, vt AE, ad AC, ita triangulum ABE, ad triangulum ABC: Eſt autem AE, ipſius AC, ſeſquitertia, ex conſtructione; erit quoque triangulum ABE, trianguli ABC, ſeſquitertium. Cum ergo, vt Archimedes in lib. de Quadratura paraboles demonſtrauit, parabola quoque ABC, trianguli ABC, ſit ſeſquitertia: [h] habebunt triangulum ABE, & parabola ABC, ad triangulum ABC, eandem proportionem. [i] Ideoque area trianguli ABE, Areæ paraboles ABC, æqualis erit. quod erat oſtendendum.



g 1. ſexti.
h 11. quin.
i 9. quinti.

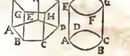
FINIS LIBRI QVARTI.

piatur parallelepipedū rectangulum, cuius altitudo LN, altitudini AH, ſit æqualis: [b] erit hoc parallelepipedum parallelepipedo ACE, æquale. Cum ergo parallelepipedum, cuius baſis rectangulum IL, & altitudo LN, producatur ex altitudine LN, in baſem IL, vt oſtenſum eſt, producetur quoque parallelepipedum ACE, ex altitudine AH, in baſem AC, baſi IL, æqualem. *b 31. vnd.*

SI nullum latus parallelepipedi rectū eſt ad baſem, demittenda erit ex aliquo angulo ſupremi parallelogrammi ad planum, in quo baſis, linea perpendicularis, pro altitudine parallelepipedi, eaq; diligenter metienda. Si namque area baſis inueſtigetur vel per cap. 1. lib. 4. quando eſt rectangula, vel per cap. 3. eiuſdē lib. quando non eſt rectāgula, eaq; in altitudinē inuentam ducatur. producetur area ꝓpoſiti parallelepipedi. Nam ſi ſupra baſem intelligatur parallelepipedum rectū eiuſdem altitudinis cum propoſito parallelepipedo, [c] erunt duo hæc parallelepipeda inter ſe æqualia. Conſtat autem ex Num. 1. & 2. parallelepipedum rectum gigni ex ductu baſis in altitudinem. *c 29. vel 30. vndec.*

3 CVBVS, qui etiam parallelepipedū quoddam eſt rectangulū, eodē modo producitur, nimirum ex latere in ſe, & iterū in productum. Vt ſi latus cubi ſit 10. erit eius area 1000. quod decies decem decies procreent 1000. *Area cubi*

4 [d] PRISMA eſt figura ſolida, quæ planis continetur, quorū aduerſa duo ſunt & æqualia, & ſimilia, & parallela; alia vero parallelogramma. Vt eſt ſolidum ADF, cuius baſes ſunt pentagona ABCDE, FGHIK, parallela, & æqualia. Hanc figuram ſolidam repreſentat columna aliqua laterata æqualis craſſitudinis, cuius baſes oppoſitæ ſunt æquales, ſimiles, ac parallelæ, ſiue hæ triangula ſint, ſiue quadrangula, ſiue pentagona, &c. Ex quo fit, vt priſma quodcunq; ambiant tot parallelogramma, quot latera, vel anguli in vnoquoq; oppoſitorum planorum reperiuntur. Vt propoſitum priſma ambiunt quinque parallelogramma ABGF, BCHG, CDIH DEKI, EAFK. Area porro cuiuslibet priſmatis inuenietur, ſi area baſis inquiratur, atq; in altitudinē ducatur. Nam ſi concipiatur parallelepipedum eiuſdem altitudinis cum priſmate, habens baſem, rectangulum baſi priſmatis æquale; [e] erit hoc parallelepipedum priſmati æquale. Cum ergo parallelepipedum producatur ex ſua baſe in altitudinē, procreabitur quoq; priſma ex multiplicatione ſuæ baſis in altitudinem. Area porro baſis cognoſcetur ex ijs, quæ lib. 4 ſcripſimus, & altitudo priſmatis, ſi eius latera recta non ſint ad baſem, exploranda erit, vt cap. præcedente Num. 2. altitudinem parallelepipedi inueſtigandam eſſe præcepimus. *d 13. defin. vndec.* *Area priſmatis tā recti, quā obliqui.* *e 2. corol. 7. duodec.*



5 CYLINDRVS eſt figura ſolida æqualis craſſitiei, quæ duobus circulis æqualibus, & æquidiſtantibus, & rotunda ſuperficie inter ipſos interiecta continetur, inſtar columnæ cuiuſpiam rotundæ. Vt eſt ſolidum ACH, cuius baſes ſunt duo circuli ABCD, EFGH, paralleli, & æquales. Huius quoq; area procreabitur ex multiplicatione baſis, ex cap. 7. lib. 4. inuentæ in altitudinem, quod in Cylindro recto explicabitur, vt Num. 1. in parallelepipedo recto factum eſt. Nam ſi verbi gratia baſis Cylindri circularis ABCD, continet 10. palmos quadratos, explebunt 10. cubi palmares ſupra illos 10. palmos quadratos extructi, Cylindrum vſq; ad primum palmum, altitudinis: at 20. cubi eundem explebunt vſque ad ſecundum palmum, &c. Quod ſi Cylindrus obliquus ſit, exquirenda erit eius altitudo per lineam perpendicularē ex ſuperiore baſe demiſſam ad planū, in quo inferior baſis exiſtit, atq; in hanc altitudinē area baſis ex cap. 7. lib. 4. inuenta multiplicanda. Productus enim numerus dabit aream Cylindri propoſiti, [f] cum æqualis ſit Cylindro recto eandem cum illo baſem, & altitudinem habenti. *f coroll 11. duodec.*

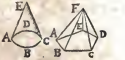
DE AREA PYRAMIDVM ET CONORVM.

CAPVT II.

PYRAMIS [a] eſt figura ſolida, quæ planis continetur ab vno plano ad vnum punctum conſtituta. Vt figura ſolida ABCDEF, ad punctum F, conſtituta ſupra baſem pentagonam ABCDE, & quam ambiunt quinque triangula ABF, BCF, CDF, DEF, AEF, tot nimirum, quot in baſe ſunt latera, dicitur pyramis. *a defin. 12. vndec.*

CONVS autem eſt figura ſolida rotunda ad vnum punctum conſtituta, ſupra baſem circularem, inſtar pyramidis rotundæ, qualis eſt figura ABCDE.

TAM autem pyramidis, quam Coni area producitur ex multiplicatione baſis in tertiam partem altitudinis. Cum enim, vt in præcedenti cap. oſtendimus, ex baſe in totam altitudinem gignatur priſma, vel Cylindrus eandem habens cum pyramide, & cono altitudinem: [b] producetur ex eadem baſe in tertiam partem altitudinis tertia pars illius priſmatis, vel Cylindri, [c] Cum ergo pyramis, ſit tertia pars illius priſmatis, [d] & Conus tertia pars Cylindri, liquet tam pyramidem, quam Conum produci ex baſe in tertiam partem altitudinis. Ex quo fit, ſi baſis ducatur in totam altitudinem, tertiam partem numeri producti, eſſe quoque aream pyramidis, vel Coni. Item eandem produci ex tota altitudine in tertiam partem baſis: [e] quod hac ratione tertia pars priſmatis, vel Coni gignatur. *Area pyramidis, & coni.* *b ſchol 14. duodec.* *c corol. 7. duodec.* *d 10. duod.* *Area pyramidis, & coni aliter* *e 1. ſchol 7. duodec. & 11. duodec.*



2 BASIS porro pyramidis, ſi triangularis eſt, cognoſcetur, vt lib. 4. cap. 2. traditum eſt: ſi multilatera, reperietur, per ea, quæ eodem lib. cap. 3. 4. & 5. ſcripſimus. Baſis autem Coni inueſtigabitur ex cap. 7. eiuſdem lib.

Altitudo pyramidis, & coni. At vero altitudo tam pyramidis, quam Coni, obtinebitur, ſi in vertice ſtatuatur planum baſi æquidiſtans, ab eoque ad planum, in quo baſis, perpendicularis demittatur, eaque exquiſitè menſuretur. Quamuis enim eadem hæc altitudo indagari poſſit Geometrice, ſi inclinatio vnius lateris ad baſem, & magnitudo quoque eiuſdem lateris cognoſcatur: quia tamen hæc ipſa exploranda ſunt materialiter per aliquod inſtrumentum, præſtat ipſam quoque altitudinem ſtatim per inſtrumentum exquirere, præſertim per inſtrumentum partium, quod lib. 2. cap. 1. deſcripſimus: cum inuentio illa Geometrica difficilior ſit, procedatq; ex inclinatione, ac latere per inſtrumentum cognitis.

3 ATQVE hæc, quæ diximus, intelligi volumus tam de pyramidibus, Coniſque rectis, quam de obliquis, & ſcalenis.

DE AREA FRVSTI PYRAMIDIS, ET CONI.

CAPVT III.

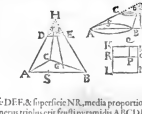
1. FRVSTVM pyramidis, & Coni appello id, quod alij pyramidem decurtatam, & Conum decurtatum dicunt. Sit ergo fruſtum pyramidis ABCDEF, cuius baſes ABC, DEF, ſint parallelæ, & ſimiles, & cuius area inueſtiganda ſit. Quod duobus modis fieri poteſt. Primum cogitetur integra pyramis ABCH, cuius altitudinem HG, perpendicularem ad baſem (licet pyramis actu non ſit integrata) ita inueniemus. [a] Quoniam eſt, vt AB, ad AH, ita DE, ad DH, & permutando, vt AB, ad DE, ita AH, ad DH; erit quoque diuidendo, (ſumpta AS, æquali ipſi DE) vt SB, ad DE, ita AD, ad DH. [b] Quia vero plana parallela ABC, DEF, ſecant rectas AH, GH, proportionaliter in I, G; erit quoque vt SB, ad DE, ita GI ad IH. Si igitur fiat, vt SB, differentia inter latera homologa AB, DE, baſium ad DE, ita GI, altitudo Fruſti pyramidis (quæ cognoſcetur per lineam perpendicularem demiſſam ad baſem ex aliquo puncto plani DEF, etiam producti, ſi opus eſt.) ad aliud, prodibit recta IH, altitudo nimirum pyramidis DEFH: qua addita ad GI, tota altitudo GH, cognita erit. Quocirca ſi per caput præcedens inueniatur area tam integræ pyramidis ABCH, quam abſciſſæ pyramidis DEFH, & hæc ab illa demantur, reliquum fiet Fruſtum ABCDEF.

a 4. ſexti. b 17. vndec. Area fruſti pyramidis.

Area fruſti coni. 2 NON aliter fruſtum Coni ABCD, inueſtigabitur, vt patet, ſi integer Conus intelligatur ABH, &c.

3 ALIO modo idem fruſtum tam Pyramidis, quam Coni cognoſcemus, etiam ſi neq; pyramis, neq; conus integretur. [c] Fiat quadrata KLMN, NOPQ, baſib. ABC, DEF, notis æqualia, inueniaturque inter quadrata KM, NP, ſuperficies media proportionalis, qualis eſt rectangula figura OK, producto latere OP, ad R. [d]

c 14. ſecundi. d 1. ſexti. e 7. quinti.



Quoniam enim eſt, vt MN, ad NO, ita KM, ad NR. Item vt KN, ad NQ, ita NR, ad NP, [e] eſtque MN, ad NO, vt KN, ad NQ: erit quadratum KM, ad rectangulum NR, vt rectangulum NR, ad quadratum NP: ideoque NR, medio loco proportionale eſt inter quadratum KM, NP. Quamobrem, ſi radix quadrata baſis ABC, notæ, id eſt, latus KN, quadrati KM, ducatur in radicem quadratam baſis DEF, notæ, hoc eſt, in latus NO quadrati, NP, producetur area rectanguli NR.

IAM vero ducatur GI, altitudo fruſti in ſummam ex quadrato KM, hoc eſt ex baſe ABC, & quadrato NP, ſiue baſe DEF, & ſuperficie NR, media proportionali inter baſes, vel dicta quadrata collectam, Productus enim numerus triplus erit fruſti pyramidis ABCDEF; ideoque tertia producti pars area erit prædicti fruſti. [f] Quoniam enim priſma quod fit ex GH altitudine pyramidis in baſem ABC. ſiue quadratum KM, triplum eſt pyramidis ABCDEFH: erit quoque parallelepipedum factum ex GI, in quadratum KM, vna cum parallelepipedo facto ex IH in idem quadratum KM, triplum pyramidis eiuſdem. [g] Eſt autem & ablatum parallelepipedum factum ex IH, in baſem DEF, hoc eſt, in quadratum NP, triplum ablatæ pyramidis DEFH. [h] Igitur & reliquum, quod fit ex GI, in quadratum KM, vna cum ijs, quæ fiunt ex IH, in KP, & in RM, triplum erit fruſti reliqui ABCDEF.

f 7. duod. g 7. duod. h 5. quinti.

4 QVIA vero æquales ſuperficies ABC, KM, & ſuperficies æquales DEF, NP, eandem habent proportionem; erit permutando ABC, ad DEF, vt KM, ad NP. [i] eritque latus AB, ad latus DE, vt latus KN, ad latus NQ & diuidendo (ſubtracta recta AS, æquali ipſi DE, ex AB.) SB, ad DE, vt KQ, ad QN. Eſt autem, vt Num. 1 demonſtrauimus, vt SB, ad DE, ita GI, ad IH. Igitur erit etiam vt KQ ad QN, ideoq; vt MO, ad ON, ita GI, ad IH. [k] Sed vt KQ ad QN, ita eſt KP, ad PN; Et vt MO, ad ON, ita MR, ad RN. Igitur erit quoque, vt GI, ad HI, ita tam KP, ad PN, quam MR, ad RN. Contractis ergo hiſce magnitudinibus ad numeros, [l] erit numerus factus ex GI primo in PN, quartum, æqualis ei, qui fit ex IH ſecundo in KP, tertium. Item numerus factus ex GI, primo in RN, quartum æqualis ei, qui fit ex IH, ſecundo in MR, tertium: [m] Ac propterea duo, qui fiunt ex GI, in PN, & ex GI, in RN, æquales erunt duobus, qui fiunt ex IH in KP, & IH, in MR. Adiecto ergo communi, qui fit ex GI, in KM, erunt tres, qui fiunt ex GI, in KM, & in PN, & in RN, æquales tribus, qui fiunt ex GI, in KM, & ex IH, in KP, & in MR. Sed hi poſteriores tres tripli ſunt fruſti pyramidis ABCDEF, vt ad finem Num. 3. demonſtrauimus. Ergo & priores tres, qui nimirum fiunt ex GI, altitudini fruſti in KM, & in PN, & in RN, hoc eſt in ſummam ex KM, baſi ABC, æquali, & ex PN, baſi DEF, æquali, & ex RN, media proportionali inter baſes collectam, tripli erunt eiuſdem fruſti: ideoque tertia eorum pars æqualis erit areæ fruſti. quod erat demonſtrandum.

i 22. ſexti. k 1 ſexti. l 19 ſep. m 2. pronunc.

5 EADEM ratione fruſtum Coni ABDC, producetur ex altitudine GI, in ſummam ex baſe AB, & baſe CD, & ſuperficie media proportionali inter baſes collectam vt conſtat, ſi concipiantur quadrata KM, NP, baſibus æqualia, & proinde ſuperficies RN, media proportionalis inter baſes, &c.

SCHO.

SCHOLIVM.

1 SI ea, quæ hactenus dicta ſunt, rebus materialibus accommodentur, licebit nobis per cap. 1. metiri murum quemcunque vniformis craſſitiei, tamquam parallelepipedum quoddam, cuius longitudo eadem ſit, quæ longitudo muri: latitudo vero eadem quæ muri latitudo: altitudo denique, ſiue profunditas eadem, quæ altitudo muri.

Soliditas muri.

EADEMQVE ratione metiemur fruſtum alicuius marmoris, vel alterius ſaxi, tanquam priſma quodpiam, ſi vniformem habeat craſſitiem, lateraque ad baſes ſint recta.

NON aliter ſaccum tritici, tanquam Cylindrum quendam, dimetiemur, plus minus. Nam cum ſaccus non ſit accuratus Cylindrus, vera eius menſura haberi non poteſt.

Soliditas alicuius fruſti marmoris.

2 RVRSVS per caput 2. aceruum tritici, tamquam conum aliquem, eodem modo, plus minus, metiri licebit. Itaq; ſi cognoſcemus, quot grana, vel libræ tritici in cubo, verbi gratia, vnius palmi contineantur, multiplicenturq; grana, vel libræ vnius cubi in numerum cuborum, qui in toto ſacco, vel aceruo reperti ſunt, producetur numerus granorum, vel librarum in eodem ſacco, vel aceruo exiſtentium.

Capacitas ſacci tritici.

Capacitas acerui tritici.

3 SIC etiam, ſi detur vas aliquod excauatum in modum parallelepipedi, aut Cylindri, ſciemus eius capacitatem, ſi eius parallelepipedum interius aut Cylindrum, non ſecus, ac ſi ſolida figura eſſet, metiemur: ita vt ſi cognitum fuerit, quot menſuræ aquæ alterius ve liquoris in cubo, verbi gratia, vnius palmi contineantur, ignorari non poſſit, quot menſuræ in cubis in toto vaſe contentis comprehendantur, ſi nimirum menſuræ vnius cubi ducantur in numerum cuborum, quos in vaſe comprehendi inuenimus.

Capacitas vaſis excauati.

4 DENIQVE ſi deſideretur ſoliditas alicuius vaſis, quod tam interius, quam exterius formam habeat parallelepipedi, ſeu priſmatis, Cylindriue, metienda erit vtraq; figura tum interior, tum exterior. Si namque illa ex hac detrahetur, reliqua fiet ſoliditas vaſis excauati.

Soliditas vaſis excauati.

DE AREA QVINQVE CORporum regularium.

CAPVT IV.

1 QVINQVE tantum ſunt corpora regularia, Tetraedrum, Hexaedrum, Octaedrum, Dodecaedrum, & Icoſaedrum, vt in ſcholio propoſ. 18. lib. 13. Euclid. demonſtrauimus: quæ ſic ab Euclide lib. 11. definiuntur.

TETRAEDRVM eſt figura ſolida ſub quatuor triangulis æqualibus, & æquilateris contenta, qualem figuram exprimit pyramis triangularis æquilatera.

HEXAEDRVM eſt figura ſolida ſub ſex quadràtis æqualibus contenta, qualem refert cubus, ſeu parallelepipedum baſium quadratarum, in quo omnes tres dimenſiones ſunt æquales.

OCTAEDRVM eſt figura ſolida ſub octo triangulis æqualibus, & æquilateris contenta.

DODECAEDRVM eſt figura ſolida ſub duodecim pentagonis æqualibus, & æquilateris, & æquiangulis contenta.

ICOSAEDRVM eſt figura ſolida ſub 20. triangulis æqualibus, & æquilateris contenta.

2 CVBI ſiue Hexaedri aream gigni ex multiplicatione lateris in ſe, & iterum in productum, cap. 1. Num. 3. docuimus. Item pyramidem, ſeu Tetraedrum produci ex eius altitudine (quæ mechanice cognoſcetur, vt cap. 2. Num. 2. traditum eſt) in tertiam baſis partem: vel ex eius baſe in tertiam partem altitudinis, declarauimus ca. 2. Num. 1. Quod ſi Geometrice inuenire lubeat altitudinem Tetraedri, ita faciemus. Quoniam quadratum lateris Tetraedri ad quadratum diametri ſphæræ Tetraedrum ambientis eſt, vt 2. ad 3. [a] quod diameter ſit potentia ſeſquialtera lateris pyramidis: Si fiat, vt 2. ad 3. ita quadratum lateris Tetraedri ad aliud, prodibit quadratum diametri ſphæræ, eiuſque quadrati quadrata radix diametrum ipſam exhibebit, [b] cuius duæ tertiæ partes altitudinem Tetraedri offerent.

Area cubi, & Tetraedri.

Altitudo Tetraedri.

a 13. tertydec.

b 2. coroll. 13. tertijde.

3 [c] QVONIAM vero Octaedrum diuiditur in duas pyramides ſimiles, & æquales, quarum baſis communis eſt quadratum à latere deſcriptum: ſi vtriuſque pyramidis inueſtigetur area, ignorari non poterit area Octaedri, cum ex areis illarum pyramidum conflata ſit. Producetur autem area illarum duarum pyramidum, ſi quadratum lateris Octaedri ducatur in diametrum Octaedri, & producti numeri tertia pars capiatur, quia productus ille numerus ex quadrato lateris Octaedri in eiuſdem diametrum, eſt parallelepipedum duarum illarum pyramidum triplum: [d] propterea quod ſemiſſis illius parallelepipedi eandem habens baſem, & altitudinem, cum vtralibet pyramidum, tripla eſt vnius pyramidis. Diameter porro Octaedri, quæ à diametro ſphæræ, vel quadrati lateris Octaedri non differt, inuenietur, ſi ex duplo quadrati lateris radix quadrata eruatur; [e] quod tam quadratum ex diametro quadrati deſcriptum duplum ſit quadrati lateris, [f] quam quadratum diametri ſphæræ quadrati lateris Octaedri. Semiſſis vero huius diametri, altitudo erit vtriuſuis Pyramidis. Quare ſi hæc altitudo ducatur in tertiam partem quadrati lateris, producetur area vnius pyramidis, id eſt, ſemiſſis Octaedri: ac proinde duplum huius pyramidis aream totius Octaedri indicabit.

c 2. coroll. 14. tertyde.

Area Octaedri.

d coroll. 7. duodec.

Diameter Octaedri.

e ſchol. 47. primi.

f 14. tertyd.

4 DEINDE quia ductis ex centro Dodecaedri ad omnes eius angulos rectis lineis, Dodecaedrum in 12. pyramides pentagonas æquales diuiditur; ſi area vnius pyramidis per cap. 2. inuenta multiplicetur per 12. procreabitur area totius Dodecaedri. Vt autem vnius pyramidis area habeatur, neceſſe eſt, & aream baſis pentagonæ inueſtigare ex latere dato, per ea, quæ libr. 4. capit. 5. ſcripſimus, & pyramidis altitudinem, vt iam docebo. Ex ſuperiori plano producto demittatur ad planum baſis oppoſitæ linea perpendicularis: Huius enim ſemiſſis diligenter inquiſita in partibus lateris Dodecaedri, per inſtrumentum partium lib. 1. cap. 1. conſtructum, dabit pyramidis altitudinem quæſitam, quemadmodum & tota perpendicularis altitudinem Dodecaedri exhibet. Quam

Area Dodecaedri.

a 8. quinti. tamen Geometrice ita quoque deprehendemus. [a] Quia cubus in Dodecaedro deſcriptus eadem ſphæra, qua Dodecaedrum, comprehenditur, eiuſque latus vnum anguli Pentagoni Dodecaedri ſubtendit; ideoq; eadem diameter eſt ſphæræ, Dodecaedri, & cubi: [b] Si recta ſubtendens angulum pentagoni inueſtigetur, habebitur latus cubi. *b 2. triang. rectil.* [c] Et quia diameter ſphæræ potentia eſt tripla lateris cubi, ſi quadratum lateris cubi inuenti triplicetur, *c 15. tertijdec.* habebitur quadratum diametri ſphæræ, vel cubi, cuius radix quadrata ipſam diametrum dabit. Cum ergo diameter Dodecaedri, & altitudo eiuſdem centra baſium oppoſitarum coniungens ſe in centro ſecent biſariam, venabimur ſemiſſem huius altitudinis, nimirum altitudinem pyramidis quæſitam, hac ratione. *Perpendicularis è centro ſphæra ad baſem Dodecaedri.* Concipiatur triangulum rectangulum, cuius baſis eſt ſemidiameter Dodecaedri nota, cum tota diameter proxime cognita ſit, latera vero circa angulum rectum, altitudo pyramidis, & ſemidiameter circuli baſem Dodecaedri circumſcribentis. Cum ergo ſemidiameter hæc cognoſci poſſit, ex iis, quæ lib. 4. cap. 5 docuimus, [d] cognoſcetur quoque reliquum latus, altitudo videlicet pyramidis, quam quærimus. *d 4. triang. rectil.* Porro ſemidiameter prædicti circuli pentagonum Dodecaedri circumſcribentis ita quoque reddetur nota. *Semidiameter circuli pentagonum Dodecaedri circumſcribentis.* Qnoniam latus pentagoni ſubtendit in eo circulo grad. 72. & latus Decagoni grad. 36. cognita erunt hæc latera in partibus ſinus totius. Si ergo fiat, vt latus pentagoni in partibus ſinus totius cognitum ad idem latus notum ex hypotenuſi, ita latus Decagoni in iiſdem partibus ſinus totius cogniti ad aliud, prodibit Decagoni latus in menſura lateris pentagoni, cognitum. [e] Et quia latus pentagoni poteſt latera Decagoni, & Hexagoni eiuſdem circuli, ſi quadratum lateris Decagoni proxime cogniti detrahatur ex quadrato lateris pentagoni, reliquum fiet quadratum lateris Hexagoni, id eſt, ſemidiametri, ideoque eius radix quadrata ſemidiametrum exhibebit notam. *e 10. tertijdec.*

5 POSTREMO quia ductis ex centro Icoſaedri ad omnes eius angulos rectis lineis, Icoſaedrum in 20. pyramides triangulares æquales diuiditur; ſi area vnius pyramidis per cap. 2. inuenta multiplicetur per 20. gignetur totius Icoſaedri area ex illis 20. pyramidibus conflata. Vt autem vnius pyramidis area obtineatur, inueſtiganda primum erit area baſis triangularis, ex iis, quæ lib. 4. cap. 2. Num. 4. & 5. ſcripſimus. Deinde altitudo pyramidu mechanice, hoc pacto. Ex ſuperiori plano producto, hoc eſt, ex inferiori ſuperficie alicuius plani, quod corporis ſupremæ baſi imponeretur, ad planum baſis oppoſitæ perpendicularis demittatur. Hæc enim accurate dimenſa altitudinem Icoſaedri dabit, eiuſque ſemiſſis altitudinem pyramidis, quæ quæritur. Quam Geometrice ita etiam explorabimus. Fiat pentagonum ex 5 lateribus Icoſaedri, inueſtigeturque eius ſemidiameter, & latus Decagoni in circulo illud pentagonum circumſcribente, in partibus, in quibus latus Icoſaedri datum eſt, hac ſcilicet ratione. Concipiatur triangulum rectangulum, cuius baſis ſemidiameter dicti circuli, latera vero ſemiſſis lateris pentagoni, hoc eſt, Icoſaedri, & perpendicularis è centro ad punctum medium dicti lateris demiſſa. Ita namque cognoſceter ſemidiameter; ex iis, quæ lib. 4. cap. 5. Num. 2. tradita ſunt. Latus vero Decagoni in eodem circulo deſcripti reperietur, vt paulo ante circa finem Num. 4 dictum eſt. [f] Et quia diameter ſphæræ, ſiue Icoſaedri potentia eſt quintupla inuentæ ſemidiametri; ſi quadratum ſemidiametri; inuentæ quintupletur, procreabitur quadratum diametri Icoſaedri, cuius radix quadrata diametrum offeret, ideoque & ſemidiameter Icoſaedri nota erit. *f 1. coroll. 16 tertijdec.* Vel aliter. [g] Quoniam diameter ſphæræ, id eſt, Icoſaedri, componitur ex latere Hexagoni, & duobus lateribus Decagoni in circulo pentagonum ex quinque lateribus Icoſaedri compoſitum circumſcribente: erit ſumma collecta ex ſemidiametro illius circuli, & duobus lateribus Decagoni, diametro Icoſaedri æqualis: ideoque rurſus ſemidiameter Icoſaedri nota erit. *g 2. cor. 16. tertijdec.*

Error Orontij. HINC patet, Orontium cum illis, qui ipſum ſequuntur, decipi, qui putat, ex ſemiſſe ſemidiametri illius circuli & ex latere Decagoni componi ſemiaxem Icoſaedri, hoc eſt, axem, vel altitudinem pyramidis, cuius baſis triangulum Icoſaedri, & vertex centrum ſphæræ. *Perpendicularis è centro ſphæra ad baſem Icoſaedri.* Nam vt ex iis conſtat, quæ proxime ſcripſimus, eo modo componitur ſemidiameter ſphæræ, vel Icoſaedri, quæ maior eſt prædicto axe. Semidiameter porro circuli prædictum pentagonum circumſcribentis reperiri quoque poterit, vt ad finem Numer. 4. diximus, ſi nimirum quadratum lateris Decagoni ex quadrato lateris dicti pentagoni, quod à latere Icoſaedri non differt, tollatur, & reliqui numeri radix quadrata extrahatur: [h] propterea q latus pentagoni poteſt latera Decagoni, & Hexagoni eiuſdē circuli. *h 10. tertijd.* *i 3. triang. rectil.*

IAM vero cognita ſemidiametro Icoſaedri, inueniemus altitudinem pyramidis, cuius baſis eſt triangulum Icoſaedri, & vertex eiuſdem centrum, hoc modo. Quoniam diameter Icoſaedri, eiuſdemq; altitudo ſeſe in centro ſecant biſariam, concipiatur triangulum rectangulum, cuius baſis eſt ſemidiameter Icoſaedri proxime cognita, latera vero circa angulum rectum, altitudo pyramidis, & ſemidiameter circuli baſem Icoſaedri circumſcribentis. Cum ergo hæc ſemidiameter cognoſci poſſit ex iis, quæ lib. 4. cap. 5. docuimus, [i] cognoſcetur quoque latus reliquum pyramidis, videlicet altitudo, quæ inquiritur. *Semidiameter circuli triangulum Icoſaedri circumſcribentis.* Semidiameter porro circuli baſem triangularem Icoſaedri circumſcribentis efficietur hoc etiam pacto cognita. [k] Quoniam trianguli æquilateri latus potentia triplum eſt ſemidiametri illius circuli; ſi quadratum lateris Icoſaedri diuidatur per 3. erit Quotientis radix quadrata, ſemidiameter quæſita. *k 12. tertijdec.*

Area Tetraedri, cubi, & Octaedri aliter inuenta. 6 EADEM hac arte, quæ in Dodecaedro, & Icoſaedro expoſita eſt, areas Tetraedri, cubi, & Octaedri inueſtigare licebit, ſi, lineis ex eorum centris ad omnes angulos ductis, in pyramides æquales diſtribuantur. Tetraedrum nimirum in 4. pyramides triangulares; cubus in 6. quadrangulares; & Octaedrum in 8. triangulares. Inuenta namque per cap. 2. in quolibet area vnius pyramidis, ſi ea in numerum baſium corporis regularis ducatur, inſurget totius corporis area. Vt autem area vnius pyramidis habeatur, inquirenda prius erit altitudo ipſius, vt dicta in tertiam baſis partē pyramidis aream producat. Altitudo ergo hæc in Tetraedro ſic reperiatur. [l] Quoniam diameter ſphæræ Tetraedrum ambientis potentia eſt ſeſquialtera lateris Tetraedri: ſi Fiat, vt 2. ad 3. ita quadratum lateris Tetraedri dati ad aliud, prodibit quadratum diametri ſphæræ, cuius radix quadrata ipſam diametrum oſtendet. *l 13. tertijd.* [m] Huius autem diametri ſexta pars, altitudo erit pyramidis quæſita, recta videlicet perpendicularis è centro ſphæræ in baſem Tetraedri demiſſa. *m 2. cor. 13. tertijdec.* *Perpendicularis è centro ſphæra ad baſem Tetraedri, cubi & Octaedri.*

IN cubo vero dicta altitudo ſemiſſi lateris cubi æqualis eſt, quod perpendicularis è centro ſphæræ in baſem cubi demiſſa æqualis ſit ſemiſſi lateris cubi, vt liquet.

IN Octaedro denique eadem altitudo ſic deprehendetur. [n] Quoniam diameter ſphæræ eſt potentia dupla lateris Octaedri: ſi fiat, vt 1. ad 2. ita quadratum lateris Octaedri dati ad aliud, procreabitur quadratum diametri ſphæræ, vel Octaedri. Huius ergo radix quadrata dabit diametrum, ideoque ſemidiameter non ignorabitur, *n 14. tertijdec.*

Hinc

Hinc altitudo pyramidis quæſita, hoc eſt, perpendicularis è centro ſphæræ in baſem Octaedri demiſſa, elicietur ea ratione, quam in Icoſaedro ad finem Num. 5. explicauimus.

7 NON videtur autem omittenda alia ratio dimetiendi omnia quinque corpora regularia, quæ quidem in lib. 14. Euclid. demonſtrata eſt, & eſt eiuſmodi. Primum quæratur ſuperficies conuexa cuiuſque corporis, ex eius latere cognito, etiamſi nullius baſis area inueſtigetur: hoc videlicet pacto. Quoniam quælibet baſis cuiuſuis corporis diuiditur per rectas ex centro baſis ad omnes angulos ductas in tot triangula æqualia, quot anguli, vel latera in baſe continentur: ſi ducatur hic numerus triangulorum in numerum baſium corpus regulare, quod propoſitum eſt, ambientium, habebitur numerus omnium huiuſmodi triangulorum in tota ſuperficie conuexa contentorum, Vt quia baſis quadrata cubi A B C D, diuiſa eſt in quatuor triangula ex centro E, continebuntur 24. eiuſmodi triangula in 6. baſibus. Item quia baſis triangularis Tetraedri, Octaedri, & Icoſaedri ABC, ex centro D, diſtributa eſt in 3. triangula, exiſtent in 4. baſibus Tetraedri 12 eiuſmodi triangula, & 24. in 8. baſibus Octaedri, & 60. in 20. baſibus Icoſaedri. Denique quia baſis pentagona Dodecaedri A B C D E, reſoluta eſt ex centro F, in 5. triangula, complectentur 12. baſes Dodecaedri 60. eiuſmodi triangula.

In quotri-angula di-uidantur omnes baſes cuiuſuis corporis regularis ex earum centris.



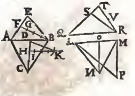
DEINDE quia rectangulum contentum ſub perpendiculari è centro baſis in latus demiſſa, & ſub vno latere, æquale eſt duobus eiuſmodi triangulis, [a] propterea quod vnius duplum eſt: erit in cubo rectangulum illud duodecies ſumptum toti ſuperficiei cubi æquale: In Tetraedro vero ſexies ſumptum totam Tetraedri ſuperficiem conficiet: In Octaedro deinde duodecies acceptum toti ſuperficiei Octaedri adæquabitur: At in Dodecaedro, & Icoſaedro tricies ſumptum ſuperficiei toti tam Dodecaedri, quam Icoſaedri æquale erit. Dicta autem perpendicularis EF, in baſe cubi æqualis eſt ſemiſſi lateris cubi AB. [b] Quoniam enim perpendicularis EF, ſecat latus AB, bifariam, [c] eſtque ipſi AF, æqualis, quod anguli FAE, FEA, ſemirecti ſint; conſtat EF, ſemiſſi lateris cubi eſſe æqualem. Perpendicularis autẽ DE, in baſe Tetraedri, Octaedri, & Icoſaedri, [d] ſemiſſis eſt ſemidiametri CD. [e] Cum ergo latus AC, ſit potentia triplum ſemidiametri CD: Si fiat, vt 3. ad 1. in quadratum lateris dati AC, ad aliud, prodibit quadratum ſemidiametri CD, cuius radix quadrata ipſam CD, indicabit, eiuſque ſemiſſis perpendicularem DE, exhibebit. Perpendicularis denique FG, in baſe Dodecaedri [f] ſemiſſis eſt ſummæ ex ſemidiametro AF, & latere decagoni circuli ABD, collectæ, quod latus decagoni cognoſcetur, vt ad finem Num. 4. traditum eſt.

a 41. primi.
Superficies regulariũ corporũ & perpendiculares baſium.
b ſchol. 26. primi.
c 6. primi.
d 2. coroll. 12. tertijdec.
e 12. tertijdec.
f 1. quartidec.

8 QVIA vero ſolidum, quod fit ex perpendiculari è centro cuiuſcumque corporis regularis ad aliquam eius baſem ducta in tertiam partem ſuperficiei ipſius corporis, ipſi corpori æquale eſt; [g] ſi inueſtigetur ſuperficies conuexa dati corporis regularis, vt proxime docuimus, atque in tertiam eius partem ducatur altitudo vnius pyramidum, in quas corpus ipſum per rectas è centro ipſius ductas diuiditur, (quæ altitudo reperietur, vt ſupra tradidimus) hoc eſt, perpendicularis è centro corporis in eius baſem demiſſa, procreabitur area, ſiue ſoliditas ipſius corporis. Quæ etiam obtinebitur, ſi dicta altitudo ducatur in totam ſuperficiem connexam, & producti tertia pars capiatur.

g ſchol. 10. quartidec.
Area corporum regularium alter inuenta.

8 ITAQVE vt vides, tota difficultas in corporibus regularibus dimetiendis conſiſtit fere tota in altitudine pyramidis baſem habentis eandem cum corpore, verticem autem in centro ſphæræ, exquirenda: cuius quidem inuentio Geometrica per numeros moleſtiſſima eſt, propter radices ſurdas, & numeros fractos quorum numeratores, denominatoreſque nimis magni ſunt, adeo vt operæ pretium videatur eſſe eandem mechanice explorare, vt ad initium Num. 2. 4. & 5. diximus, præſertim ſi exquiſita diligentia in ea per inſtrumentum partium dimetienda adhibeatur. Sed quia nõ ſemper in promptu habemus corpora regularia, vt mechanice eam altitudinem conſequi poſſimus, libet rationem quandam nonam, eamque facillimam hic præſcribere, qua ſine moleſtia illa numerorum, eadem illa altitudo per lineas inueniatur, etiamſi corpus regulare non adſit, ſed ſolum eius latus datum ſit, ac cognitum. Sit ergo primo datum latus Tetraedri AB, quotcunque palmorum, conſtruaturq; triangulum æquilaterum ABC, pro baſe Tetraedri: Diuiſo autem latere AB, bifariam in D, iungatur recta CD, [h] quæ ad AB, perpendicularis erit. Conſtructo quoq; Iſoſcele ABE, cuius vtrumq; latus rectæ CD, ęquale ſit, demittatur ad AE, perpendicularis BF, cuius quarta pars ſit FG. Dico FG, altitudinem eſſe vnius pyramidis, hoc eſt, æqualem eſſe perpendiculari ex centro ſphæræ Tetraedro circumſcriptæ ad vnam baſem deductę. Quoniam enim, vt ad finem Euclidis, ex Hypſicle demonſtrauimus, E, angulus eſt inclinationis vnius baſis Tetraedri ad alteram, eſtque EB, perpendiculari CD, æqualis: ſi triangulum BEF, concipiatur circa EF, moueri, donec rectũ ſit ad baſem Tetraedri, cadet punctum B, in verticem Tetraedri; ac proinde perpendicularis BF, altitudo erit Tetraedri. [i] Et quia altitudo Tetraedri duas partes tertias diametri ſphæræ continet: ſi ſemidiameter ponatur 6. erit altitudo BF, 4. & ſemidiameter 3. [k] Cum ergo altitudo vnius pyramidis ſit tertia pars ſemidiametri, BG, ſemidiameter, & GF, altitudo vnius pyramidis. Quam etiam inueniemus, licet Iſoſceles AEB, non extruatur, hoc modo. Sumpta DH, tertia parte perpendicularis CD, excitetur ad CD, perpendicularis HK, quæ ex D, ad interuallum CD, ſecetur in K. Dico HI, quartam partem ipſius HK, eſſe altitudinem vnius pyramidis. Erecto n. triangulo DHK, ſupra baſem Tetraedri ABC, cadet punctum K, in verticem Tetraedri, quod DK, ducta æqualis ſit perpendiculari ex medio latere ad angulum baſis oppoſitum ductæ. Ergo vt prius, HK, altitudo erit Tetraedri, & HI, perpendicularis ex centro ſphæræ in H, centrum baſis cadens. [l] Nam DH, tertia pars perpendicularis CD, in centrum trianguli cadit.



h ſchol. 26. primi.
Altitudo pyramidis Tetraedri.
i 2. coro. 13. tertijdec.
k 2. cor. 13. tertijdec.
l 2. coro. 13. tertijdec.

SIT deinde datum latus Octaedri LM, ſupra quod conſtruatur triangulum æquilaterum LMN, pro baſe Octaedri. Diuiſo autem latere LM, bifariam in O, iungatur recta NO, [m] quæ ad LM, erit perpendicularis. Con-

m ſchol. 26. primi.

 ſtructo

ſtructo iam Iſoſcele QRS, ſupra baſem QR, æqualem diametro ſphæræ, vel quadrati ex latere Octaedri deſcripti, (quæ habebitur, ſi educatur perpendicularis MP, lateri LM, æqualis. Iuncta enim recta LP, diameter erit illius quadrati, vel ſphæræ) vtrumq; laterum QS, RS, æquale habens perpendiculari NO; ducatur ex R, ad QS, perpendicularis RT, quæ bifariam ſecetur in V. Dico TV, eſſe altitudinem pyramidis quæſitam, hoc eſt, æqualem eſſe perpendiculari ex centro ſphæræ ad vnam baſem Octaedri cadenti. Quoniam enim, vt ad finem Euclidis ex Hypſicle demonſtrauimus, angulus QSR, inclinationem vnius baſis ad alteram indicat, eſtque obtuſus, erit perpendicularis RT, cadens ad partes anguli acuti RST, æqualis altitudini Octaedri, id eſt, perpendiculari baſium Octaedri oppoſitarum centra connectenti, vt ex Octaedro materiali perſpicuum eſt: Ac propterea eius ſemiſſis TV, altitudo erit pyramidis quæſita, quod altitudo Octaedri bifariam ſecetur in centro.

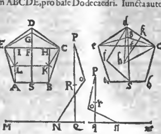
Altitudo pyramidis Octaedri.

Altitudo pyramidis cubi.

SI detur latus cubi, ſiue hexaedri, erit eius ſemiſſis altitudo pyramidis quæſita: propterea quod cubi altitudo eiuſdem lateri ſit æqualis.

a 2. coro 17. tertijd.
b coroll. 8. quintidec.
c ſchol. 12. quarti.
d 4. primi.

DATVM iam ſit AB, latus Dodecaedri, ſupra quod extruatur pentagonum æquilaterum, & æquiangulum ABCDE, pro baſe Dodecaedri. Iuncta autem recta CE, [a] quæ latus erit cubi in Dodecaedro, & in eadem cum ipſo ſphæra deſcripti, [b] atque lateri AB, parallela: ſecetur AB, bifariam in S, connectaturque recta SD, [c] quæ angulum CDE, bifariam ſecabit: [d] ac proinde & rectam CE, bifariam, & ad angulos rectos diuidet: ideoque & anguli ad S, recti erũt. Fiat ſupra CE, Iſoſceles CGE, cuius vtrumque laterum CG, EG, perpendiculari SF, ſit æquale. Sumptis quoque FH, FI, ſemiſſi lateris AB, æqualibus, erigantur ad EC, perpendiculares HK, IL, quæ ex C, E, ad interuallum FD, ſecentur in KL, iungaturque rectæ EL, CK. His paratis, fiat angulo CGE, æqualis angulus MNO, ponaturque NO, ipſi SD, æqualis: Item angulo ELK, fiat æqualis angulus NOP, ponaturque OP, lateri AB, æqualis: ac tandem demittatur ex P, ad MN, perpendicularis PQ, quæ bifariam ſecetur in R. Dico RQ, altitudinem eſſe pyramidis vnius in Dodecaedro. Nam quia, vt ad finem Euclidis ex Hypſicle demonſtrauimus, angulus CGE, inclinationem vnius baſis ad alteram metitur, ſi MN, concipiatur eſſe perpendicularis, quæ in baſe infima ex angulo pentagoni ad medium punctum lateris oppoſiti ducitur, reſpondebit NO, perpendiculari, quæ in pẽtagono ad illam baſem inclinato ex eodem medio puncto ad oppoſitum angulum ducitur: propterea quod angulum MNO, angulo inclinationis CGE, & rectam NO, perpendicularis SD, æqualem poſuimus. Recta autem OP, referet latus Dodecaedri inter angulum dicti pentagoni inclinati, & angulum ſupremæ baſis poſitum propterea quod recta OP, poſita eſt æqualis lateri Dodecaedri, & angulus NOP, angulo ELK, qui quidem æqualis eſt illi, quem dictum latus efficit cum perpendiculari ex angulo ſupradicti pentagoni inclinati ad baſem in medium punctum lateris oppoſiti ductæ, vt conſtat, ſi vna baſis cubi Dodecaedro inſcripti intelligatur dicto lateri Dodecaedri ſubſtrata, ita vt duo latera baſis cubi ſubtendant duos angulos duorum pentagonorum, quorũ vnum ad baſem Dodecaedri inclinatum eſt, alterum vero ſupremum in Dodecaedro. Erit enim tunc recta CE, æqualis rectæ duo puncta media duorum laterum dictorum baſis cubi connectenti. Rectæ autem EL, CK, reſpondebunt rectis ex eiſdem punctis mediis laterum illorum baſis cubi, ad angulos prædictorum pentagonorum ductis: Ac proinde angulus ELK, æqualis erit ei, quem perpendicularis in pentagono inclinato cum prædicto latere Dodecaedri efficit. Ex quo fit punctum P, in plano ſupremæ baſis exiſtere, atque idcirco perpendicularem PQ ad planum baſis per MN, ductum demiſſam, æqualem eſſe altitudini Dodecaedri; eiuſque ſemiſſem RQ, altitudini vnius pyramidis pentagonæ eſſe æqualem. Quæ omnia facile intelligentur, ſi Dodecaedrum aliquod materiale adhibeatur.



DENIQVE datum ſit Icoſaedri latus, a b, ſupra quod extruatur pentagonum æquilaterum, & æquiangulum abcde, pro baſe pyramidis ex quinque baſibus Icoſaedri conflatæ. Iuncta autem recta c e, ſecetur latus a b, in ſ, bifariam, & recta ducatur ſd, quæ vt in Dodecaedro oſtendimus proxime, perpendicularis erit ad vtramque a b, ce. Fiat ſupra latus Icoſaedri cd, triangulum æquilaterum cdh, pro baſe vna Icoſaedri; & diuiſo latere cd, bifariam in k, iungatur recta hk, [e] quæ ad cd, erit perpendicularis. Præterea ſupra ce, fiat Iſoſceles cge, cuius vtrumq; laterum cg, eg, perpendiculari hk, ſit æquale. Poſt hæc ſupra ſd, conſtituatur triangulum ſdl, cuius latus ſl, perpendiculari hk, & latus dl, lateri Icoſaedri ab, ſit æquale. Denique angulo cge, fiat æqualis angulus mno, & recta no, perpendiculari hk, æqualis: Item angulus nop, angulo dls, rectaque op, lateri Icoſaedri a b, æqualis. Dico perpendicularem pq, ad mn, demiſſam, eſſe altitudinem Icoſaedri eiuſque ſemiſſem rq, altitudinem vnius pyramidis in Icoſaedro. Quia enim, vt ex Hypſicle ad finem Euclidis demonſtrauimus, angulus cge, metitur inclinationem vnius baſis ad alteram, ſi mn, concipiatur eſſe perpendicularis, quæ in baſe infima Icoſaedri ex angulo trianguli ad medium punctum lateris oppoſiti ducitur, reſpondebit no, perpendiculari, quæ in triangulo ad illam baſem inclinato ex eodem medio puncto ad angulum oppoſitum ducitur: propterea quod angulum mno, angulo inclinationis cge, & rectam no, perpendiculari hk, æqualem fecimus: Recta vero op, referet latus Icoſaedri inter angulum dicti trianguli inclinati, & angulum ſupremæ baſis poſitum; propterea quod recta op, poſita eſt æqualis lateri Icoſaedri, & angulus nop, angulo dls: [f] qui quidem æqualis eſt illi, quem dictum latus efficit cum perpendiculari ex angulo ſupradicti trianguli inclinati ad baſem, in medium punctum lateris oppoſiti ducitur. Eſt enim recta ds, æqualis perpendiculari ex angulo pentagoni ad latus oppoſitum ductæ, & latera ſl, dl, æqualia perpendiculari in triangulo inclinato, & lateri Icoſaedri inter angulum ſupremum pentagoni prædicti, & angulum trianguli inclinati. Ex quo fit, punctum p, in plano ſupremæ baſis exiſtere: ac proinde perpendicularem pq, ad planum baſis per mn, ductum demiſſam, æqualem eſſe altitudini Icoſaedri, eiuſque ſemiſſem rq, altitudini vnius pyramidis trigoni eſſe æqualem. Quæ omnia facile percipientur, ſi adhibeatur materiale aliquod Icoſaedrum. Inuenta porro hoc modo altitudine pyramidis, cognoſcenda eadem ſumma diligentia erit, beneficio inſtrumenti partium, in partibus lateris corporis regularis propoſiti.

e ſchol. 26. primi.

Altitudo pyramidis Icoſaedri.

f 8 primi.

DE

DE AREA SPHÆRÆ, INVENTIONEQVE ſuperficiei conuexæ eiuſdem ſphæræ.

CAPVT V.

VT ſphæræ aream, ſoliditatemue pluribus poſſimus viis aſſequi, demonſtranda prius erunt nonnulla ad eam rem valde neceſſaria, atque vtilia, quod ſequentibus 7. propoſitionibus efficiemus.

PROPOSITIO I.

QVAM proportionem habent duæ quælibet partes aliquotæ magnitudinis cuiuſcunque, eandem habent duæ ſimiles partes alterius cuiuſuis magnitudinis.



SIT enim A, eadem pars magnitudinis B, quæ C, magnitudinis D: Item E, eadem pars magnitudinis B, quæ F, magnitudinis D. Dico eſſe, vt A, ad E, ita C, ad F. Quoniam enim eſt, vt A, ad B, ita C, ad D, quod vtrobiq; eadem proportio ſubmultiplex poſita ſit. Item vt B, ad E, ita D, ad F; quod vtrobique poſita ſit eadem proportio multiplex: erit ex æquo, vt A, ad E, ita C, ad F, quod eſt propoſitum.

IDEM ſequitur, ſi A, & C, ſint ipſarum B, D, eædem partes plures non facientes vnam: Item, ſi E, & F, earundem B, D, ſint eædẽ partes plures non faciẽtes vnam, vt $\frac{2}{3}$. vel $\frac{3}{5}$. &c. Nam ſi verbi gratia A, C, ſint $\frac{3}{4}$. ipſarũ, B, D, erit $\frac{1}{4}$. ipſius B, ad B, vt $\frac{1}{4}$. ipſius D, ad D.[a] Igitur erunt quoque, vt $\frac{3}{4}$. ipſius B, hoc eſt, ipſa A, ad B, ita $\frac{3}{4}$. ipſius D, hoc eſt, ipſa C, ad D. Rurſus ſi verbi gratia E, F, ſint $\frac{2}{3}$. ipſarum B, D, erit, vt B, ad $\frac{1}{3}$. eiuſdem B, ita D, ad $\frac{1}{3}$. eiuſdem D.[b] Ac proinde vt B, ad $\frac{2}{3}$. id eſt, ad E, ita D, ad $\frac{2}{3}$. i.e. ad F. Quare, vt prius, erit ex æquo, vt A, ad E, ita C, ad F. a ſchol. 22. quinti. b ſchol. 22. quinti.

COROLLARIVM.

SEQVITVR hinc, ita eſſe $\frac{1}{4}$. cuiuſuis magnitudinis ad $\frac{1}{3}$. eiuſdem, vt eſt $\frac{1}{2}$. cuiuſuis alterius magnitudinis ad $\frac{2}{3}$. eiuſdem. Quoniam enim, vt oſtendimus, ita eſt $\frac{1}{4}$ prioris magnitudinis ad $\frac{1}{3}$. eiuſdem, vt $\frac{1}{4}$. poſterioris ad $\frac{1}{3}$. eiuſdem.[c] Vt autem $\frac{1}{4}$. poſterioris ad $\frac{1}{3}$. ita ſunt $\frac{2}{4}$. ad $\frac{2}{3}$. hoc eſt, $\frac{1}{2}$. ad $\frac{2}{3}$. Igitur erit vt $\frac{1}{4}$. prioris magnitudinis ad $\frac{1}{3}$. eiuſdem, ita $\frac{1}{2}$. poſterioris magnitudinis ad $\frac{2}{3}$. eiuſdem. c 11. quint.

PROPOSITIO II.

RECTANGVLVM ſub diametro, & circumferentia maximi circuli in ſphæra comprehenſum, quadruplum eſt circuli maximi, & ſuperficiei conuexæ eiuſdem ſphæræ æquale.

SIT rectangulum AB, comprehenſum ſub diametro AC, & circumferentia CB, maximi in ſphæra circuli. Dico rectaogulum AB, quadruplum eſſe circuli maximi in ſphæra, & ſuperficiei conuexæ eiuſdẽ ſphæræ æquale. Sectis enim omnibus lateribus bifariam in E, F, G, H, iunctiſque rectis EG, FH, ſecantibus ſeſe in I, diuiſum erit totum rectangulum in quatuor æqualia AI, CI, BI, DI,[d] quod rectæ EG, FH, rectis AD, AC, parallelæ ſint. Ac proinde rectangulum AB, rectanguli CI, quadruplum erit. Eſt autem rectangulum CI, contentum ſub CE, ſemidiametro, & ſemicircumferentia CF, circulo maximo, cuius nimirum diameter AC, æquale, vt lib. 4. cap. 7. Num 1. demonſtratum eſt. Igitur rectangulum AB, circuli maximi quadruplum eſt. Et quia eiuſdem circuli maximi quadrupla eſt ſuperficies conuexa ſphæræ, per propoſ. 31. lib. 1. Archimedis de ſphæra, & cylindro:[e] æquale erit rectangulum AB, conuexæ ſuperficiei. Quod erat demonſtrandum. d 33 primi. e 9. quinti.



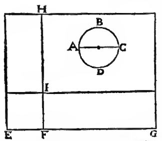
COROLLARIVM.

EX demonſtratione liquet, rectangulum ſub diametro cuiuſuis circuli, (etiamſi non ſit maximus in ſphæra,) & circumferentia eiuſdem, quadruplum eſſe ipſius circuli. Eadem enim ſemper demonſtratio adhibebitur.

PROPOSITIO III.

EADEM eſt proportio quadrati circumferentiæ circuli maximi in ſphæra ad ſuperficiẽ ſphæræ, quæ circumferentiæ circuli maximi ad diametrum. Idem eadem eſt proportio quadrati diametri maximi circuli in ſphæra ad ſuperficiem ſphæræ, quæ diametri ad circumferentiam eiuſdem circuli maximi.

SIT circulus ſphæræ maximus ABCD, eiuſque diameter AC. Dico ita eſſe quadratum ex circumferentia ABCD, deſcriptum ad ſuperficiem ſphæræ, cuius diameter AC, vt eſt circumferentia ABCD, ad diametrum



AC.Item ita eſſe quadratum diametri AC,circuli maximi in ſphæra,ad ſuperficiem ſphæræ,vt eſt diameter AC, ad circũferentiam ABCD. Sit enim EF,diametro AC,& recta FG, circumferentiæ ABCD, æqualis, & ſuper FG, conſtruatur quadratum GH, capiaturque FI , ipſi EF, æqualis; eritque EI,quadratum diametri EF,vel AC. Perfecta autem figura, vt vides, erit tam rectangulum GI, ſub diametro FI, maximi circuli, & circumferentia FG, quam rectangulum EH, ſub diametro E, F, eiuſdem circuli maximi, & circumferentia FH, æquale per præcedentem, ſuperficiei conuexæ ſphæræ.[a] Cum ergo ſit, vt GH, quadratum ex circumferentia FG.deſcriptum ad rectangulum EH,ſuperficiei conuexę ſphæræ æquale,ita GF, circumferentia ad EF, diametrum circuli maximi.conſtat primum.

a 1. ſexti.

b 1. ſexti. [b] ITEM cum ſit,vt EI,quadratum diametri EF, maximi circuli, ad IG, rectangulum ſuperficiei conuexæ ſphæræ æquale, ita EF, diameter maximi circuli ad FG , circumferentiam, patet id, quod ſecundo loco proponitur.

COROLLARIVM.

Area circuli. HINC manifeſtum eſt(id quod lib.4.cap.7. Num. 1.etiam demonſtrauimus) circuli aream gigni tam ex $\frac{1}{4}$ diametri in totam circumferentiam,quam ex $\frac{1}{4}$ circumferentię in totam diametrum.Cum enim circulus ABCD, ſit quarta pars rectanguli GI, quod hoc illius quadruplum ſit oſtenſum propoſ. 2. [c] Contineatur autem quarta pars rectanguli GI,tam ſub $\frac{1}{4}$.diametri FI,& circumferentia FG,quam ſub $\frac{1}{4}$.circumferentiæ FG,& diametro FI;liquido conſtat, quod proponitur.

c 1. ſexti.

PROPOSITIO IV.

QVADRATVM circumferentiæ circuli maximi in ſphæra ad ſuperficiem ſphæræ conuexam maiorem proportionem habet, quam 223. ad 71. minorem vero,quam 22 ad 7.

CVM enim per præcedentem ſit,vt quadratum circumferentiæ maximi circuli ad ſuperficiem connexam ſphæræ, ita circumferentia eiuſdem circuli ad diametrum :[a] ſit autem maior proportio circumferentiæ ad diametrum,quam $3\frac{10}{71}$.ad 1.hoc eſt,quam 223. ad 71.minor vero,quam $3\frac{1}{7}$.ad 1.hoc eſt,quam 22.ad 7.liquet id,quod propoſitum eſt.

a 2 de Dimenſ. circuli lib. 4.

PROPOSITIO V.

QVADRATVM diametri circuli in ſphæra maximi ad ſuperficiem ſphæræ conuexam, maiorem proportionem haber quam 7.ad 22.minorem vero,quam 71.ad 223.

CVM enim per propoſ.3.ſit, vt quadratum diametri ad ſuperficiem ſphæræ,ita diameter ad circumferentiam:[a] Sit autem maior proportio diametri ad circumferentiam,quam 7.ad 22.([b]quod minor ſit proportio circumferentiæ ad diametrum, quam 22. ad 7.) minor vero,quam 71.ad 223. (quod maior ſit proportio circumferentiæ ad diametrum,quam 223.ad 71.patet verum eſſe, quod proponitur.

a 26. quin.
b 2. de Dimenſ. circuli lib.4.

PROPOSITIO VI.

PROPORTIO cubi ex circumferentia maximi in ſphæra circuli deſcripti, ad ſphæram maior eſt,quam 298374.ad 5041.minor autem,quam 2904.ad 49.

CVM enim ſit per propoſ 1.cap.7.lib.4.vt circumferentia maximi circuli in quauis ſphæra, ad circumferentiam maximi circuli in quauis alia ſphæra, ita diameter ad diametrum:[a] habeat autem cubus circumferentiæ prioris ſphæræ ad cubum circumferentiæ ſphæræ poſterioris, proportionem triplicatam circumferentiæ ad circumferentiam;[b] Item ſphæra prior ad poſteriorem ſphæram, proportionem triplicatam diametri ad diametrũ: erit vt cubus ex circumferentia prioris ſphæræ deſcriptus ad cubum ex poſterioris ſphæræ circumferentia deſcriptum.ita ſphæra prior ad poſteriorem ſphæram;Et permutando,vt cubus circumferentiæ ſphæræ prioris ad priorem ſphæram,ita cubus circumferentiæ poſterioris ſphæræ ad ſphæram poſteriorem.

a 33. unde.
b 18. duod.

IAM vero,ſi circumferentia circuli maximi alicuius ſphæræ ſit 1.diuidaturque per $3\frac{10}{71}$.producetur diameter $\frac{71}{223}$.maior quam vera,ex coroll.propoſ.2.de dimenſione circuli. Si igitur eius ſemiſſis $\frac{71}{446}$ in $\frac{1}{2}$.ſemiſſem circumferentiæ ducatur,procreabitur area circuli maximi $\frac{71}{892}$. maior, quam vera: quæ rurſus ducta in $\frac{2}{3}$.diametri inuentæ(quæ etiam maior eſt,quam vera)nimirum in $\frac{142}{669}$. gignet, vt infra in regula 2. oſtendam, ſoliditatem ſphæræ $\frac{10082}{596748}$.hoc eſt, $\frac{5041}{298374}$.maiorem tamen,quam veram.[c] Maior ergo erit proportio cubi ex circumferẽtia 1.deſcripti,qui cubus eſt 1.ad ſphæram,quam ad $\frac{5041}{298374}$.Cum ergo ſit 1.ad $\frac{5041}{298374}$.vt 298374 ad 5041.(Quoniam enim ex propoſitione 2. Minutiarum ad finem lib. 9. Euclid. eadem eſt proportio Numeratoris 5041 ad denominatorem 298374.quæ minutiæ $\frac{5041}{298374}$.ad ſuum integrum 1.erit conuertendo,vt 298374.ad 5041. ita 1. ad $\frac{5041}{298374}$.)maior erit proportio cubi ex circumferentia 1.deſcripti, qui cubus eſt 1. ad ſphæram, quam 298374. ad 5041. Cum igitur ita ſe habeat cubus ex circumferentia maximi circuli in ſphæra qualibet deſcriptus ad ſphæram,vt cubus circumferentiæ 1.ad ſuam ſphæram,vt initio huius propoſ.oſtendimus ; Conſtat id,quod primo loco propouitur.

c 8. quinti.

RVR-

RVRSVS ſi circumferentia 1. diuidatur per $3\frac{1}{7}$. producetur diameter $\frac{7}{22}$ minor quam vera, ex coroll. propoſ. 2. de dimenſione circuli. Si igitur eius ſemiſſis $\frac{7}{44}$. ducatur in $\frac{1}{2}$. ſemiſſem circumferentiæ, procreabitur area circuli maximi $\frac{7}{88}$. minor quam vera: quæ rurſus ducta in $\frac{2}{3}$. diametri inuentæ (quæ etiam minor eſt, quam vera) nimirum in $\frac{14}{66}$. hoc eſt, in $\frac{7}{33}$. producet, vt infra in regula 2. docebo, ſoliditatem ſphæræ $\frac{49}{2904}$ minorem tamen, quam veram. [d] Minor ergo erit proportio cubi ex circumferentia 1. deſcripti, qui cubus eſt 1. ad ſphæram, quam ad $\frac{49}{2904}$. Cum ergo ſit 1. ad $\frac{49}{2904}$. vt 2904. ad 49. (Quoniam enim ex propoſ. 2. Minutiarum ad finem lib. 9. Eucl. eadem proportio eſt Numeratoris 49. ad denominatorem 2904. quæ minutiæ $\frac{49}{2904}$. ad ſuum integrum 1. erit conuertendo, vt 2904. ad 49. ita 1. ad $\frac{49}{2904}$.) minor erit proportio cubi deſcripti ex circumferentia 1. qui cubus eſt 1. ad ſphæram, quam 2904. ad 49. Cum igitur ita ſe habeat cubus ex circumferentia maximi circuli ſphæræ cuiuslibet deſcriptus, ad ſphæram, vt cubus circumferentiæ 1. ad ſuam ſphæram, vt initio huius propoſitionis demonſtrauimus, patet etiam id, quod ſecundo loco propoſitum erat. *[d] 8. quinti.*

PROPOSITIO VII.

CVBVS diametri ſphæræ ad ſphæram, maiorem proportionem habet, quam 21. ad 11. minorem vero, quam 426. ad 223.

CVM enim ſit, vt cubus diametri cuiuslibet ſphæræ ad cubum diametri alterius ſphæræ, ita ſphæra ad ſphæram [a] quod vtraque proportio ſit triplicata proportionis diametrorum: erit permutando, vt cubus diametri cuiuslibet ſphæræ ad ipſam ſphæram, ita cubus diametri alterius ſphæræ ad ipſam ſphæram. *[a] 33. vnde. & 18. duodec.*

QVOD ſi diameter alicuius ſphæræ ponatur 1. multiplicetur que per $3\frac{1}{7}$. [b] proueniet circuli maximi circumferentia $\frac{22}{7}$. maior quam vera. Eius ergo ſemiſſis $\frac{11}{7}$. in $\frac{1}{2}$. ſemiſſem diametri ducta efficiet $\frac{11}{14}$. aream ipſius maximi circuli vera maiorem: ac proinde ſi hæc area maior, quam vera, ducatur in $\frac{2}{3}$. diametri, gignetur, vt infra in regula 2. dicetur, ſoliditas ſphæræ $\frac{22}{42}$. hoc eſt, $\frac{11}{21}$ maior quã vera. [c] Igitur cubus diametri 1. qui eſt 1. ad ſphæram, proportionem habebit maiorem, quam ad $\frac{11}{21}$. Cum ergo ſit 1. ad $\frac{11}{21}$. vt 21. ad 11. (Quia enim ex propoſ. 2. Minutiarum ad finem lib. 9. Euclid. eadem eſt proportio Numeratoris 11. ad Denominatorem 21. quæ Minutiæ $\frac{11}{21}$. ad ſuum integrum 1. erit conuertendo vt 21. ad 11. ita 1. ad $\frac{11}{21}$.) maior erit proportio cubi 1. ex diametro 1. deſcripti ad ſphæram, quam 21. ad 11. Et quia, vt initio huius propoſitionis oſtendimus, ita eſt cubus diametri cuiuſuis alterius ſphæræ ad ipſam ſphæram, vt cubus diamatri 1. ad ſuam ſphæram, verum eſt, quod primo loco eſt propoſitum, *[b] coroll. 2. Dimenſ. circuli* *[c] 8. quint.*

[d] ITEM ſi diameter 1. ducatur in $3\frac{10}{71}$. producetur circumferentia maximi circuli $\frac{223}{71}$. minor quam vera. Eius ergo ſemiſſis $\frac{223}{142}$. ducta in $\frac{1}{2}$. ſemiſſem diametri 1. faciet $\frac{223}{284}$. aream circuli maximi vera minorem; ideoque ſi ea ducatur in $\frac{2}{3}$. diametri 1. procreabitur, vt infra in regula 2. dicetur, ſoliditas ſpæræ $\frac{446}{852}$. hoc eſt, $\frac{223}{426}$. minor quã vera. [e] Igitur cubus 1. diametri 1. ad ſphæram habebit proportionem minorem, quam ad $\frac{223}{426}$. Cum ergo ſit 1. ad $\frac{223}{426}$ vt 426. ad 223. (Quia enim ex propoſ. 2. Minutiarum ad finem lib. 9. Euclid. eadem proportio eſt Numeratoris 223. ad denominatorem 426. quæ Minutiæ $\frac{223}{426}$ ad ſuum integrum 1. erit conuertendo, vt 426. ad 223. ita 1. ad $\frac{223}{426}$.) minor erit proportio cubi diametri 1. ad ſuam ſphæram, quam 426 ad 223. Quoniam vero, vt ad initium huius propoſitionis oſtendimus, ita eſt cubus diametri cuiuslibet ſphæræ alterius ad ipſam ſphæram, vt cubus diametri 1. ad ſuam ſphæram, liquet etiam id, quod ſecundo loco propoſitum eſt. *[d] coroll. 2. Diment. circult.* *[e] 8. quinti.*

2 HIS præmiſſis, ſequuntur regulæ ad inueſtigandam tam ſuperficiem conuexam cuiuslibet ſphæræ, quam eiuſdem ſoliditatem.

I.

SVPERFICIEM conuexam propoſitæ ſphæræ adinuenire.

AREA maximi circuli datæ ſphæræ quadruplicetur. Productus enim numerus conuexam ſphæræ ſuperficiem exhibebit: propterea quod per propoſ. 31. lib. 1. Archimedis de ſphæra, & Cylindro, ſuperficies ſphæræ quadrupla eſt circuli maximi. *Superficies conuexa ſphæra.*

EADEM ſuperficies procreabitur, ſi diameter ſphæræ in circumferentiam circuli maximi ducatur: propterea quod per propoſ. 2. Num. 2. huius cap. rectangulum ſub diametro, & circumferentia maximi circuli comprehenſum ſuperficiei conuexæ ſphæræ eſt æquale. *Soliditas ſphæra.*

II.

SOLIDITATEM propoſitæ ſphæræ exquirere.

1 *SPHÆRÆ ſoliditas producitur ex eius ſemidiametro in tertiam partem ſuperficiei conuexa: Vel ex $\frac{1}{4}$. totius diametri in $\frac{2}{3}$. conuexa ſuperficiei.*

2 *ITEM ex duabus tertiis partibus diametri in aream circuli maximi.*

3 *VEL ex duabus tertiis partibus area circuli maximi in totam diametrum.*

4 *VEL ex ſemidiametro in quatuor tertias partes area circuli maximi.*

5 *VEL ex ſemiſſe area circuli maximi in quatuor tertias partes diametri.*

6 *VEL ex dupla diametre in tertiam partem area circuli maximi.*

7 *VEL ex diametro in ſextam partem ſuperficiei ſphæra.*

8 *VEL denique ex tertia parte diametri in ſemiſſem ſuperficiei conuexa ſphæra.*

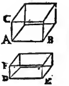
Demõſtratio prima partis. PRIMVM demonſtratum à nobis eſt in commentariis in ſphæram, quam demonſtrationem repetemus lib. 7. de Iſoperimetris. Idem tamen aliter hac ratione demonſtrabimus. Concipiatur conus, cuius baſis maximus circulus ſphæræ, & altitudo ſemidiameter eiuſdem. Item alius conus, cuius baſis quadrupla ſit maximi circuli, & altitudo ſemidiameter eadem. Et quia prioris coni tam ſphæra, per propoſ. 32. lib. 1. Archimedis de ſphæra, & cylindro, quadrupla eſt,[a] quam poſterior conus:[b] erunt poſterior conus, & ſphæra inter ſe æquales.

a 11. duode. b 9. quinti. c 2. duod. RVRSVS quia circulus, cuius ſemidiameter æqualis eſt toti diametro ſphæræ, quadruplus eſt circuli maximi [c] (cum enim ſit circulus ad circulum, vt quadratum diametri ad quadratum diametri: quadratum autẽ prioris diametri quadruplum ſit quadrati diametri poſterioris, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. Eucl. quod illa diameter ſit huius dupla; quandoquidem ſemiſſis prioris diametri ſumpta eſt poſteriori diametro æqualis; erit quoque circulus circuli quadruplus) erit idem circulus, cuius ſemidiameter diametro ſphæræ æqualis eſt, æqualis baſi poſterioris coni, cum huius baſis quadrupla etiam poſita ſit maximi circuli. Quia vero etiam ſuperficies ſphæræ *d 9. quinti.* quadrupla eſt circuli maximi, ex propoſ. 31. lib. 1. Archimedis de ſphæra, & cylindro: [d] Erunt ſuperficies ſphæræ, baſis poſterioris coni, & circulus ſemidiametrum habens æqualem diametro ſphæræ, inter ſe æquales.

POSTREMO concipiatur cylindrus, cuius baſis ſit prædictus circulus ſemidiametrum diametro ſphæræ *e 10. duod.* habens æqualem, altitudo vero ſemidiameter ſphæræ. [e] Erit hic cylindrus triplus poſterioris coni prædicti: ac *f 11. duode.* proinde & ſphæræ, quæ ei cono eſt oſtenſa æqualis. [f] Idem autem cylindrus triplus quoque eſt cylindri, qui eandem habeat altitudinem, & baſem tertiæ parti baſis illius cylindri, hoc eſt, tertiæ parti ſuperficiei ſphæræ æqua- *g 9. quinti.* lem.[g] Ergo poſterior cylindrus, (baſem habens tertiæ parti ſuperficiei ſphæræ æqualem, altitudinem vero ſemidiametro eiuſdem ſphæræ æqualem) & ſphæra æquales ſunt. Cum ergo cylindrus hic poſterior continetur ſub ſemidiametro ſphæræ, & tertia parte ſuperficiei ſphæricæ: liquido conſtat, ſphæræ ſoliditatem gigni ex ſemidiametro in partem tertiam ſuperficiei ſphæræ. Vel ex $\frac{1}{4}$. totius diametri in $\frac{2}{3}$. ſuperficiei ſphæræ: cum hic numerus illi ſit æqualis, quod eſt primum.

Demõſtratio ſecunda partis. CONCIPIATVR rurſum cylindrus, cuius baſis maximus circulus ſphæræ, & altitudo diameter ſphæræ. Erit hic cylindrus ſeſquialter ſphæræ, ex coroll. propoſ. 32. lib. 1. Archimedis de ſphæra, & cylindro. Quod ſi ex parte ſuperiori per tertiam partem diametri ſphæræ, vel axis cylindri, ducatur baſibus cylindri planum paralle- *h 13. duod.* lum:[h] erit totus cylindrus ad cylindrum abſciſſum, cuius axis duæ tertiæ partes ſunt totius axis, ſeſquialter; [i] Ac *i 9. quint.* proinde poſterior hic cylindrus abſciſſus, qui quidem continetur ſub maximo circulo, nempe ſub ſua baſi, & duabus tertiis partibus diametri ſphæræ, ſphæræ æqualis erit. Patet igitur etiam ſecundum.

A L I T E R



SIT parallelepipedum ABC, comprehẽſum ſub AC, duabus tertiis partibus diametri ſphæræ, & ſub baſi AB, quæ circulo maximo eiuſdem ſphæræ ſit æqualis. Dico parallelepipedum ABC, ſphæræ æquale eſſe. Sit enim aliud parallelepipedum DEF, contentum ſub DF, ſemidiametro ſphæræ, & ſub baſe DE, quæ tertiæ parti ſuperficiei ſphæræ ſit æqualis, quod vt in prima parte huius 2. regulæ demonſtrauimus, æquale erit ſphæræ propoſitæ. Quia ergo baſis AB, circulo maximo ſphæræ æqualis, eſt $\frac{1}{4}$. ſuperficiei ſphæræ; erit ex coroll propoſ. 1. huius cap. vt AB, hoc eſt, vt $\frac{1}{4}$. ſuperficiei ſphæræ ad DE, id eſt, ad $\frac{1}{3}$. eiuſdem ſuperficiei, ita DF, hoc eſt, ita $\frac{1}{2}$. diametri ſphæræ, ad AC, id eſt, ad $\frac{2}{3}$. eiuſdem diametri. Ac proinde cum baſes AB, DE. cum altitudinibus DF, AC, reciprocen- *k 34. vndt.* tur,[k] parallelepipeda ABC, DEF, æqualia inter ſe erunt. Cum ergo DEF, ſphæræ æquale ſit, vt dictum eſt, erit quoque ABC, eidem ſphæræ æquale, quod eſt propoſitum.

A L I T E R.

QVONIAM ex coroll. propoſ. 1. huius cap. eſt, vt $\frac{1}{4}$. ſuperficiei ſphæræ ad $\frac{1}{3}$. eiuſdem ſuperficiei, ita $\frac{1}{2}$. dia- *l 19. ſeptim.* metri ad $\frac{2}{3}$. eiuſdem diametri:[l] idem numerus efficietur ex primo numero, nimirum ex $\frac{1}{4}$. ſuperficiei, id eſt, ex circulo maximo ſphæræ, in quartum, nimirum in $\frac{2}{3}$. diametri, qui ex ſecundo, id eſt, ex $\frac{1}{3}$. ſuperficiei, in tertium, hoc eſt, in $\frac{1}{2}$. diametri. Sed ex $\frac{1}{3}$. ſuperficiei in $\frac{1}{2}$. diametri ſoliditas ſphæræ procreatur, vt in prima parte huius 2. regulæ oſtenſum eſt. Igitur eadem ſoliditas ex circulo maximo in $\frac{2}{3}$. diametri gignetur, quod eſt propoſitum.

Demõſtratio tertia partis. RVRSVS quia cylindrus, cuius baſis circulus maximus ſphæræ, & altitudo diameter eiuſdem, ſeſquialter eſt ipſius ſphæræ, ex coroll. propoſ. 32. lib. 1. Archimedis de ſphæra, & cylindro: [m] Idemque cylindrus ſeſquialter *m 11. duod.* etiam eſt cylindri, cuius baſis æqualis ſit duabus tertiis partibus circuli maximi, & altitudo eadem diameter; [n] e- *n 9 quinti.* runt poſterior hic cylindrus, & ſphæra æquales: hoc eſt, ſphæra producetur ex $\frac{2}{3}$. areæ maximi circuli in diametrum ſphæræ, quod eſt tertium.

Demõſtratio quarta partis. CONCIPIANTVR quoque duo parallelepipeda, quorum vnius baſis ſit $\frac{2}{3}$. areæ maximi circuli in ſphæra æqualis, & altitudo toti diametro: alterius vero baſis æqualis ſit $\frac{4}{3}$. areæ circuli maximi, & altitudo ſemidiametro. Et quia horum parallelepipedorum baſes cum altitudinibus reciprocantur: quod tam prioris baſis ſubdupla *o 34. vndt.* ſit baſis poſterioris, quam altitudo poſterioris altitudinis prioris:[o] erunt ipſa parallelepipeda æqualia. Sed prius, per tertiam partem huius 2. regulæ, æquale eſt ſoliditati ſphæræ, igitur & poſterius. Ideoque ſphæra producetur ex ſemidiametro in $\frac{4}{3}$. areæ circuli maximi, quod quarto loco proponitur.

Demõſtratio quinta partis. PRÆTEREA concipiantur duo parallelepipeda, quorum vnius baſis æqualis ſit areæ circuli in ſphæra maximi, & altitudo æqualis $\frac{2}{3}$. diametri: alterius vero baſis æqualis ſit $\frac{4}{3}$. areæ circuli maximi, & altitudo $\frac{1}{2}$. diametri. Et quia horum parallelepipedorum baſes reciprocantur cum altitudinibus; quod tam baſis in priori dupla ſit baſis

ſit baſis in poſteriori, quam altitudo in poſteriori altitudinis in priori: [a] æqualia erunt ipſa parallelepipeda: Sed prius eſt, per 2. partem huius 2. regulæ, æquale ſphæræ. Igitur, & poſterius: atque idcirco ſphæra gignetur ex $\frac{1}{2}$. areæ circuli maximi in $\frac{4}{3}$. diametri. quod eſt quintum. *a 34. vnde.*

ITEM intelligantur duo parallelepipeda, quorum vnius baſis æqualis ſit $\frac{2}{3}$. areæ circuli maximi in ſphæra, & altitudo diametro: alterius vero baſis æqualis ſit $\frac{1}{3}$. areæ maximi circuli, & altitudo duplæ diametro. Et quia horum parallelepipedorum baſes cum altitudinibus reciprocantur: quod tam baſis in priori ſit dupla baſis in poſteriori, quam altitudo in poſteriori altitudinis in priori: [b] erunt ipſa parallelepipeda æqualia: Sed prius per 3. partem huius 2. regulæ, æquale eſt ipſi ſphæræ. Igitur & poſterius: Ac proinde ſphæra ex dupla diametro in $\frac{1}{3}$. areæ circuli maximi procreabitur, quod ſexto loco eſt propoſitum. *Demonſtratio ſextæ partis.* *b 34. vnde.*

INTELLIGANTVR quoq; duo parallelepipeda, quorum vnius baſis contineat $\frac{1}{3}$. ſuperficiei ſphæræ, & altitudo $\frac{1}{2}$. diametri: alterius vero baſis comprehendat $\frac{1}{6}$. ſuperficiei, & altitudo æqualis ſit diametro. Et quoniam baſes cum altitudinibus ſunt reciprocæ, quod ita ſit $\frac{1}{3}$. ſuperficiei, baſis videlicet prioris parallelepipedi ad $\frac{1}{6}$. ſuperficiei, id eſt, ad baſem poſterioris, vt altitudo poſterioris, nempe diameter, ad prioris altitudinem, nimirum ad $\frac{1}{2}$. diametri, cum vtraque proportio ſit dupla: [c] ipſa parallelepipeda æqualia erunt: Sed prius ipſi ſphæræ, per 1. partem huius 2. regulæ æquale eſt. Igitur, & poſterius: hoc eſt, ſphæræ ſoliditas producetur ex diametro in ſextam partem ſuperficiei, quod eſt ſeptimum. *Demonſtratio ſeptimæ partis.* *c 34. vnde.*

DENIQVE concipiantur duo parallelepipeda, quorum vnius baſis ſit $\frac{1}{3}$. ſuperficiei ſphæræ, & altitudo ſemidiameter: alterius autem baſis ſit $\frac{1}{2}$. ſuperficiei, & altitudo $\frac{1}{3}$. diametri. Quia vero baſes, & altitudines reciprocantur, quod ita ſit $\frac{1}{3}$. ſuperficiei ad $\frac{1}{2}$. ſuperficiei, nimirum baſis prioris parallelepipedi ad baſem poſterioris, vt $\frac{1}{3}$. diametri ad $\frac{1}{2}$. diametri, altitudo videlicet poſterioris parallelepipedi ad altitudinem prioris; [d] æqualia erunt ipſa parallelepipeda. Cum ergo, per 1. partem huius 2. regulæ, prius ſit ſphæræ æquale, eidem quoque poſterius æquale erit: Ac propterea ſphæræ ſoliditas producetur ex tertia parte diametri in ſemiſſem conuexæ ſuperficiei, quod eſt octauum. *Demonſtratio octauæ partis.* *d 34. vnde.*

3 IAM vero ex propoſ. 4. & 5. huius cap. Num. 1. colliguntur quatuor ſequentes regulæ, per quas ſuperficies ſphæræ conuexa inuenitur tum maior quam vera, tum minor, tam ex circumferentia, quam ex diametro circuli maximi.

I.

EX circumferentia circuli in ſphæra maximi ſuperficiem conuexam ſphæræ procreare vera maiorem.

FIAT vt 223. ad 71. ita quadratum ex circumferentia maximi circuli data deſcriptum ad aliud, prodibitq; ſphæræ ſuperficies maior quam vera. Cum enim per propoſ. 4. huius cap. Num. 1. maior ſit proportio quadrati circumferentiæ circuli maximi ad ſuperficiem ſphæræ, quam 223. ad 71. ſit autem quadratum datæ circumferentiæ ad numerum procreatum, vt 223. ad 71. habebit quoque quadratum circumferentiæ datæ ad ſuperficiem ſphæræ veram, maiorem proportionem, quam idem quadratum ad numerum productum: [a] ideoq; productus numerus maior erit ſuperficiei vera. *Superficies ſphæra maior, quam vera.* *a 10. quint.*

II.

EX circumferentia circuli in ſphæra maximi ſuperficiem ſphæræ conuexam vera minorem eruere.

FIAT vt 22. ap. 7. ita quadratum ex circumferentia maximi circuli data deſcriptum ad aliud. Numerus enim genitus minor erit vera ſuperficie ſphæræ. Cum enim per propoſ. 4. huius cap. Num. 1. minor ſit proportio quadrati circumferentiæ circuli maximi ad ſuperficiem ſphæræ, quam 22. ad 7. Sit autem quadratum datæ circumferentiæ ad numerum genitum, vt 22. ad 7. habebit quoq; quadratum datæ circumferentiæ ad ſuperficiem veram ſphæræ, minorem proportionem, quàm idem quadratum ad numerum productum. [a] Quamobrem numerus productus vera ſuperficie ſphæræ minor erit. *Superficies ſphæra minor, quam vera.* *a 10. quint.*

III.

EX diametro circuli in ſphæra maximi ſuperficiem ſphæræ vera maiorem elicere.

FIAT vt 7. ad 22. ita quadratum diametri datæ circuli maximi ad aliud, gigneturq; ſuperficies ſphæræ maior, quam vera. Nam cum, per propoſ. 5. huius cap. Num. 1. maior ſit proportio quadrati diametri circuli maximi ad ſuperficiem ſphæræ veram, quam 7. ad 22. Sit autem quadratum diametri datæ ad productum numerum, vt 7. ad 22. habebit quoque quadratum datæ diametri ad ſuperficiem veram ſphæræ, maiorem proportionem, quã idem quadratum ad productum numerum. [a] Quocirca procreatus numerus maior erit, quam vera ſuperficies ſphæræ. *Superficies ſphæra maior, quam vera.* *a 10. quint.*

IV.

EX diametro circuli in ſphæra maximi ſuperficiem ſphæræ vera minorem colligere.

FIAT vt 71. ad 223. ita quadratum datæ diametri circuli maximi ad aliud. Numerus namq; genitus ſuperficiem ſphæræ vera minorem exhibebit. Quoniam enim per propoſ. 5. huius cap. Numer. 1. minor eſt proportio quadrati diametri ad ſuperficiem ſphæræ, quam 71. ad 223. Eſt autem quadratum datæ diametri ad productum numerum, vt 71. ad 223. Erit quoque minor proportio quadrati datæ diametri ad veram ſuperficiem ſphæræ quam eiuſdem quadrati ad numerum productum. [a] Quapropter minor erit productus numerus, quam vera ſuperficies ſphæræ. *Superficies ſphæra minor, quam vera.* *a 10. quint.*

Digitized by Google

4 PARI ratione ex propoſ. 6. & 7. huius c. Numer. 1. eliciuntur quatuor aliæ ſequentes regulæ, per quas tam ex circumferentia, quam ex diametro maximi circuli in ſphæra, eruitur ſoliditas ſphæræ tum maior, quam vera, tum minor.

I.

EX circumferentia circuli maximi in ſphæra ſoliditatem ſphæræ producere vera maiorem.

Soliditas ſphæræ maior, quam vera.

FIAT vt 298374. ad 5041. ita cubus ex data circumferentia maximi circuli deſcriptus ad aliud. Num. enim genitus dabit ſphæræ ſoliditatem vera maiorem. Nam cum. per propoſ. 6. huius cap. Nume. 1. maior ſit proportio cubi datæ circumferentiæ ad ſphæram, quam 298374. ad 5041. Sit autem cubus datæ circumferentiæ ad numerum procreatum, vt 298374. ad 5041. habebit quoque cubus datæ circumferentiæ ad ſphæræ ſoliditatem veram, maiorem proportionem, quam idem cubus ad productum numerum: [a] Ideoq; productus numerus maior erit, quam vera ſoliditas ſphæræ.

a 10. quint.

II.

EX circumferentia circuli maximi in ſphæra ſoliditatem ſpheræ vera minorem procreare.

Soliditas ſphæræ minor, quam vera.

FIAT, vt 2904. ad 49. ita cubus datæ circumferentiæ ad aliud. Nam productus numerus offeret ſphæræ ſoliditatem vera minorem. Cum enim per propoſ. 6. huius cap. Num. 1. minor ſit proportio cubi circumferentiæ datæ ad ſphæram, quam 2904 ad 49. ſit autem cubus datæ circumferentiæ ad numerum procreatū, vt 2940. ad 49. habebit quoq; cubus datæ circumferentiæ ad veram ſoliditatem ſphæræ, minorem proportionem, quam idem cubus ad numerum productum. [a] Idemque numerus productus minor erit vera ſuliditate ſphæræ.

a 10. quint.

III.

EX diametro maximi circuli in ſphæra ſoliditatem ſphæræ colligere vera maiorem.

Soliditas ſphæræ maior, quam vera.

FIAT vt 21. ad 11. ita cubus diametri datæ ad aliud. Procreatus namque numerus ſoliditatem ſphæræ dabit vera maiorem. Cum enim per propo. 7. huius c. Num. 1. maior ſit proportio cubi diametri ad ſphæram, quam 21. ad 11. Sit autem cubus datæ diametri ad numerum productum, vt 21. ad 11. habebit quoq; maiorem proportionē cubus datæ diametri ad veram ſoliditatem ſphæræ, quam idem cubus ad numerum genitum. [a] Qua propter numerus procreatus maior erit vera ſoliditate ſphæræ.

a 10. quint.

IV.

EX diametro maximi circuli in ſphæra ſoliditatem ſphæræ concludere vera minorem.

Soliditas ſphæræ minor, quam vera.

FIAT vt 426. ad 223. ita cubus datæ diametri ad aliud. Numerus enim proueniens minor erit, quam vera ſoliditas ſphæræ. Nam cum per propoſ. 7. huius cap. Num. 1. minor ſit proportio cubi datæ diametri ad ſphæram quam 426. ad 223. Sit autem cubus diametri datæ ad procreatum numerum, vt 426. ad 223. habebit quoque cubus datæ diametri ad ſphæram, proportionem minorem, quam idem cubus ad numerum genitum. [a] Quare minor erit numerus productus, quam vera ſoliditas ſphæræ.

a 10. quint.

DE AREA SEGMENTORUM ſphæræ.

CAPVT VI.

Superficies conuexa hemiſphærij.

1 HEMISPHERII *ſuperficies conuexa, excluſa baſe, gignitur ex area maximi circuli per 2. multiplicata. Vel ex ſemidiametro in circumferentiam maximi circuli. Vel denique ex tota diametro in ſemiſſem circumferentiæ maximi circuli.* Quæ omnia perſpicua ſunt ex 1. regula Num. 2. capitis 5. propterea quod hi numeri producti ſunt ſemiſſes illorum, qui ſuperficiem conuexam totius ſphæræ in ea regula exhibuerunt.

Superficies conuexa portionis ſphæræ.

2 SVPERFICIES *conuexa cuiuslibet portionis ſphæræ hemiſphærio maioris, vel minoris, dempta baſe, æqualis eſt circulo, cuius ſemidiameter æqualis eſt rectæ lineæ, quæ à vertice portionis ad circumferentiam baſis ducitur, ex propoſ. 40. lib. 1. Archimedis de ſphæra, & cylindro.* Sit enim maximus in ſphæra circulus ABCD, cuius diameter AC, quam in E, ad angulos rectos ſecet BD, recta, per quam intelligatur duci planum diametro ad angulos rectos, ſecans ſphæram in duas portiones, quarum baſis communis circulus diametri BD, & A, vertex minoris portionis, maioris autem vertex C. Iunctis autem rectis AB, CB, erit circulus ſemidiametri AB, ſuperficiei cōuexæ minoris portionis, & circulus ſemidiametri CB, conuexæ ſuperficiei maioris portionis æqualis, ex dicta prop. Archimedis. Quare ſi vtraque AB, CB, in partibus diametri AC, fiat nota, præſertim ope inſtrumenti partium capit. 1. lib. 2. conſtructi, & areæ circulorum ad interualla ſemidiametrorum AB, CB, deſcriptorum inueſtigentur, per ea, quæ lib. 4. cap. 7. ſcripſimus; notæ erunt ſuperficies conuexæ dictarum portionum ſphæræ.



EADEM

EADEM ſuperficies conuexa portionis ſphæræ hemiſpherio minoris, vel maioris, ita quoque cognoſcetur. Ex demonſtratis ab Archimede propoſ. 3. lib. 2. de ſphæra, & cylindro, eandem proportionem habet EC, ad EA, quam ſuperficies conuexa portionis ſphæræ baſem habentis circulum diametri BD, & verticem C, ad ſuperficiem conuexam portionis baſem habentis eundem circulum diametri BD, & verticem A. Igitur componendo quoque erit, vt tota diameter AC, ad AE, ita ſuperficies conuexa totius ſphæræ ad ſuperficiem conuexam portionis BAD. Eademque ratione erit, vt tota diameter AC, ad EC, ita conuexa ſuperficies totius ſphæræ ad ſuperficiem conuexam portionis BCD. Quocirca inueſtigata proportione diametri AC, ad ſegmenta AE, EC, per inſtrumentum partium capit. 1. lib. 1. conſtructum; ſi fiat, vt diameter AC, ad AE, ita ſuperficies conuexa totius ſphæræ, (quæ ex regula 1. Num. 2. cap. 5. huius lib. cognita fiet) ad aliud, proueniet conuexa ſuperficies portionis minoris BAD. Similique modo ſuperficies conuexa maioris portionis BCD, cognoſcetur; ſi fiat, vt diameter AC, ad EC, ita ſuperficies conuexa totius ſphæræ ad aliud.



ET quia, vt ex Archimede oſtendimus, ita diameter AC, ad AE, vel ad EC, vt tota ſuperficies ſphæræ ad ſuperficiem portionis BAD, vel BCD: erit quoque ita AF, ſemiſſis diametri ad AE, vel EC, vt hemiſpherii ſuperficies GAH, ad ſuperficiem portionis BAD, vel BCD, quod oſtendetur eodem modo, quo ſcholium propoſ. 22. lib. 5. Euclid. eſt demonſtratum: Si fiat, vt ſemidiameter ſphæræ AF, ad AE, vel EC, altitudinem portionis, ita hemiſphærii GAH, ſuperficies ad aliud; producetur rurſus conuexa ſuperficies portionis minoris BAD, vel maioris BCD.

IMMO cum ſit vt AF, ſemidiameter ad AE, ita hemiſphærij GAH, ſuperficies ad ſuperficiem portionis BAD,[a] erit per conuerſionem rationis, vt AF, ſemidiameter ad EF, ita ſuperficies hemiſphærij GAH, ad ſuperficiem fruſti GBDH, dempris baſibus. Ergo EF, eadem pars erit, vel partes diametri AC, vel ſemidiametri AF, quæ pars eſt, vel partes ſuperficiei fruſti GBDH, demptis baſibus, ſuperficiei totius ſphæræ, vel hemiſphærii GAH. Quam ob rem cognito, quæ pars ſit EF, vel partes ſemidiametri AF, ſi ex ſuperficie hemiſphærij GAH, eadem pars auferatur, vel partes, reliqua fiet ſuperficies conuexa minoris portionis BAD. Et ſi ad hemiſphærij GCH, ſuperficiem adiiciatur eadem pars, vel partes, conflabitur conuexa ſuperficies portionis maioris BCD. Verbi gratia, ſi EF, contineat $\frac{1}{3}$. ſemidiametri AF, & ex ſuperficie hemiſphærij GAH, tollantur $\frac{1}{3}$. reliqua fiet ſuperficies conuexa portionis minoris BAD: Et ſi $\frac{1}{3}$. ſuperficiei hemiſphærii adiiciantur ad ſuperficiem hemiſphærii GCH, conficietur ſuperficies conuexa maioris portionis BCD. Sic ſi EF, eſſet ſemiſſis ſemidiametri, auferenda eſſet ex hemiſphærii ſuperficie ſemiſſis ipſius, vel adiicienda: Et ſic de cæteris.

[a] coroll. 19. quinti.

3 HEMISPHÆRII ſoliditas producitur ex ſemidiametro in tertiam partem ſuperficiei hemiſphærij: Vel in ſextam partem ſuperficiei totius ſphæræ. Vel ex $\frac{1}{4}$. totius diametri in $\frac{2}{3}$. ſuperficiei hemiſphærij. *Soliditas hemiſphærij.*

ITEM ex duabus tertiis partibus diametri in ſemiſſem areæ circuli maximi.

VEL ex duabus tertiis partibus areæ circuli maximi in ſemidiametrum: Aut ex tertia parte areæ circuli maximi in totam diametrum.

VEL ex $\frac{1}{4}$. totius diametri in $\frac{4}{3}$. areæ circuli maximi.

VEL ex ſemiſſe areæ circuli maximi in $\frac{2}{3}$. diametri.

VEL ex dupla diametro in $\frac{1}{6}$. areæ circuli maximi.

VEL ex ſemidiametro in ſextam partem ſuperficiei ſphæræ.

VEL denique ex $\frac{1}{6}$. diametri in ſuperficiem hemiſphærij conuexam, quæ omnia ex 2. regula Nu. 2. c. 5. colliguntur: cum omnes hi numeri producti ſint ſemiſſes illorum, qui ſoliditatem totius ſphæræ in ea regula indicant.

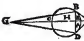
4 SOLIDITAS ſectoris ſphæræ (qui nimirum componitur ex minore portione ſphæræ, & cono baſem habente eandem cum portione, & altitudinem æqualem perpendiculari ex centro in baſem portionis deductæ; Vel qui relinquitur, ſi idem conus ex portione maiore ſubtrahitur vt in proxima figura, ſolidum compoſitum ex portione ſphæræ BAD, baſem habente circulum diametri BD, & ex cono habente eandem baſem, & verticem in centro F: Item ſolidum, quod relinquitur, ſi conus idem ex portione maiore BCD, dematur, appellamus ſectorem ſphæræ) hac ratione inueſtigabitur. Quoniam per propoſ. 42. lib. 1. Archimedis de ſphæra & cylindro, ſectori ſphæræ æqualis eſt conus baſem habens circulum æqualem ſuperficiei conuexæ portionis ſphæræ altitudinem vero ſemidiametro ſphæræ æqualem: Conus autem producitur, vt cap. 2 huius lib. Num. 1. declarauimus, vel ex baſe in $\frac{1}{3}$. altitudinis: Vel ex tota altitudine in $\frac{1}{3}$. baſis; vt ſector ſphæræ gignatur vel ex ſuperficie conuexa portionis ſphæræ in $\frac{1}{3}$. ſemidiametri, hoc eſt, in $\frac{1}{6}$. totius diametri: Vel ex ſemidiametro in $\frac{1}{3}$. ſuperficiei conuexæ portionis ſphæræ. *Soliditas ſectoris ſphæræ.*

5 SOLIDITAS vero cuiuſcunque portionis ſphæræ hoc modo procreabitur. Inueſtigetur ſoliditas ſectoris ſphæræ, vt proxime traditum eſt, Nam ſi, quando portio propoſita minor eſt hemiſphærio, ex hoc ſectore dematur conus eandem habens cum portione baſem, altitudinem vero perpendicularem ex centro ſphæræ in baſem portionis cadentem, reliqua fiet ſoliditas portionis minoris: At vero ſi, quando portio propoſita hemiſphærio maior eſt, idem conus ad ſectorem adiiciatur, conflabitur ſoliditas portionis maioris. Id quod perſpicuum eſt in ſuperiori figura, cum conus BFD, ablatus ex ſectore ABFDA, reliquam faciat portionem minorem BAD: Idem vero conus BFD, additus ſectoris CBFDC, conſtituat maiorem portionem BCD. Conus porro prædictus BFD, cognitus fiet ex baſe, nimirum ex circulo diametri BD, & altitudine EF, cognitis, vt ca. 2. huius lib. 1. docuimus. *Soliditas cuiuslibet portionis ſphæra.*

ALITER

SIT in ſphæra circulus maximus ABCD, & portiones ſphæræ, quarum baſis communis circulus diametri BD, & vertices A, C, quarum ſoliditates exquirendæ ſunt. Ex centro H, ducatur ad BD, perpendicularis HE,[b] quæ

rectam



e ſchol. 27. tertij.
d 12. ſexti.

rectam BD, ſecabit bifariam, [e] ac proinde & vtrumque arcum BAD, BCD, bifariam, hoc eſt, per vertices A, C, tranſibit. [d] Fiat, vt CE, ad ſummam rectarum CH, CE, ita AE, ad EF: Item, vt AE, ad ſummam rectarum AH, AE, ita EC, ad EG. Intelliganturq; duo coni, quorum baſis communis circulus diametri BD, & vertices F, G. Erit per propoſ. 2. lib. 2. Archimedis de ſphæra, & cylindro, conus BFD, portioni minori BAD, & conus BGD, portioni maiori BCD, æqualis. Quocirca, inuentis horum conorum ſoliditatibus, vt c. 2. huius lib. Num. 1. traditum eſt, inuentæ quoq; erunt ſoliditates portionum BAD, BCD, quod eſt propoſitum.

Soliditas cuiuslibet fruſti ſphæræ.

6 SOLIDITAS denique cuiuſcunque fruſti ſphæræ, ſiue baſes ſint parallelæ, cuiuſmodi eſt in prima figura huius cap. fruſtum BDHG, inter circulos diametrorum BD, GH, incluſum, ſiue non parallelæ, quale eſt fruſtum BDLK, hoc pacto inuenietur. Inueſtigetur, vt Num. 5. diximus, vtriuſque portionis ABD, AGH, ſoliditas. Minori enim detracta ex maiore, reliqua erit ſoliditas fruſti BDHG. Sic etiam, inuento I, vertice portionis KIL, ſi inueniatur ſoliditas vtriuſque portionis BCD, KLI, minorque ex maiore tollatur, remanebit ſoliditas fruſti BDLK, nota.

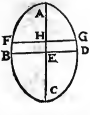
DE AREA SPHÆROIDIS, eiuſdemque portionum.

CAPVT VII.

Soliditas ſphæroidis.

SIT Ellipſis ABCD, cuius maior axis AC, minor BD, priorem ad angulos rectos ſecans. Soliditatē ergo Sphæroidis, id eſt, ſolidi ex circumuolutione Ellipſis circa axem effecti, ita nanciſcemur. Quoniam planum per BD, ductum, & rectum ad axem AC, circulum facit, vt à Federico Commandino ad propoſ. 12. libri Archimedis de Conoidibus, & Sphæroidibus demonſtratur, cuius diameter BD, & centrum E; erit per propoſ. 29. libri Archimedis de Conoid. & Sphæroid. ſemiſſis Sphæroidis ABD, dupla coni eandem baſem cum illa ſemiſſe, circulum videlicet diametri BD, habentis, & altitudinem eandem EA. Igitur ſi huius coni ſoliditas per cap. 2. huius lib. inueſtigetur, & duplicetur, exurget ſoliditas ſemiſſis Sphæroidis: quæ duplicata ſoliditatem totius Sphæroidis exhibebit.

2 DVCATVR minori axi BD, parallela FG, ſecans maiorem axem in H, ad rectos angulos. Si igitur per FG, ducatur planum rectum ad axem, fiet circulus in Sphæroide diametrum habens FG, & centrum H, vt Federicus Commandinus ad propoſ. 12. lib. Archim. de Conoid. & Sphæroid. demonſtrauit; abſcindenturque portiones Sphæroidis FAG, minor & FCG, maior. Vtriuſque ſoliditas ita fiet cognita. Quoniam per propoſ. 31. libri Archimedis de Conoid. & Sphæroid. Conus, cuius baſis circulus diametri FG, & axis HA, ad minorem portionem ſphæroidis FAG, proportionem habet, quam maioris portionis axis HC, ad ſummam rectarum EC, HC. Si fiat, vt HC, maioris portionis axis ad ſummam rectarum EC, HC, ita conus prędictus ad aliud (qui quidem conus ex cap. 2. huius lib. cognitus erit) prodibit ſoliditas minoris portionis ſphæroidis FAG.



Soliditas portionum ſphæroidis.

RVRSVS quia per propoſ. 33. libri Archimed. de Conoid. & Sphæroid. conus, cuius baſis circulus diametri FG, & axis HC, ad maiorem portionem Sphæroidis FCG, proportionem habet, quam minoris portionis axis HA, ad ſummam rectarum EA, HA: ſi fiat, vt HA, minoris portionis axis ad ſummam rectarum EA, HA, ita prædictus conus (quem per cap. 2. huius lib. metieris) ad aliud, procreabitur ſoliditas maioris portionis ſphæroidis FCG.

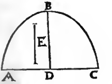
DE AREA CONOIDIS parabolici.

CAPVT VIII.

Soliditas conoidis Parabolici.

SIT Parabola ABC, cuius axis B,D, ad baſem AC, rectus. Soliditatem igitur Conoidis parabolici, quod Parabola circa axem circumducta efficit, ita metiemur.

Quoniam per ea, quæ ad propoſ. 12. libri Archimed. de Conoid. & Sphæroid. Federicus Commandinus demonſtrauit, planum per AC, ductum, & rectum ad axem BD, circulum facit, cuius diameter AC, & centrum D: erit per propoſ. 23. libri Archim. de Conoid. & Sphæroid. Parabolicum Conoides ABC, ſeſquialterum coni, cuius baſis circulus diametri AC, & axis BD. Igitur ſi fiat, vt 2. ad 3. ita prædictus conus (quem ex cap. 2. huius libri metiemur) ad aliud; proſiliet ſoliditas Conoidis Parabolici ABC.



DE

DE AREA CONOIDIS Hyperbolici.

CAPVT IX.

CONCIPIATVR ſuperior figura eſſe Hyperbola, & recta E, æqualis ſemiſſi diametri tranſuerſæ inter duas hyperbolas oppoſitas, hoc eſt, rectæ ex centro hyperbolarum ad verticem B, ductæ. Fietq; rurſus circulus, cuius diameter AC, à plano per AC, ducto & ad axem recto, vt Federicus Commandinus ad propoſ.12. libri. Archimed. de conoid & ſphæroid. demonſtrauit. Soliditatem igitur Conoidis Hyperbolici, quod ab hyperbola ABC, circa axem BD, circumuoluta efficitur, ita venabimur. Quoniam per propoſ.27. lib. Archimedis de Conoid. & Sphæroid. Conoides Hyperbolicum ABC, ad conum, cuius baſis eadem cum baſe Conoidis, circulus videlicet diametri AC, & axis idem BD, proportionem habet eandem, quam linea conflata ex axe BD, & tripla ipſius E, ad lineam conflatam ex axe BD. & dupla ipſius E. Si fiat, vt linea conflata ex axe BD, & dupla ipſius E, ad lineam conflatam ex axe BD, & tripla ipſius E, ita prædictus conus (quem ex cap.2. huius libri dimetiemur) ad aliud; gignetur ſoliditas Conoidis Hyperbolici ABC.

Soliditas Conoidis Hyperbolici.

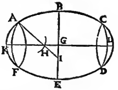
DE AREA DOLIORVM.

CAPVT X.

QVONIAM dolia non eandem formam vbique ſeruant, vix præſcribi poteſt ratio, qua dolij propoſiti capacitas accurate inueniatur. Argumento eſt, quod ſcriptores varie de eius Dimenſione ſcripſerunt. Dicam ergo etiam ego id, quod mihi veriſimile videtur. Sit dolium ABCDEF, in extremitatibus habens circulos AF, CD, orificium B, per quod cogitetur planum ductum rectum ad lineam KL, centra circulorum AF, CD, coniungentem, ſecans dolium bifariam. Si igitur aſſeres dolij in B, & E, curuentur, & deinde ſecundum lineas quaſi rectas extendantur, cuiuſmodi dolia non pauca Romæ vidi: referent ſemiſſes dolij ABEF, CDEB, conos decurtatos: quos ſi per ea, quæ cap.3. huius libri ſcripta ſunt, metieris, dabit eorum ſumma dolii propoſiti capacitatem. Memor tamen eſto, profunditatem dolij BE, & diametrum circuli AF, menſurandam eſſe intra aſſeres, ita, vt eorum craſſities excludantur; vt habeatur decurtatus conus, cuius baſes ſint circuli BE, AF, &c.

Capacitas dolij.

2 SI vero aſſeres dolij vere ſint aliquo modo circulares, quod nonnulli aſſerunt, concipiendum erit dolium, tanquam fruſtum quoddam Sphæroidis. Nam curuitas aſſerum ſenſibiliter à curuitate Sphæroidis cuius axes ſunt rectæ KL, BE, non different. Sed quia ſolum axis minor, nimirum profunditas dolij, data eſt, reperiemus ex puncto A, in Ellipſi dato, maiorem axem KL, hoc modo. Interuallo ſemiſſis minoris axis BG, deſcribatur ex A. arcus ſecans in H, rectam GH, ad angulos rectos ipſi minori axi per eius punctum medium G, ductam: & ex A, per H, recta emittatur ſecans minorem axem in I. Recta enim AI, dabit ſemiſſes GK, GL, maioris axis, vt lib.1. noſtri Aſtrolabij



in ſcholio Lemmatis 50. demonſtrauimus. Itaque ſi tam ſemiſſis ſphæroidis BKE. quam portio minor AKF, mẽſuretur, vt cap.7. traditum eſt, & ſoliditas portionis AKF, ex ſoliditate ſemiſſis BKE, detrahatur, remanebit capacitas ſemiſſis dolii ABEF, quæ duplicata totius dolij capacitatem exhibebit. Vtramque hanc rationem dolii dimetiendi à vera dolii capacitate non longe abeſſe arbitror. Paratus tamen interim ſum, ſi quis accuratiorem inuenerit, eam libenti animo, & grato acceptare.

Capacitas dolij alio modo.

DE AREA CORPORVM omnino irregularium.

CAPVT XI.

1 TRADVNT ſcriptores nõnulli regulam quandam mechanicam ad corpora dimetienda, quæ omnino ſunt irregularia. ita vt ſub regulas Geometricas, quæ hactenus explicatæ ſunt, cadere nõ poſſint: cuiuſmodi ſunt ſtatuæ, vrnæ, amphoræ, fruſta ſaxorum, quæ neque vniformis ſunt craſſitici, neque latera habent prorſus recta, aut ad baſes perpendicularia, &c. Hæc ergo regula, quæ nullo modo videtur aſpernanda, ita ſe habet.

PARETVR arca lignea ex aſſeribus leuigatis, inſtar parallelepipedi cuiuſdam, quæ pice ita oblinatur, vt aquam continere poſſit. Arca hæc tãtæ debet eſſe longitudinis, latitudinis, atque altitudinis, vt corpus metiendum intra ipſam poſitum, aqua totum poſſit operiri. Poſita autem hac arca Horizonti æquidiſtante, beneficio libellæ, aut perpendiculi, infundatur in eam tantum aquæ, quantum ſatis eſt, vt corpus impoſitum omnino tegat, notenturque diligenter ſuprema latera aquæ in aſſeribus arcæ, vt habeatur

Soliditas cuiuslibet corporis irregularis.

altitudo aquæ vſque ad arcæ fundũ. Extracto deinde corpore, ita tamen, vt nihil aquæ extra arcam cadat, notetur rurſum latera aquæ, poſtquam quieuerit. Quod ſi per cap. 1. huius lib. metiamur duo parallelepipeda, quorum baſis communis eſt arcæ fundus, ſiue baſis, altitudines vero rectæ à lateribus aquæ ootatis vſque ad baſem, & minus à maiore ſubtrahamus, relinquetur parallelepipedum ſoliditati corporis propoſiti omnino æquale, quod parallelepipedum etiam conſequeris, ſi altitudinem inter latera aquæ bis notata duces in baſem arcæ. Sunt, qui infuſa aqua in arcam, latera eius in aſſeribus primo loco notent. Deinde impoſito corpore, eiuſdem aquæ latera ſignent. Si enim altitudo inter poſteriora latera, ac priora ducatur in baſem arcæ, producetur ſoliditas corporis impoſiti.

2 PRO vrnis, atque amphoris, ſiue ex lapideæ ſint, ſiue Cretaceæ, ita faciemus. Impleatur vas arena, & eius orificium ita obturetur, vt aqua ingredi nullo modo poſſit. Impoſito deinde vaſe in aqua intra arçam contenta, ac ſi eſſet corpus quodpiam irregulare, inueſtigetur eius ſoliditas, vt Num. 1. diximus. Deinde extracta arena, notentur latera aquæ, antequam vas vacuum imponatur. Impoſito denique vaſe vacuo, ſignentur iterum latera aquæ. Si namque altitudo inter poſteriora, ac priora latera multiplicetur per baſem arcæ: procreabitur ſoliditas ſolius vaſis: quæ detracta ex priori ſoliditate, notam relinquet vaſis capacitatem.

DE SVPERFICIE CONVEXA CONI & cylindri recti.

CAPVT XII.

Superficies conica, dempta baſe, cui circulo ſit æqualis.

QVONIAM ex Archimede demonſtrauimus, qua ratione ſuperficies conuexa, ſphæræ, eiuſque portionum inueſtiganda ſit: non deerit fortaſſe, qui idem deſideret in cono, ac cylindro recto, quod ex iis, quæ ab eodem Archimede in lib. 1. de ſphæra, & cylindro demonſtrata ſunt, obtinebit hoc modo. Propoſito cono recto quocunque, erit eius ſuperficies conuexa conica ſecluſa baſe, æqualis circulo, cuius ſemidiameter eſt linea media proportionalis inter latus coni, & ſemidiametrum baſis eiuſdem coni, ex propoſ. 14. lib. 1. Archimedis de ſphæra, & cylindro.

Superficies fruſti coni, dẽptis baſibus, cui circulo æqualis ſit.

2 QVOD ſi conus rectus ſecetur plano, quod baſi æquidiſtet, erit ſuperficies conuexa fruſti coni, demptis baſibus, æqualis circulo, cuius ſemidiameter eſt linea media proportionalis inter latus conicum fruſti, & rectam ex ſemidiametris duarum baſium conflatam, ex propoſ. 16. lib. 1. Archimedis de ſphæra, & cylindro.

Proportio conicæ ſuperficiei ad ſuam baſem.

ITEM ſuperficies conica coni recti ad ſuam baſem, proportionem habet eandem, quam latus coni ad ſemidiametrum baſis coni eiuſdem, ex propoſ. 15. lib. 1. Archimedis de ſphæra, & cylindro.

Superficies cylindrica, demptis baſibus, cui circulo ſit æqualis.

4 DENIQVE ſuperficies conuexa cylindri recti, demptis baſibus, æqualis eſt circulo, cuius ſemidiameter eſt linea media proportionalis inter latus cylindri, & diametrum baſis cylindri eiuſdem, ex propoſ. 13. lib. 1. Archimedis de ſphæra, & cylindro.

FINIS LIBRI QVINTI.

GEO-

GEOMETRIÆ PRACTICÆ
LIBER VI.

In quo de Geodæſia, & de figuris augendis, minuendiſque in data proportione: Item de duarum mediarum proportionalium inter duas datas rectas inuentione: Ac denique de radicum extractione agitur.

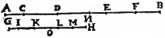
EXPEDITIS iis, quæ de magnitudinum dimenſionibus initio propoſuimus, reſtat vt de rectilinearum ſuperficierum etiam diuiſione agamus: quæ Geometriæ practicæ pars proprio nomine Geodæſia vocatur. Nam δαίω idem ſignificat, quod partior, vel diuido. Scio pleroſque partem etiam illam, quæ magnitudines, & terram metitur, appellare Geodæſiam; Sed hi, auctore Pediaſimo de menſuratione & partitione terræ, longe à veritate aberrant. *Nam, inquit, terræ menſuratio duas in partes diuiditur, Geometriam ſcilicet, & Geodæſiam. Areæ namque ſecundum artem menſuratio, & terræ menſuratio eſt, & merito Geometria vocatur, vnius vero, &* Geometria & Geodæſia quid. *eiuſdem areæ, ſeu loci diuiſio inter diuerſas perſonas, partitio quædam eſt terræ, & iure optimo Geodæſia appellatur.* Hæc Pediaſimus.

EDIDIT quidem Federicus Commandinus anno 1570. libellum de ſuperficierum diuiſionibus Machometo cuidam Bagdedino Arabi adſcriptum: ipſeque eadem de re alium breuiorem, & magis vniuerſalem conſcripſit: eſtque ſane libellus vterque acutiſſimus, & eruditione refertiſſimus. Idem vero poſtea argumentum alia via aggreſſus eſt, & meo certe iudicio, faciliori, & magis generali, Simon Steuinius Brugenſis: ſed in qua aliquid deſiderari videatur, vt omnibus ſuperficiebus rectilineis (quod ipſe velle videtur) conuenire poſſit, quod facile iudicabunt, qui illius problemata Geometrica attente perlegerint. Res enim propoſita nulla ratione confici poteſt, niſi prius duæ propoſitiones demonſtrentur, quarum priorem ipſe ſine demonſtratione aſſumit pro principio, poſterioris vero ne meminit quidem, cum tamen admodum ſit neceſſaria, & quam Machometus Bagdedinus demonſtrauit paulo aliter, quam nos. Has ergo duas propoſitiones ad initium huius lib. demonſtrabimus, & poſteriorem quidem longe generalius, quam à Machometo factum eſt, quod beneuolo Lectori iudicandum relinquo. Deinde ſuperficierum rectilinearum diuiſionem aggrediemur, inſiſtentes eiuſdem Steuinii veſtigiis, niſi quando generalius rem oportebit demonſtrare. Nihil autem de ratione Machometi, & Federici Commandini dicemus: tum quia libellus ipſorum in manibus omnium eſt, ac propterea eum, quicunque volet, legere poterit: tum quia propoſita aliqua figura multorum angulorum, non ſine difficultate, ac labore eam ſtudioſus diuidet, niſi diuiſionis omnium præcedentium figurarum memor ſit, quod in noſtra ratione non accidit: tum denique quia illorum ratio ſolum figuris ordinariis conuenit, quæ videlicet omnes angulos habent introrſum, tot nimirum, quot latera figura ipſa continet, noſtra autem via figuras etiam illas complectitur, quæ angulos habent partim introrſum, & partim extrorſum vergentes.

THEOR. 1. PROPOS. 1.

SI magnitudo in quotuis partes ſecetur vtcunque, & alia quæpiam magnitudo in totidem partes ordine illis proportionales: habebunt quotlibet partes prioris magnitudinis ſimul ad reliquas omnes partes ſimul eandem proportionem, quam totidem partes poſterioris magnitudinis ſimul ad reliquas omnes partes ſimul. Et ſi quælibet pars prioris magnitudinis ſecetur in duas partes vtcunque, ſecetur autem vt pars poſterioris magnitudinis illi parti reſpondens in alias duas partes duabus illis proportionales: erunt quoque ibidem totæ magnitudines ſectæ proportionaliter.

SIT magnitudo AB, ſecta in quotuis partes vtcunque AC, CD, DE, EF, FB: & alia magnitudo qualiſcunque GH, etiamſi diuerſi ſit generis, ſecta in totidem partes GI, IK, KL, LM, MH, illis ordine proportionales. Dico ita eſſe, verbi gratia, duas partes AC, CD, ſimul ad reliquas tres DE, EF, FB, ſimul, vt ſunt duæ GI, IK, ſimul ad reliquas tres KL, LM, MH, ſimul, &c. Quoniam enim eſt, vt AC, ad CD, ita GI, ad IK, erit componendo etiam, vt AD, ad CD, ita GK, ad IK: Vt autem CD, ad DE, ita eſt IK, ad KL. Igitur ex æqualitate erit, vt AD, ad DE, ita GK, ad KL.



RVRSVS quia conuertendo eſt, vt BF, ad FE, ita HM, ad ML; erit quoq; componendo, vt BE, ad FE, ita HL, ad ML: Vt autem FE, ad ED, ita eſt ML, ad LK. Igitur ex æqualitate erit, vt BE, ad ED, ita HL, ad LK. & componendo, vt BD, ad ED, ita HK, ad LK, & conuertendo, vt DE, ad DB, ita KL, ad KH. Itaque cum oſtenſum ſit, eſſe vt AD, ad DE, ita GK, ad KL, & vt DE, ad DB, ita KL, ad KH, erit ex æqualitate, vt AD, ad DB, ita GK, ad KH.

NON aliter oſtendemus eſſe, vt AC, ad CB, ita GI, ad IH. Nam rurſus conuertendo, componendo, & ex æqualitate erit vt BC, ad DC, ita HI, ad KI; & conuertendo, vt CD, ad CB, ita IK, ad IH. Cum ergo ſit, vt AC, ad CD, ita GI, ad IK, & vt CD, ad CB, ita IK, ad IH; erit ex æqualitate, vt AC, ad CB, ita GI, ad IH.

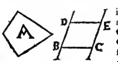
PARI ratione erit, vt AF, ad FB, ita GM, ad MH. Erit namq; rurſus componendo, & ex æqualitate, vt AF, ad EF, ita GM, ad LM. Cum ergo ſit quoque, vt EF, ad FB, ita LM; ad MH: erit ex æqualitate, vt AF, ad FB, ita GM, ad MH; & ſic de cæteris. Conſtat igitur primum.

DEINDE pars v.g. tertia DE ſecta ſit vtcunq; in partes duas DN, NE; & tertia quoque pars KL, in duas KO, OL, illis proportionales. Dico eſſe quoque vt AN, ad NB, ita GO, ad OH. Erit enim conuertendo, vt EN, ad ND, ita LO, ad OK, & componendo, vt ED, ad DN, ita LK, ad KO. Quare cum ſit, vt CD, ad DE, ita IK, ad KL, & vt DE, ad DN, ita KL, ad KO: erit ex æqualitate, vt CD, ad DN, ita IK, ad KO. atque ita partes AC, CD, DN, partibus GI, IK, KO, proportionales ſunt.

RVRSVS quia eſt conuertendo, vt FE, ad ED, ita ML, ad LK, & componendo, vt DE, ad NE, ita KL, ad OL: erit ex æqualitate, vt FE, ad EN, ita ML, ad LO: & conuertendo, vt NE, ad EF, ita OL ad LM, ac proinde omnes partes AC, CD, DN, NE, EF, FB, omnibus partibus GI, IK KO, OL, LM, MH, proportionales ſunt. Igitur vt in prima parte demonſtratum eſt, erit vt AN, ad NB, ita GO, ad OH. Conſtat ergo etiam ſecundum.

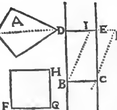
PROBL. 1. PROPOS. 2.

DATO rectilineo, ſuper datam rectam inter alias duas rectas interceptam, conſtituere quadtilarerum æquale, cuius latus oppoſitum inter duas eaſdem rectas interceptum datæ rectæ ſit parallelum. Et datis duobus rectilineis inæqualibus quibuſcunque, ex maiore per lineam vni lateri parallelam detrahere rectilineum minori æquale, quando id fieri poteſt, quod ex ipſa problematis ſolutione cognoſcetur.



1 SIT rectilineum datum A, & recta data BC, inter duas rectas BD, CE, intercepta: oporteatq; primum conſtituere rectilineo A, æquale quadrilaterum ſuper datam rectam BC, cuius latus oppoſitum inter eaſdem rectas BD, CE, interceptum datæ rectæ BC, ſit parallelum. Et ſi quidem duæ rectæ BD, CE, ſint parallelæ (quod tum demum eueniet, cum duo anguli B, C, æquales ſunt duob. rectis) efficietur problema, [a] ſi ſuper rectam BC, conſtituetur parallelogrammum BE, ſiue in angulo BCE; ſiue in angulo CBD, rectilineo A, æquale

a 45. primi.



2 QVANDO anguli B, C, recti ſunt, facilius problema efficiemus hac ratione. Rectilineo dato A, conſtituatur per ea, quæ in ſcholio propoſ. 14. lib. 2 Euclid. vel potius per ea, quæ Num. 4. cap. 4. lib. 4. huius Geometriæ practicæ ſcripſimus, quadratum FGH, æquale: reſoluendo videlicet rectilineum in triangula, vel trapezia, & cuilibet triangulo, vel trapezio æquale quadratum conſtituendo, ac tandem omnia illa quadrata ad vnum redigendo, vt locis citatis fuſe explicauimus. Deinde duabus rectis BC, FG, inueniatur tertia proportionalis BD, ac per D, ipſi BC, parallela agatur DE. Rectangulum enim BE, rectilineo dato A, æquale erit; [b] cum quadrato FGH, æquale ſit; propterea quod tres rectæ BC, FG, BD, continue proportionales ſunt.

b 17. ſexti.

IMMO eodem hoc artificio vti poterimus, quando parallelæ BI, CK, non faciunt angulos rectos ad B, & C. Nam

C. Nam conſtituto rectangulo CD, æquali quadrato FH, id eſt, rectilineo A, vt dictum eſt: ſi producatur latus DE, donec ſecet rectas BI, CK, in IK,[a] erit parallelogrammum BK, rectangulo CD, æquale, hoc eſt, rectilineo A.

3 Si vero duæ rectæ BD, CE, non ſint parallelæ, conueniant ad partes D, E, in F, (quod tum fiet, cum duo anguli DBC, ECB, minores ſunt duobus rectis) ſitque primum propoſitum ſuper BC, verſus F, conſtituere trapezium rectilineo A, æquale, habens latus rectæ BC, oppoſitum eidem BC, parallelum, quod vt fieri poſſit, neceſſe eſt, rectilineum A, minus eſſe triangulo BCF, vt patet. a 35. primi.

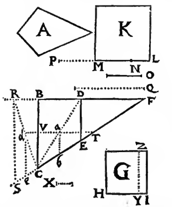
RECTILINEO ergo A, conſtruatur per ea, quæ in ſcholio propoſ. 14. lib. 2. Euclid. vel potius per ea, quæ Num. 4. cap. 4. lib. 4. huius, vt proxime diximus, æquale quadratum G, cuius latus HI.[b] Item triangulo BCF, æquale quadratum K, cuius latus LM. Deinde duabus rectis LM, HI, reperiatur tertia proportionalis LN. Inuenta autem recta O, media proportionali inter LM, & MN; fiat vt LM, ad O, ita BF, ad FD; ac tandem per D, ipſi BC, parallela agatur DE. Dico Trapezium BE, rectilineo A, æquale eſſe.[c] Quoniam enim triangulum BCF, ad triangulum DEF, duplicatam proportionem habet lateris BF, ad latus DF, hoc eſt, rectæ LM, ad rectam O: Habet autem & LM, ad MN, duplicatam proportionem eius, quam habet LM, ad O, quod LM, O, MN, ſint continue proportionales. Igitur erit vt triangulum BCF, ad triangulum DEF, ita LM, ad MN; Et per conuerſionem rationis, vt triangulum BCF, ad Trapezium BE, ita LM, ad LN.[d] Cum ergo ſit, vt LM, ad LN, ita quadratum K, ad quadratum G, quod LM, HI, LN, continue ſint proportionales, erit quoque vt triangulum BCF, ad trapezium BE, ita quadratum K, ad quadratum G, hoc eſt, ita triangulum BCF, quod ipſi K, æquale eſt, ad rectilineum A, ipſi G, æquale. Quocirca cum triangulum BCF, ad trapezium BE, & ad rectilineum A, eandem habeat proportionem;[e] æqualia erunt trapezium BE, & rectilineum A, quod eſt propoſitum.

b 14. ſecun.

c 19. ſexti.

d coroll. 20. ſexti.

e 9. quint.



4 SIT deinde ſuper BC, verſus R, S, vbi anguli RBC, SCB, duobus rectis ſunt maiores, non autem verſus punctum concurſus F, conſtruendum trapezium rectilineo A, cuiuſcunq; magnitudinis ſit, æquale, habens latus oppoſitum rectæ BC, parallelum.[f] Fiat rurſus triangulo BCF, æquale quadratum K, cuius latus LM; & rectilineo A, aliud quadratum G, æquale, cuius latus HI, per ea, quæ ad propoſitionem 14. lib. 2. Euclid. vel potius per ea, quæ Num. 4. c. 4. lib. 4. huius docuimus. Deinde lateribus LM, HI, inueniatur tertia proportionalis MP, quæ ipſi LM, in continuum & directum ſit poſita: atque inter totam LP, & LM, reperta ſit media proportionalis Q: ac poſtremo, vt Q. ad LP, ita fiat FB; ad FR, ipſique BC, parallela agatur RS. Dico trapezium BS, rectilineo A, eſſe æquale.[g] Quoniam enim triangulum BCF, ad triangulum RSF, proportionem habet duplicatam lateris FB, ad latus FR, hoc eſt, proportionis Q, ad LP; Eſt autem & proportio LM, ad LP, duplicata proportionis LM, ad Q, vel Q, ad LP, quod tres rectæ LM, Q, LP, ſint continue proportionales. Igitur erit vt triangulum BCF, ad triangulum RSF, ita LM, ad LP; ideoque etiam per diuiſionem rationis contrariam in ſcholio propoſ. 17. lib. 5. Euclid. à nobis demonſtratam, vt triangulum BCF, ad trapezium BS, ita LM, ad MP.[h] Vt autem LM, ad MP, ita eſt, quadratum K, ad quadratum G, quod tres LM, HI, MP, ſint continue proportionales. Igitur erit quoque, vt triangulum BCF, ad trapezium BS, ita quadratum K, ad quadratum G. Cum ergo triangulo BCF, conſtructum ſit æquale quadratum K:[i] erit quoque trapezium BS, quadrato G, æquale, hoc eſt, rectilineo A, cui quadratum G, conſtructum eſt æquale, quod eſt propoſitum.

f 14. ſecun.

g 19. ſexti.

h coroll. 20. ſexti.

i 14. quint.

5 QVOD ſi quando duæ rectæ BF, CF, in tam remoto puncto concurrant, vt vix haberi poſſit (quod quidem tunc accidet, cum ipſæ rectæ fere parallelæ ſunt) abſoluemus problema, etiamſi punctum concurſus F, non habeamus, hunc in modum. Sumpto vtcunq; puncto T, in altera earum, nimirum in CF, agatur TV, alteri BF, parallela; & duabus BC, CV, inueniatur tertia proportionalis X. Conſtructo deinde ex ſcholio propoſ. 14. lib. 2. Euclid. vel potius, vt Num. 4. cap. 4. lib. 4. huius docuimus, quadrato G, æquali rectilineo A, inueniatur tribus BC, X, HI, quarta proportionalis IY, agaturq; YZ, lateribus quadrati parallela.[k] Et quoniam eſt, vt triangulum BCF (ſi perficeretur) ad triangulum VCT, ita recta BC, ad rectam X, hoc eſt, ita HI, ad IY,[l] hoc eſt, ita quadratum G, ad rectangulum IZ: Eſt autem triangulum BCF, maius quadrato G, ſiue rectilineo A: (quando enim ad partes angulorum, qui duobus rectis minores ſunt, conſtruendum eſt trapezium dato rectilineo æquale, debet eſſe triangulum maius rectilineo)[m] erit quoque triangulum VCT, maius rectangulo IZ, Igitur vt Nume. 3. traditum eſt, conſtruatur trapezium Vb, rectangulo IZ, æquale: & tribus rectis CV, Va, CB, inuenta quarta proportionali BD,[n] (tranſibit autem recta ducta Ca, per D, ſi quarta BD, rite eſt inuenta,[o] ita vt viciſſim recta Ca, ſi exquiſitè ducatur, exhibeat quartam proportionalem quæſitã BD,) demittatur DE, ipſi BC, parallela. Dico trapezium BE, dato rectilineo A, æquale eſſe. Quoniam enim trapezium BE, trapezio Vb, ſimile eſt, per ea, quæ ad propoſ. 18. lib. 6. Euclid. demonſtrauimus;[p] erit trapezium BE, ad trapezium Vb, vt recta BC, ad rectam X, hoc eſt, vt recta HI, ad IY,[q] hoc eſt, vt quadratum G, ad rectangulum IZ. Cum ergo trapezium Vb, rectangulo IZ, æquale ſit;[r] erit quoq; trapezium BE, quadrato G, hoc eſt, rectilineo A, æquale, quod eſt propoſitum.

k coroll. 19. ſexti.

l 1. ſexti.

m 14. quin.

n ſchol. 4. ſexti.

o 4. ſexti

p coroll 20. ſexti.

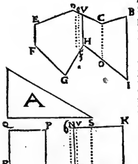
q 1. ſexti.

r 14. quint.

6 NON aliter ex alia parte angulorum RBC, SCB, qui duobus rectis ſunt maiores, etiamſi punctum concurſus F, non habeatur, trapezium conſtituemus rectilineo A, æquale, cuiuſcunque magnitudinis illud ponatur. Neq; enim in hoc caſu neceſſe eſt, ipſum eſſe minus triangulo BCF, ſi perficeretur. Ducta namq; ex quolibet puncto T, rectæ CF, ipſi BF, parallela TV, eaq; producta, inueniatur duabus rectis BC, CV, tertia propor-

 tionalis

portionalis X. Conſtructo deinde quadrato G, quod rectilineo A, ſit æquale, reperiatur tribus rectis BC, X, & HI, quarta proportionalis IY, agaturque YZ, lateribus quadrati parallela, ita vt rurſus ſit triangulū BCF, ad triangulum VCT, ſicut quadratum G. ad rectangulum IZ. Poſt hæc, vt Num. 4. præcepimus, rectangulo IZ, conſtruatur trapezium æquale Ve, & tribus rectis CV, Vd, CB, inuenta quarta proportionali BR,[a] (tranſibit autem
a ſchol. 4. ſexti. recta Cd, ducta per R, ſi quarta BR, recte inuenta eſt: [b] ita vt viciſſim recta Cd, ſi accurate ducatur, abſcindat
b 4. ſexti. quartam proportionalem quæſitam BR,) demittatur RS, ipſi BC, parallela. Dico trapezium BS, rectilineo A, æquale eſſe. Quoniam enim trapezium BS, trapezio Ve, ſimile eſt, per ea, quæ in ſchol. prop. 18. lib. 6. Euclid. monſtrata ſunt à nobis;[c] erit trapezium BS, ad trapezium Ve, vt recta BC, ad rectam X, hoc eſt, vt recta HI, ad rectam
c coroll. 20. ſexti. IY, [d] hoc eſt, vt quadratum G, ad rectangulum IZ. Cum ergo trapezium Ve, rectangulo IZ, æquale ſit; [e] erit
d 1. ſexti. quoque trapezium BS, quadrato G, hoc ueſt, rectilico A, æquale, quod eſt propoſitum.
e 14. quint. 7 IAM vero datis duobus rectilineis quibuſcunq; A, & BCDEFGHI, ſit ex poſteriore: quod maius ponatur, auferendum rectilineum habens latus lateri BI, parallelum, æquale priori A, quod minus ſtatuatur, ſi fieri quidē id poterit. Fieri autē poterit ſemper in figuris omnes angulos habentib introrſum, in aliis vero nō ſemper Per ea, quæ in ſchol. prop. 14. li. 2. Eucl. vel potius per ea, q̄ Nu. 4. c. 4. li. 4. huius tradidimus, conſtruatur quadratū KM, rectilineo minori A. æquale. Deinde ex angulo C. qui lateri BI, proximus eſt, ducta lateri BI, parallela CO, cōſtituatur rectilineo BO, eadē ratione quadratū æquale PQR; & duab. rectis KN, PQ, inuēta tertia proportio-
f 17. ſexti, nali KS, ducatur ST, ipſi KL. parallela: [f] Eritque rectangulū KT, contentū ſub prima linea KL, & tertia KS, quadrato mediæ PQ. h. e. rectilineo BO, æquale. Et quoniā KS, inuenta eſt in hoc exēplo minor latere KN, ideoq; & rectangulū KT, minus quadrato KM, hoc eſt, rectilineo A; erit etiā rectilineū BO, minus rectilineo A. Ex propinquiore ergo angulo H, ducta rurſum ipſi CO, vel BI, parallela HV, fiat iterum rectilineo CH, æquale quadratum, cuius latus X Et duabus rectis KN, & X, inuenta tertia proportionali SN, quæ in hoc exemplo terminatur
g 17. ſexti. in extremo lateris KN; [g] erit rurſum rectangulum SM, ſub prima linea ST, & tertia SN. comprehenſum æquale quadrato mediæ X, hoc eſt, rectilineo CH. Cum ergo & KT, ipſi BO, ſit oſtenſum æquale: erit totum quadratum KM, hoc eſt, rectilineum A, toti rectilineo BCVHOI, æquale; ac proinde ex maiori rectilineo per rectam HV, lateri BI, parallelam rectilineum detraximus minori rectilineo A, æquale, quod faciendum erat.

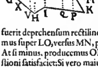


8 QVOD ſi duabus rectis KN, & X, inuenta tertia proportionalis fuiſſet minor, quam SN, nimirum æqualis ipſi SY, ita vt rectangulum SZ, quadrato rectæ X, vel rectilineo CH, foret æquale: ducēda eſſet ex proximo angulo D, alia parallela Da, & rectilineo DH, conſtituendū quadratum æquale, atque rectæ KN, & lateri poſtremi huius quadrati inuenti adiungenda tertia proportionalis, & ei abſcindenda æqualis Yb. Et ſi Yb, foret minor, quam YN, ducenda adhue eſſet ex proximo angulo G, parallela lateri BI, & rectilineo inter hanc parallelam, & Da, comprehenſo efficiendum quadratum æquale; ac rectæ KN, & lateri huius quadrati adiungenda tertia proportionalis, &c. Atq; ita progrediendum deinceps, donec inuenta ſit tertia proportionalis SN, quæ terminetur in N, (qualis fuit tertia proportioοalis SN, duabus KN, & X, inuenta,) vel cuius terminus vltra N, cadat. Quando enim terminatur in N, erit rectiliocum inter BI, & vltimam parallelam comprehenſum æquale quadrato KM, hoc eſt, rectilioco A, vt oſtenſum fuit de rectilineo BH. paulo ante hunc Num. 8. Quando autem terminus tertiæ proportionalis cadit vltra N, videlicet in b, ita vt rectangulum Yd, ſit æquale vltimo quadrato inuento, hoc eſt, rectilineo DH, ac proinde totum rectilineum inter BI, & vltimam parallelam, hoc eſt, rectangulum Kd, maius quadrato KM, vel rectilineo A, erit vltimum rectilineum DH, maius rectangulo Nd, propterea quod KZ, ipſi BH, æquale eſt, & Yd, ipſi DH. Quare ſi ſuper rectam Da, inter rectas DV, aH, conſtituatur trapezium Df, per parallelam ef, rectangulo Nd, æquale, vt ſupra Num. 3. traditum eſt: erit rectilineum inter BI, & ef, parallelas contentum æquale quadrato KM, hoc eſt, rectilineo A.

CÆTERVM non eſt neceſſe, vt ſemper à proximo angulo parallela ducatur in figura BF. Quando namque ſenſus iudicaret plus minus, parallelam ex aliquo angulo non proximo ductam auferre rectilineum minus quadrato KM, vel non multo maius, ducenda eſſet parallela ex eo angulo, & rectilineo abſciſſo conſtruendum æquale quadratum, & reliqua perficienda, vt prius.

DENIQVE ſi aliquando deprehenderetur, rectilineum abſciſſum non eſſe multo minus quadrato, conſtituendum eſſet. vt Nu 3. docuimus, ſuper parallelam illam trapezium æquale rectangulo, quo quadratum KM, rectilineum abſciſſum ſuperat.

9 EX his puto ſatis ſtudioſum Lectorem intelligere, quo pacto in aliis exemplis ſe gerere debeat. Nam ſi v. g. ex hoc propoſito rectilineo irregulariſſimo per lineam lateri AM, parallelam abſcindēda ſit portio æqualis alteri cuipiam rectilineo minori, producemus MA, vſq; ad N. Et ſi quidem deprcheoſum fuerit triangulum ABN, eſſe æquale dato rectilineo minori, (quod ſcietur, ſi quadratū triangulo æquale conſtructum, fuerit æquale quadrato, quod dato rectilineo minori conſtruitur æquale) recta AN, problema efficiet. Si vero maius, conſtruemus ſuper AN, verſus B, trapezium per parallelam ipſi AN, æquale exceſſui: At ſi minus, ducemus LO, parallelam. Nam ſi

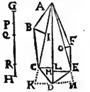


fuerit deprehenſum rectilineum NL, æquale defectui, problema efficiet parallela LO: Si vero maius conſtituemus ſuper LO, verſus MN, per parallelam ipſi MN, trapezium exceſſui æquale. Ea n. parallela problema ſoluet: At ſi minus. producemus OL, ad P: Et ſi quidem triangulū KLP, fuerit æquale defectui, tota parallela OP, quæ-
h 25. ſexti. ſtioni ſatisfaciet: Si vero maius [h] coōſtituemus in angulo K, triangulum ſimile triangulo KLP, & exceſſui æquale; ita

l; ita vt hoc triangulum vna cum rectilineo per parallelam LO, abſciſſo ſit dato rectilineo minori æquale. Ex quo colliges, problema in hoc caſu ſolui non poſſe, cum duæ parallelæ, nimirum LO, & illa, quæ triangulum ipſi KLP, ſimile aufert, reſecent ex toto rectilineo BG, partem dato rectilineo minori æqualem. At ſi triangulum KLP, fuerit minus defectu prædicto, ita vt hoc triangulum vna cum rectilineo per parallelam LO, abſciſſo ſit minus dato rectilineo minore, ducemus per D, parallelam QR. Et ſi quidem rectilineum PR, æquale fuerit defectui, quo figura KPLMABNO, à dato rectilineo minore deficit, factum erit per parallelam QR, quod iubetur: Si vero maius, parallela, quæ cum QR, verſus OP, auferet rectilineũ huic exceſſui æquale, ſatisfaciet problemati: At ſi rectilineum PR, fuerit minus prædicto defectu, & triangulum CDR, inuentum fuerit vltimo huic defectui, quo rectilineum PR, à prædicto defectu deficit, æquale, parallela DQ. quæſtionem diſſoluet: Si autem triangulum CDR, fuerit maius hoc vltimo defectu,[i] ſi ad C, conſtituatur triangulũ exceſſui æquale, & ſimile triangulo CDR, ſatisfacient quæſtioni duæ parallelæ, videlicet DQ. & baſis prædicti trianguli conſtituti; atq; in hoc caſu per vnicam parallelam ſatisfieri problemati nequit: Si deniq; triangulum CDR, minus extiterit eodem illo vltimo defectu, ducemus parallelam IS. Et ſi quidem rectilineum DI, æquale fuerit illi, quo triangulum CDR, minus eſt vltimo illo defectu, erit totum rectilineum ISDCBAMLKI, dato minori rectilineo æquale: Si autem rectilineum DI, inæquale fuerit, progrediemur vlterius, vt iam ſæpius dictum eſt, donec rectilineum inueniamus dato minori rectilineo æquale; Inuenietur autem omnino vnum æquale, cum totum rectilineum BG, maius ponatur. Vides igitur, facile coniici poſſe, quando problema per vnicam parallelam ſolui poſſit, & quando non ſed per duas: Quotieſcunq; enim incidemus in eiuſmodi triangulum in ipſa conſtructione, qualia fuerunt KLP, & CDR, ex quo auferendum ſit triangulum ſimile, & æquale exceſſui alicui, ſolui problema nequit, niſi per duas parallelas. i 25. ſexti

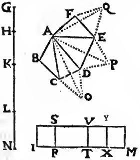
PROBL. 2. PROPOS. 3.

DIVISO rectilineo quolibet in triangula ex vno aliquo puncto, rectas lineas ipſis triangulis ordine proportionales inuenire.



SIT rectilineum quodlibet ABCDEF, diuiſum in triangula ABC, ACD, ADE, AEF, per rectas ex angulo A. (vel aliquo puncto aſſignato in vno latere) ad omnes angulos oppoſitos ductas, atq; hiſce triangulis inueniendæ ſint ordine totidem rectæ proportionales. Ex omnibus angulis, dempto angulo A. ad rectas ex A, egredientes ducantur perpendiculares BI, CL, DK, DN, EM, FO, pro altitudinibus triangulorum. (Nihil autem refert, ſi interdum perpendiculares cadant in rectas extra triangula productas, cuiuſmodi hic ſunt DK, DN,) ita vt ſingula triangula binas habeant altitudines, præter duo extrema, quæ ſingulas dun taxat habent. Deinde in recta quacunque GH, accipiatur GP, æqualis altitudini BI, primi trianguli ABC; & PQ. æqualis altitudini DK, ſecundi trianguli ACD, reſpectu eiuſdem baſis AC. Poſt hæc fiat,[a] vt CL, altitudo ſecundi trianguli reſpectu baſis AD, ad EM, altitudinem tertij trianguli ADE, reſpectu eiuſdem baſis AD, ita PQ. ad QR, Et vt DN, altitudo tertij trianguli ADE, reſpectu baſis AE, ad FO, altitudinem quarti trianguli AEF, reſpectu eiuſdem baſis AE, ita QR, ad RH, atque ita deinceps, ſi plura fuerint triangula, ſumendo ſemper duas altitudines ad communem baſem demiſſas, &c. Dico quatuor rectas GP, PQ. QR. RH, eſſe quatuor triangulis ordine proportionales. Nam vt in ſcholio propoſ. 1. lib. 6. Euclid. demonſtratum eſt, à nobis, ita eſt triangulum ABC, ad triangulum ADC, vt altitudo BI, ad altitudinem DK, propter baſem communem AC, hoc eſt, vt GP, ad PQ. cum hæ ſumptæ ſint illis altitudinibus æquales. Eadem de cauſa ita eſt triangulum ACD, ad triangulum ADE, vt altitudo CL, ad altitudinem EM, hoc eſt, vt PQ, ad QR, cum ex conſtructione ſit, vt CL, ad EM, ita PQ. ad QR. Pari denique ratione ita eſt triangulum ADE, ad triangulum AEF, vt altitudo DN, ad altitudinem FO, hoc eſt, vt QR, ad RH, cum ſit per conſtructionem vt DN, ad FO, ita QR, ad RH. Conſtat ergo id, quod propoſitum fuit. a 12. ſexti.

A L I T E R



SIT rurſus rectilineum ABCDEF, diuiſum in triangula ABC, ACD, ADE, AEF, ex puncto A. Quoniam bina proxima triangula conſtituunt quadrilaterum, cuius diameter eſt latus vtrique triangulo commune, cuiuſmodi eſt ABCD, ducemus diametro AC, ex D, parallelam DO, quæ ſecet latus BC, productum in O. Sic in quadrilatero ACDE, diametro AD, parallelam ducemus EP, quæ ſecet latus CD, protractum in P. Itemque in quadrilatero ADEF, diametro AE, parallelam ducemus FQ, quæ latus DE productum ſecet in Q. Deinde in recta quauis GN, ſumantur GH. HK, ipſis BC, CO, æquales. Et tribus CD, DP, HK, reperiatur quarta proportionalis KL. Ac tandem tribus DE, EQ. KL, quarta proportionalis inueniatur LN. Dico inuentas eſſe quatuor rectas GH, HK, KL, LN, quatuor triangulis proportionales. Ductis enim ex A, ad O, P, Q. puncta concurſuum rectis AO, AP, AQ,[b] erit triangulum ACD, triangulo ACO; & triangulum ADE, triangulo ADP; & triangulum AEF, triangulo AEQ. æquale.[c] Cum ergo ſit, vt BC, ad CO, hoc eſt, vt GH, ad HK, ita triangulum ABC, ad triangulum ACO, hoc eſt, ad triangulum ACD: Item vt CD, ad DP, hoc eſt, vt HK, ad KL, ita triangulum ACD, ad triangulum ADP, hoc eſt, ad triangulum ADE: Et vt DE, ad EQ, hoc eſt, vt KL, ad LN, ita triangulum ADE, ad triangulum AEQ, hoc eſt, ad triangulum AEF: perſpicuum eſt id, quod proponitur. b 37. primi. c 1. ſexti.

ALITER

RATIONES duæ expoſitæ, quæ expeditiſſimæ ſunt, propria eſt triangulorum, in quæ diuiditur figura per rectas ab vno aliquo puncto in quouis latere dato, vel ab aliquo angulo emiſſas: poteſt tamen idem hoc problema abſolui alio modo, qui in quaslibet figuras conuenit, licet non ſit tam expeditus. Ita ergo agemus: Sit eadem figura proxima diuiſa in triangula, vel etiam in plurium laterum figuras.[a] Et primo triangulo ABC, vel primæ figuræ, rectangulum, vel quoduis aliud parallelogrammum non rectangulum æquale conſtruatur IS: Et ſuper rectam RS, aliud parallelogrammum ST, ſecundo triangulo ACD, vel ſecundæ figuræ æquale, habens angulum SRT, angulo I, æqualem. Item ſuper rectam TV, aliud VX, tertio triangulo ADE, vel tertiæ figuræ æquale, angulum habens VTX, æqualem eidem angulo I: Ac deniq; ſuper rectam XY, aliud YM, quarto triangulo AEF, vel quartæ figuræ æquale, angulum YXM, habens æqualem eidem angulo I: atq; ita deinceps, ſi plura fuerint triangula, vel figuræ. Dico rectas IR, RT, TX, XM, triangulis, vel figuris eſſe proportionales. Nam ex quatuor rectangulis, vel parallelogrammis conſtituitur vnum totum, vt ex demonſtratione propoſ. 45. lib. 1. Euclid. manifeſtum eſt, propter angulos I, SRT, VTX, YXM, æquales ac proinde omnia quatuor eandem habent altitudinem.[b] Igitur rectæ IR, RT, TX, XM, proportionales ſunt parallelogrammis, ideoq; & triangulis, ſiue figuris, quod eſt propoſitum.

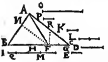
[a] 44. vel 41. primi.
[b] 1. ſexti.

PROBL. 3. PROPOS. 4.

DATVM rectilineum per rectam à quouis angulo, vel puncto in aliquo latere ductam in proportionem datam diuidere: ita vt antecedens proportionis, in quam malueris partem, vergat

SIT primum triangulum quodcunque ABC, per rectam ex angulo A, diuidendum in duas partes: ita vt pars ad B, vergens ad reliquam partem habeat proportionem datam D, ad E. Secetur latus BC, dato angulo oppoſitum per ea, quæ in ſcholio propoſ. 10. lib. 6. Euclid. docuimus, in F, ita vt eadem ſit proportio BF, ad FC, quæ D, ad E, ducaturque recta AF. Dico eſſe vt D, ad E, ita triangulum ABF, ad triangulum AFC.[a] Eſt enim triangulum ABF, ad triangulum AFC, vt BF, ad FC, hoc eſt, vt D, ad E.

[a] 1. ſexti



DEINDE ſit idem triangulum ABC, diuidendum in duas partes, per rectam ex puncto F, dato in latere BC, ita vt pars verſus B, ad reliquam partem habeat proportionem datam D, ad E. Ducta ex dato puncto F, ad angulum oppoſitum A, recta FA, vt totum triangulum in duo triangula ſit ſectum:[b] reperiantur duæ rectæ GH, HI, habentes eandem proportionem, quam triangulum ABF, ad triangulum AFC: totaque GI, ſecetur in H vt eadem ſit proportio GH, ad HI, quæ D, ad E. Et quia punctum H, cadit in extremum primæ lineæ GH; eſtque vt GH, ad HI, hoc eſt, vt D, ad E, ita triangulum ABF, ad triangulum AFC, diuidet recta FA, ex dato puncto F, ad oppoſitum angulum A, ducta triangulum ABC, in duas partes in data proportione D, ad E.

[b] 3. huius.

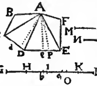
SIT rurſus data proportio K, ad L, diuidendumque ſit triangulum ABC, ex puncto F, in duas partes eiuſdem proportionis. Diuidatur tota GI, in M, ita vt eadem ſit proportio GM, ad MI, quæ K, ad L. Et quoniam diuiſionis punctum M, cadit in primam partem GH, totius lineæ GI, ſecabimus BA, baſem primi trianguli dato puncto F, oppoſitam, in N, vt eadem ſit proportio BN, ad NA, quæ GM, ad MH. Dico ductam rectam FN, problema efficere, hoc eſt, ita eſſe triangulum BFN, ad trapezium FNAC, vt K, ad L. Quoniam enim rectę GH, HI, triangulis ABF, AFC, proportionales inuentæ ſunt: & tam primam partem GH, in M, quam primum triangulum ABF, per rectam FN, ſecuimus proportionaliter,[c] cum ſit triangulum BFN, ad triangulum NFA, vt BN, ad NA, hoc eſt, vt GM, ad MH,[d] erit vt GM, ad MI, id eſt, vt K, ad L, ita BFN, triangulum ad trapezium FNAC, quod eſt propoſitum.

[c] 1. ſexti.
[d] 1. huius.

DENIQVE data ſit proportio O ad P, ſecandumque ſit triangulum ABC, in duas partes eiuſdem proportionis. Diuiſa tota GI, in Q, ita vt eadem ſit proportio GQ, ad QI, quæ O, ad P, quoniam punctum diuiſionis Q, cadit in ſecundam partem HI, totius lineæ GI, diuidemus AC, baſem ſecundi trianguli dato puncto F, oppoſitam in R, vt eadem ſit proportio AR, ad RC, quæ HQ, ad QI. Dico ductam rectam FR, problema efficere, hoc eſt, ita eſſe trapezium ABFR, ad triangulum RFC, vt O, ad P. Quoniam enim rectæ GH, HI, repertæ ſunt triangulis ABF, AFC, proportionales; & tam ſecundam partem HI, in Q, quam ſecundum triangulum AFC, per rectam FR, ſecuimus proportionaliter:[e] cum ſit triangulum AFR, ad triangulum CFR, vt AR, ad RC, hoc eſt, vt HQ, ad QI,[f] Erit vt GQ, ad QI, hoc eſt, vt O, ad P, ita trapezium ABFR, ad triangulum RFC, quod eſt propoſitum.

[e] 1. ſexti.
[f] 1. huius.

IAM vero ſi antecedens proportionis vergere debeat verſus C, proportioque data ſit O, ad P; fiet id commodiſſime, ſi triangulum ex F, diuidatur ſecundum proportionem P, ad O, ita vt antecedens vergat verſus B, ſicut docuimus. Nam tunc pars verſus C, ad reliquam habebit proportionem, quam O, ad P, per conuerſam proportionalitatem. Quod etiam in aliis figuris intelligi volo.



SIT deinde multilatera figura quæcunque ABCDEF, per rectam ex angulo A, ductam ſecanda in duas partes, ita vt pars ad B, vergens ad reliquam partem proportionem habeat datam M, ad N. Ductis ex dato angulo A, ad omnes angulos oppoſitos rectis partientibus figuram in quatuor triangula;[g] inueniantur ipſis quatuor rectæ proportionales GH, HI, IK, KL. Tota deinde GL, ſecetur in O, vt eadem ſit proportio GO, ad OL, quæ M, ad N. Et quoniam diuiſionis punctum O, cadit in tertiam lineam IK, ſecabimus tertii trianguli baſem DE, dato angulo A, oppoſitam in P, vt ſecta eſt IK, in O, ducemuſque rectam AP.

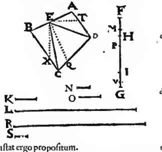
[g] 3. huius.

Dico

Dico eſſe rectilineum ABCDIA, ad rectilineum APEFA, vt GO, ad OL, hoc eſt, vt M, ad N. Quoniam enim triangula rectilinei dati proportionalia ſunt ordine rectis GH, HI, IK, KL, per conſtructionem, tertiumq; triangulum ADE, & lineam tertiam IK, diuiſimus proportionaliter per rectam AP, & in puncto O; [a] cum ſit vt DP, ad PE, hoc eſt, vt IO, ad OK, ita triangulum ADP, ad triangulum APE; [b] Erunt totæ quoque magnitudines ſectæ proportionaliter, hoc eſt, erit ABCDPA, ad APEFA, vt GO, ad OL, hoc eſt, vt M, ad N, quod eſt propoſitũ. a 1. ſexti. b 1. huius.

QVOD ſi punctum O, diuidens rectam GL, in duas partes proportionis datæ M, ad N, caderet in aliquod punctorum H, I, K, vt in I, terminum ſecundæ lineæ HI, diuideret recta AD, terminans ſecundum triangulum ACD, totum rectilineum in datam proportionem Nam tunc per primam partem propoſ. 1. huius lib. eſſet ABCDA, ad ADEFA, vt M, ad N, vt perſpicuum eſt.

DATVM præterea ſit rectilineum ABCD, ex puncto E, dato in latere AB, diuidendum in duas partes, quarum prior ad B, vergens ad poſteriorem partem habeat proportionem datam K, ad L. Ductis ex dato pũcto E, ad omnes angulos oppoſitos rectis diuidentibus rectilineum in tot triangula vno minus, quot latera figura habet; [c] inueniantur rectæ FH, HI, IG, triangulis EBC, ECD, EDA, proportionales. Secta deinde tota FG, in M, ſecundum datam proportionem K, ad L: quoniam diuiſionis punctum M, incidit in primam lineam FH, diuidemus primi trianguli EBC, baſem BC, dato puncto E, oppoſitam in X, vt FH, ſecta eſt in M. Iuncta namque recta EX, [d] erit triangulum EBX, ad figuram EXCDAE, vt FM, ad MG, hoc eſt, vt K, ad L, propterea quod triangula EBC, ECD, EDA, rectis FH, HI, IG, proportionalia ſunt ex conſtructione; & primæ partes EBC, FH, ſectæ ſunt per rectam EX, & in M, proportionaliter; [e] cum ſit EBX, ad EXC, vt BX, ad XC, hoc eſt, vt FM, ad MH. Conſtat ergo propoſitum. c 3. huius. d 1. huius. e 1. ſexti.

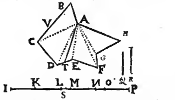


SI proportio data ſit N, ad O; ſecta FG, in P, ſecundum proportionem N, ad O, cadet diuiſionis punctum P, in ſecundam lineam HI. Igitur ſi ſecundi trianguli ECD, baſis CD, dato puncto E, oppoſita ſecetur in Q, vt eſt HI, in P, nectaturq; recta EQ. [f] erit rurſus figura EBCQE, ad figurã EQDA, vt FP, ad PG, hoc eſt, vt N, ad O. f 1. huius.

SI denique data ſit proportio R, ad S, ſecta FG, in V, ſecundum proportionem R, ad S, cadet diuiſionis punctum V, in tertiam lineam IG. Quam ob rem ſi tertij trianguli EDA, baſis DA, dato puncto E, oppoſita ſecetur in T, vt ſecta eſt IG, in V, iungaturq; recta ET; [g] erit rurſus figura EBCDTE, ad triangulum ETA, vt FV, VG, hoc eſt, vt R, ad S. g 1. huius.

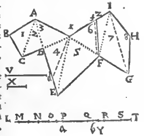
ATQVE hac via procedendum eſt in omnibus aliis figuris, quæ latera totidem habeant, quot angulos, id eſt, in quibus omnes anguli introrſum vergant.

IDEM hoc problema efficiemus in rectilineo, cuius anguli partim extrorſum vergant, & partim introrſum, dummodo ab angulo, vel puncto dato in latere duci poſſint lineæ rectæ diuidentes rectilineum in triangula, quæ nullum ipſius latus ſecent. Vt in hac figura octo laterum ABCDEFGH, cuius quinque anguli B, C, D, F, H, introrſum vergunt, & reliqui tres BAH, DEF, FGH, extrorſum, ductæ ſunt rectæ ex angulo A, ad omnes angulos, præter quam ad duos proximos B, H, nullum figuræ latus interſecantes. [h] Si igitur reperiantur ſex rectæ IK, KL, LM, MN, NO, OP, ſex triangulis ABC, ACD, ADE, AEF, AFG, AGH, proportionales; & tota linea LP, ſecetur in S, ſecundum datam proportionem Q, ad R; atque baſis DE, tertij trianguli. (Nam diuiſionis punctum S, in tertiam lineam LM, incidit) dato puncto A, oppoſito diuidatur in T, vt linea LM, in S, diuiſa eſt, ducaturque recta AT: [i] Erit figura ABCDTA, ad figuram ATEFGHA, vt IS, ad SP, hoc eſt, vt Q, ad R. h 3. huius. i 1. huius.



EX angulo B, vel H, non poterit propoſita figura in quamcunq; proportionem diuidi: quia lineæ ex eorum vtrolibet ad oppoſitos angulos emiſſæ partim ſecant latera, & partim cadunt extra figuram. Quod ſi data portio minor eſſet, quam figuræ BCDEB, (ſi nimirum intelligatur ducta recta BE,) ad figuram BEFGHAB, tum demum diuidi poſſet ex B, tota figura in datam proportionem: propterea quod fierent duo trianguli BCD, (ducta videlicet recta BD,) BDE, ad punctum B, quorum baſes ſunt latera figuræ CD, DE; alia vero quatuor ABE, AEF, AFG, AGH, ad punctum A, quorum etiam baſes ſunt figuræ latera AB, EF, FG, GH, &c.

EODEM modo quamcunq; figuram rectilineam, etiam irregulariſſimam, partiemur in datam proportionem, non quidem ex quolibet angulo, vel puncto dato, (niſi ex eo duci poſſint rectæ ad omnes angulos oppoſitos, exceptis duobus proximis, quę nullum figuræ latus interſecent: cuiuſmodi eſſet punctum V, in antecedenti figura) ſed ex aliquo puncto particulari; ſi prius figura diuidatur in triangula ex pluribus punctis, ita vt quodlibet triangulum habeat ſaltem vnum latus, quod etiam ſit latus figuræ. Vt ſi figura hæc ABCDEFHHIKA, diuidatur in octo triangula, & illis in recta LT, [k] inueniãtur totidem lineæ proportionales, totaque linea LT, ſecetur in Y, ſecundum datam proportionem V, ad X. & baſis IK, ſexti trianguli (quod punctum Y, cadat in ſextam lineam QR,) ſecetur in Z, vt ſecta eſt QR, in Y; [l] ita vt ducta recta FZ, triangulum FIK, ſectum ſit, vt ſecta eſt baſis IK, hoc eſt, recta QR: [m] Erit figura ABCDEFZKA, ad figurã FZIHGF, vt LY, ad YT, h. e. vt V, ad X. Et ſic de cæteris. k 3. huius. l 1. ſexti. m 1. huius.



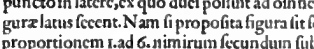
SCHO-

SCHOLIVM.

Quo pacto figura data ſecetur ex dato angulo vel puncto in latere, in quotuis partes æquales.

HIS rité intellectis, licebit nobis quamlibet figuram ſecare in quotuis partes æquales ex dato angulo, vel puncto in latere, ex quo duci poſſunt ad omnes angulos, exceptis proximis duobus, rectæ lineæ, ita vt nullum figuræ latus ſecent. Nam ſi propoſita figura ſit ſecanda, verbi gratia in 7. partes ęquales, diuidemus eam ſecundum proportionem 1. ad 6. nimirum ſecundum ſubmultiplicem denominatam à denominatore partium, minus vno, in quas figura diuidenda eſt. Ita enim prior pars erit $\frac{1}{7}$. totius figuræ, cum poſterior 6. eiuſmodi partes complectatur. Hanc deinde poſteriorem partem ſecabimus ſecundum proportionem 1. ad 5. ita vt prior pars contineat $\frac{1}{6}$. ipſius hoc eſt, $\frac{1}{7}$. totius figuræ. Poſt hæc poſteriorem huius ſecundæ diuiſionis partem partiemur ſecundum proportionem 1. ad 4. Ac rurſus partem huius tertiæ diuiſionis poſteriorem diuidemus ſecundum proportionem 1. ad 3. Atque poſteriorem huius quartæ diuiſionis partem ſecabimus ſecundum proportionem 1. ad 2. Ac poſtremo partem poſteriorem huius quintæ diuiſionis partiemur in duas partes æquales, nimirum ſecundum proportionem 1 ad 1.

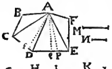
NON aliter figuram irregularem, in qua à nullo angulo, vel puncto in latere, duci poſſunt rectæ ad angulos oppoſitos, quin aliqua figuræ latera ſecentur, diuidere licebit in partes quotuis æquales, ex diuerſis angulis, vel punctis. Nam ſi verbi gratia vltima figura huius propoſitionis diuidenda ſit in 5. partes æquales; reſecabimus ex ea, ab aliquo angulo, vel puncto, quintam partem. Deinde ex maiore parte complectente $\frac{4}{5}$. totius figuræ, ab aliquo eius angulo, vel puncto, detrahemus quartam partem: Item tertiam partem ex maiore parte huius diuiſionis: Ac tandem ſemiſſem ex vltima parte poſtremæ huius diuiſionis. Hac enim ratione diuiſa erit tota figura in 5. partes: non ſecus atque in linea recta AB, contingit. Si namq; eam partiri iubeamur in 7. partes æquales, efficiemus id, ſi primo loco ſeptimam partem AC, detrahemus; deinde $\frac{1}{6}$. CD, ex reliqua linea CB; & ex reliqua DB, quintam partem DE: & ex reliqua EB, quartam partem EF: & ex reliqua FB, tertiam partem FG: Ac denique reliquam lineam GB, bifariam ſecabimus in H, hoc eſt, ſemiſſem GH, ex ea abſcindemus.



FACILIVS idem exequemur, quando ex dato angulo, vel puncto, duci poſſunt rectæ ad omnes angulos, duobus proximis exceptis, nullum figuræ latus ſecãtes, hac ratione. Lineam ex rectis, quæ triangulis figuræ proportionales ſunt, conflatam ſecabimus in tot partes æquales, in quot figuram partiri iubemur. Si enim baſes triangulorum dato angulo, vel puncto oppoſitas, quæ lineis, in quas puncta diuiſionum cadunt, reſpondent, ita diuidemus, vt ſectæ ſunt reſpondentes lineæ, atque ex dato angulo vel puncto, ad diuiſionum puncta rectas ducemus, factum erit, quod proponitur. Vt ſi ſecunda figura huius propoſ. ſecanda ſit in 5. partes æquales, partiemur lineam GL, in 5. æquales partes GH, Hb, ba, aK, KL. Et quoniam primum punctum H, cadit in H, erit triangulum ABC, quinta figuræ pars; [a] cum ſit vt GH, ad HL, ita triangulum ABC, ad reliquam partem figuræ. Deinde ſecabimus baſem ſecundi trianguli in d, vt ſecunda linea HI, ſecta eſt in b: Et baſem tertii trianguli in e, vt tertia linea IK. ſecta eſt in a; rectaſque ducemus A d, Ae. Quia vero quartum punctum K, cadit in K, terminum quartæ lineæ IK, erit figura diuiſa in 5. partes æquales ABC, ACd, AdDe, AeE, AEF: [b] propterea quod hæ partes partibus GH, Hb, ba, aK, KL, proportionales ſunt.

a 1. huius.

b 1. huius.



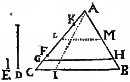
NEQVE vero difficile erit hanc eandem rationem figuris irregularibus, qualis eſt vltima huius propoſ. accommodare. Si enim ea diuidenda ſit, verbi gratia in tres partes æquales, ſecanda erit linea LT, in tres æquales partes La, ab, bT. Et quarti trianguli baſis DE, diuidenda in d, vt quarta linea OP, diuiſa eſt in a: Item ſexti trianguli baſis KI, ſecanda in f. vt ſexta linea QR, in b, ſecta eſt. Nam ſi ex K, angulo baſi DE, oppoſito recta ducatur Kd: Item ex angulo F, baſi KI, oppoſito recta Ff, erunt tres partes figuræ ABCDdKA, KdEFfK, fFGHIf, inter ſe æquales: [c] cum ſint rectis La, ab, bT, proportionales. Eademque de cæteris ratio eſt.

c 1. huius

PROBL. 4. PROPOS. 5.

DATVM rectilineum per rectam lineam datæ rectæ parallelam in datam proportionem diuidere, ita vt antecedens proportionis in quam elegeris partem vergat.

SIT primo triangulum ABC, diuidendum in duas partes per lineam lateri BC, parallelam, vt pars verſus A. ad reliquam habeat proportionem datam D, ad E. Alterutro laterum, cui linea diuidens æquidiſtare non debet, videlicet AC, diuiſo in F, vt eadem ſit proportio AF, ad FC, quæ D, ad E, initio facto ab angulo A, verſus quem antecedens proportionis vergere debet, reperiatur inter totum latus AC, & eius partẽ AF, quæ terminatur in angulo A, qui lateri opponitur, cui æquidiſtans ducenda eſt, media proportionalis AG, agaturque per G, ipſi BC, parallela GH. Dico hanc parallelam problema efficere. id eſt, eandem eſſe proportionem trianguli AGH, ad trapezium BCGH, quæ eſt D, ad E. [a] Quoniam enim triangulum ABC, ad triangulum AGH, eſt vt latus AC, ad rectam AF, quod tres rectæ AC, AG, AF, continue proportionales ſint, & triãgula ABC, AGH, ſuper AC, AG, ſimilia ſimiliterq; poſita; Erit per conuerſionem rationis triangulum ABC, ad trapezium BCGH, vt AC, ad FC. Ergo diuidendo erit triangulum AGH, ad trapezium BCGH, vt AF, ad FC, hoc eſt, vt D, ad E, quod eſt propoſitum. Quòd etiam ita colligemus. [b] Quoniam eſt triangulum ABC, ad triangulum AGH, vt recta AC, ad AF; erit diuidendo trapezium BG, ad triangulum AGH, vt FC, ad AF: Et conuertendo triangulum AGH, ad trapeziun BG, vt AF, ad FC, hoc eſt vt D, ad E.



a coroll. 19. ſexti.
b coroll. 19. ſexti.

ALI-

ALITER

DIVISO latere quocunque, nimirum BC, in I, ſecundum datam proportionem D, ad E, iunctaque recta AI:[a] erit triangulum ABI, ad triangulum AIC, vt BI, ad IC, id eſt, vt D, ad E.[b] Si igitur ſuper BC, inter rectas BA, CA, conſtituatur trapezinm BG, per parallelam GH, æquale triangulo AIC, quod eſt conſequens; erit reliquum triangulum AGH, reliquo triangulo ABI, æquale. [c] Quare erit triangulum AGH, ad trapezium BG, vt triangulum ABI, ad triangulum AIC, hoc eſt, vt BI, ad IC, vel vt D, ad E. Sed prior via expeditior eſt: placuit tamen hanc alteram etiam proponere; quia generalis ferme eſt, & in omnes ſiguras multilateras quadrat, vt infra patebit.

a 1. ſexti
b 1. huius.
c 7. quinti.

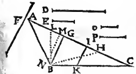
NON ſecus id, quod propoſitum eſt, exequemur, ſi antecedens proportionis vergere debeat ad latus BC, cui recta ducēda eſt parallela. Diuiſo enim rurſus latere AC, in K ſecundum datam proportionem D, ad E, ita vt antecedens proportionis incipiat à latere BC; inueniatur inter totam AC. & eius partem AK, quæ eſt conſequens proportionis, media proportionalis AL, agaturque per L, lateri BC, parallela LM. Dico hanc parallelam problema efficere, hoc eſt, eandem eſſe proportionem trapezij BL, ad triangulum ALM, quæ eſt D, ad E.[d] Quia enim eſt, vt triangulum ABC, ad triangulum ALM, ita CA, ad AK, quod tres rectæ AC. AL, AK, continue ſint proportionales, & triangula ABC, ALM, ſuper AC, AL, ſimilia ſimiliterque poſita; Erit diuidendo trapezium BL, ad triangulum ALM, vt CK, ad AK, hoc eſt, vt D, ad E, quod eſt propoſitum. Hoc idem effici etiam poteſt via illa altera generali, quamuis non ita expedite. Diuiſo enim quocunque latere, nimirum BC, in I, ſecundum datam proportionem D, ad E, iunctaque recta AI,[e] erit triangulum ABI, ad triangulum AIC, vt BI, ad IC id eſt, vt D, ad E.[f] Si igitur ſuper BC, inter rectas BA, CA, conſtituatur trapezium BL, per parallelam LM, æquale triangulo ABI, quod eſt antecedens: erit reliquum triangulum ALM, reliquo triangulo AIC, æquale.[g] Quare erit trapezium BL, ad triangulum ALM, vt triangulum ABI, ad triangulum AIC, hoc eſt, vt BI, ad IC, vel vt D, ad E.

d corell. 19. ſexti.
e 1. ſexti.
f 2. huius.
g 7. quinti.

SED diuidendum iam ſit triangulum ABC, in datam proportionem D, ad E, per lineam parallelam cuicunq; lineæ F: quæ ſi æquidiſtet vni laterum, partiemur triangulum in datam proportionem, per rectam illi lateri parallelam, vt iam tradidimus, ſiue antecedens vergere debeat ad angulum lateri illi oppoſitum, ſiue ad ipſummet latus: factumq; erit, quod iubetur;[h] cum parallela illa æquidiſtet etiam datæ rectæ lineæ.

h 30. primi.

SI vero data recta F, nulli laterum æquidiſtet, ducatur illi ex aliquo angulo parallela intra triangulum cadens, qualis eſt BG. Si igitur antecedens proportionis ſtatuendum ſit ad partes A, ſecabimus latus AC, in H, in datam proportionem D, ad E. Cadat autem primo punctum H, inter G, & C; inueniaturque inter GC. & eius partem CH, terminatam in angulo C parallelæ BG, oppoſito media proportionalis CI; & per I, ipſi BG, vel ipſi F, parallela agatur IK; quam dico problema efficere: hoc eſt, eſſe trapezium ABKI, ad triangulū IKC, vt D, ad E.[i] Quoniam enim eſt (ducta recta BH,) vt triangulum GBC. ad triangulum IKC, ita GC, ad CH, quod tres GC, CI, CH, ſint continue proportionales, & triangula ſimilia ſimiliterq; poſita:[k] Vt autem GC, ad CH, ita eſt quoque triangulum GBC, ad triangulum HBC;[l] erunt triangula IKC, HBC, æqualia: Ac proinde & reliquum trapezium ABKI, reliquo triangulo ABH æquale erit.[m] Igitur erit vt trapezium ABKI, ad triangulum ICK, ita triangulum ABH, ad triangulum HBC. hoc eſt, ita AH, ad HC, vel ita D, ad E, quod eſt propoſitum.



i corell. 19. ſexti.
k 1. ſexti.
l 9. quinti.
m 7. quint.

CADAT deinde punctum L, (Ponimus iam datam proportionem E, ad D, diuiſamque eſſe AC, in L, ſecundum datam proportionem) inter A, & G. Inuenta ergo inter GA, & eius partē AL, terminatam in angulo A, parallelæ BG, oppoſito, media proportionali AM, agatur per M, ipſi GB, ideoque & ipſi F, parallela MN, quam dico problema efficere, hoc eſt, eſſe triangulum AMN, ad trapezium MNBC, vt E, ad D. Iuncta namque recta BL,[n] quoniam eſt, vt triangulum ABG, ad triangulum AMN, ita AG, ad AL, quod tres AG, AM, AL, continue proportionales ſint, & triangula ſimilia ſimiliterque poſita:[o] Vt autem AG, ad AL, ita eſt quoque idem triangulum ABG, ad triangulum ABL:[p] erunt triangula AMN, ABL, æqualia: ac proinde & reliquum trapezium MNBC, reliquo triangulo LBC. æquale erit. [q] Quapropter erit triangulum AMN, ad trapezium MNBC, vt triangulum ABL, ad triangulum LBC,[r] hoc eſt, vt AL, ad LC, vel E, ad D, quod eſt propoſitum.

n coroll. 19. ſexti.
o 1 ſexti.
p 9. quinti.
q 7. quinti.
r 1. ſexti.

QVOD ſi punctum diuiſionis caderet in G, quod contingeret, ſi data eſſet proportio O, ad P; Ipſamet parallela BG, problema efficeret;[s] cum ſit triangulum ABG, ad triangulum GBC, vt AG, ad GC, hoc eſt, vt O, ad P. Et ſi antecedens ſtatui debet verſus C, & data proportio eſſet P, ad O;[t] erit quoque triangulum CBG, ad triangulum ABG, vt CG, ad GA, vel vt P, ad O.

s 1. ſexti.
t 1. ſexti.

ALITER

DIVISO quouis latere, videlicet AC, in H, ſecundum datam proportionem D, ad E, iunctaque recta BH; quia punctum H, cadit inter G, & C,[u] fiat ſuper BG, inter rectas BC, GC, trapezium BI, per parallelā IK, æquale triangulo BGH: Eritq; propterea totum trapezium ABKI, toti triangulo ABH, æquale, atq; idcirco & reliquum triangulum IKC, reliquo triangulo BCH.[x] Quocirca erit trapezium ABKI, ad triangulum IKC, vt triangulum ABH, ad triangulum BCH,[y] hoc eſt, vt AH, ad HC, vel vt D, ad E.

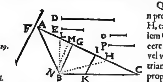
u 2. huius.
x 7. quinti.
y 1. ſexti.

DIVISO rurſus latere AC, in L, ſecundum datam proportionem E, ad D, iunctaque recta BL, quoniam punctum L, cadit inter A, & G,[z] fiat ſuper BG, inter rectas BA, GA, trapezium BM, per parallelam MN, æquale triangulo BGL: Eritque propterea & totum trapezium MNBC, toti triangulo LBC, & reliquum triangulum AMN, reliquo triangulo ABL, æquale.[a] Quam ob rem erit triāgulum AMN, ad trapezium MNBC, vt triangulum ABL, ad triangulum LBC,[b] hoc eſt, vt AL, ad LC, vel vt E, ad D, quod erat faciendum.

z 2. huius.
a 7. quinti.
b 1. ſexti.

NON

NON aliter problema abſoluemus, ſi antecedens proportionis vergere debeat ad partes C. Diuiſo namq; latere CA, in L, in proportionem datam D, ad E: Quoniam punctum L, cadit inter A, & G; inueniemus inter GA, AL, mediam proportionalem AM, & per M, ipſi BG, parallelam ducemus MN, quam dico problema effi-
a coroll. 19. ſexti. cere, id eſt, ita eſſe trapezium MNBC, ad triangulum AMN, vt D, ad E. Iuncta namq; recta BL:[a] quoniam triangulum ABG, ad triangulum AMN, eſt vt AG, ad AL, quod tres AG, AM, AL, continue ſint proportionales,
b 1. ſexti. & triangula ſimilia ſimiliterque poſita:[b] Vt autem AG, ad AL, ita eſt quoque idem triangulum ABG, ad trian-
c 9. quinti. gulum ABL;[c] æqualia erunt triangula AMN, ABL; ac proinde & reliquum trapezium MNBC, reliquo triangulo LBC, æquale erit. Igitur erit trapezium MNBC, ad triangulum AMN, vt triangulum LBC, ad triangulum
d 1. ſexti. ABL,[d] hoc eſt, vt CL, ad LA, vel vt D, ad E.



QVOD ſi proportio data ſit E, ad D; diuiſo eodem latere CA, in H, n proportionem datam E, ad D, ductaque recta BH; quoniam punctum H, cadit inter G, & C, reperiemus inter GC, CH, mediam proportionalem CI, & per I, parallelam ipſi BG, agemus IK: quam dico problema effi-
e coroll. 19. ſexti. cere, hoc eſt, eſſe triangulum CIK, ad trapezium IKBA, vt CH, ad HA, vel vt E, ad D. Iuncta enim recta BH;[e] quoniam eſt triangulum CBG, ad triangulum CIK, vt CG, ad CH; quod tres CG, CI, CH, ſint continue
f 1. ſexti. proportionales, & triangula ſimilia ſimiliterque poſita:[f] Vt autem CG,
g 9. quinti. ad CH, ita quoque eſt idem triangulũ CBG, ad triangulũ CBH:[g] æqua-
h 7. quinti. lia erunt triangula CIK, CBH, ideoque & reliquum trapeziũ IKBA, reliquo triangulo HBA, æquale erit.[h] Quo-
i 1. ſexti. circa erit triangulum CIK, ad trapezium IKBA, vt triangulum CBH, ad triangulum HBA,[i] hoc eſt, vt CH, ad HA, vel vt E, ad D, quod faciendum erat.

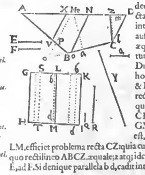
k 2. huius. FIET idem quoque aliter, ſi cadente puncto diuiſionis L, inter A, & G,[k] conſtruatur trapezium GN, per parallelam MN, æquale triangulo BGL; Cadente vero puncto diuiſionis H, inter G, & C, trapezium conſtituatur BI, æquale triangulo BGH, per parallelam IK, &c.

PRÆTEREA quadrilaterum ABCD, diuidendum ſit per lineam lateri CD, parallelam in duas partes vt pars verſus A, ad reliquam habeat datam proportionem E, ad F. Per ea, quæ in ſcholio propoſ. 14. lib. 2. Eucl. vel potius per ea, quæ Num. 4. cap. 4. lib. 4. huius tradidimus, quadrilatero ABCD, conſtruatur quadratum æquale GHIK; ſeceturque latus GK, in L, in proportionem E, ad F, datam, & per L, ipſi GH, parallela agatur LM.
l 2. huius. Deinde ſuper CD, inter rectas CB, DA,[l] fiat rectilineo LI, æquale quadrilaterum DO, habens latus NO, lateri CD, parallelum: Et ſi quidem punctum O, cadit in latus CB, vel in ipſum punctum B, recta NO, problema efficiet. Cum enim quadratum GI, toti quadrilatero AC, æquale ſit, & rectangulum ablatum LI, quadrilatero abla-
m 7. quint. to DO; erit quoque reliquum rectangulum GM, reliquo rectilineo ANO, æquale.[m] Quapropter erit ANO,
n 1. ſexti. ad DO, vt GM, ad MK;[n] hoc eſt, vt GL, ad LK, vel vt E, ad F, quod eſt propoſitum.

SI vero punctum O, cadit in CB, latus productũ, (quod hic fiet, ſi proportio data ſit Q, ad R. Diuiſo enim latere GK, in S, in datam proportionem Q, ad R; ductaque ST, parallela lateri GH; ſi ſuper CD, inter rectas DA,
o 2. huius. CB,[o] fiat rectangulo KT, æquale quadrilaterum DO, cadet O, vltra B, & parallela NO, ſecabit latus AB, in P,)
p 2. huius. [p] conſtituemus ſuper NP, inter rectas NA, PA, per parallelam VX, trapezium NV, triangulo BOP, æquale, factum erit, quod iubetur. Addito enim communi rectilineo CDNPB; erit totum rectilineum CDXVB, toti rectilineo DO, hoc eſt, rectangulo KT, æquale; ideoque & reliquum triangulum AVX, reliquo rectangulo GT,
q 7. quint. æquale.[q] Quare erit triangulum AVX, ad rectilineum CDXVB, vt GT, ad KT,[r] hoc eſt, vt GS, ad SK, vel vt Q,
r 1. ſexti. ad R, quod erat faciendum.

NON alia ratione problema abſoluemus, ſi antecedens proportionis ſtatuendum ſit ad partes CD. Sit namque data proportio F, ad E, vel R, ad Q. Diuiſo ergo latere KG, quadrati GI, quod quadrilatero AC, factum eſt æquale in L, ſecundum proportionem datam F, ad E; vel in S, ſecundum datam proportionem R, ad Q, du-
s 2. huius ctaque parallela LM, vel ST:[s] ſi ſuper CD, inter rectas DA, CB, conſtituemus rectilineum DO, rectangulo KM, vel rectilineum CDXVB, rectangulo KT, æquale per parallelam NO, vel XV, vt paulo ante dictum eſt, ſolutum erit problema, vt liquet.

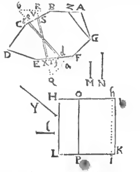
VERVM idem quadrilaterum ABCD, diuidendum ſit per parallelam cuilibet alteri lineæ Y, in proportionem E, ad F, ita vt antecedens proportionis vergat ad A; Si igitur data recta Y, æquidiſtet vni lateri, partiemur datum quadrilaterum in datam proportionem per lineam illi lateri, proindeque & rectæ Y, parallelam, vt proxime ſcripſimus. Si vero nulli lateri recta Y, æquidiſtet, ducemus ei ex aliquo angulo, vt ex C, parallelam CZ, quæ intra quadrilaterum cadat; & ablato triangulo CDZ, vel rectilineo ablato, auferemus ex quadrato GI, quod toti quadrilatero ſit æquale, rectangulum æquale Kd, (quod fiet, ſi triangulo, vel rectilineo CDZ, fiat æquale quadra-



t 17. ſexti. tum, cuius latus a; & duabus KI, & a, tertia proportionalis reperiatur Kb. Ducta enim bd, ipſi KI, parallela,[t] erit rectangulum Kd, quadrato lateris a, hoc eſt, rectilineo CDZ, æquale.) Et ſi quidem parallela bd, cadit inter KI,
u 2. huius. & LM,[u] conſtruemus ſuper CZ, inter rectas CB, ZA, rectilineum CaeZ, rectangulo bM, æquale, cuius latus ae, lateri CZ, hoc eſt, datæ rectæ Y æquidiſtet; factumque erit, quod præcipitur. Erit enim totum rectilineum CDea, toti rectangulo KM; ac propterea & reliquum ABae, reliquo
x 7. quint. GM, æquale.[x] Quapropter erit ABae, ad eaeD, vt GM, ad KM;[y] hoc
y 1 ſexti. eſt, vt GL, ad LK, vel vt E, ad F. Si vero parallela bd, coincidit cum recta LM, efficiet problema recta CZ: quia cum KM, rectilineo CDZ, ſit æquale, erit reliquũ rectangulum GM, reli-
z 7. quinti. quo rectilineo ABCZ, æquale;[z] atq; idcirco erit ABCZ, ad CDZ, vt GM, ad KM,[a] hoc eſt, vt GL, ad LK, vel vt
a 1. ſexti. E, ad F. Si denique parallela bd, cadit inter LM, & GH; erit rectilineum, vel triangulum ablatũ CDZ, maius rectangulo

ctangulo KM, [a] Si igitur ſuper CZ, inter rectas CD, ZD, conſtruetur rectilineum C m, rectangulo L d, æquale; erit reliquum D m l, reliquo rectangulo Gd, æquale: ac propterea & reliquum m l CBA, reliquo rectangulo KM. [b] Igitur erit ABC l m, ad l m D, vt GM, ad KM: hoc eſt vt GL: ad LK, vel vt E, ad F, quod eſt propoſitum. a 2. huius. b 7. quint.

EODEM prorſus modo quamlibet aliam figuram, quotquot habeat latera, in datam proportionẽ ſecabimus per lineam, quæ vni lateri, vel cuius alij rectæ lineæ ęquidiſtet. Sit enim datum heptagonum qualecunque ABCDEFG, ſecandum per lineam lateri AG, parallelam, in duas partes, vt ea, quæ ad D, vergit, ad reliquam habeat proportionem eandem, quam M. ad N, habet. Conſtituto quadrato HIKL, æquali ipſi heptagono, per ea, quæ in ſcholio propoſ. 14. lib. 2. Euclid. vel potius per ea, quæ Num. 4. cap. 4. lib. 4. huius ſcripſimus; & diuiſo latere HI. in O, in proportionem M, ad N, ductaque OP, latere HL. parallela: [c] fiat ſuper rectam AG, inter rectas AB, GF, rectangulo IP, æquale rectilineum AGQR, habens latus QR, lateri AG, parallelum. Et quoniam QR, cadit vltra F, B, [d] conſtituemus rurſum ſuper rectam ST, inter rectas SC, TE, per rectam VX, ipſi ST, parallelam, rectilineum æquale triangulis FQT, BRS, extra heptagonum exiſtentibus; factumque erit quod proponitur, Cum enim rectilineum AGQR, ac proinde & rectilineum ABVXFG, rectangulo IP, ſit ęquale, erit quoque reliquum DEXVC, reliquo rectangulo OL, æquale. [e] Igitur erit DEXVC, ad ABVXFG, vt OL, ad IP, [f] hoc eſt, vt HO, ad OI, vel vt M, ad N, quod erat faciendum. c 2. huius. d 2. huius. e 7. quint. f 1. ſexti.



QVOD ſi latus rectilinei ex heptagono abſciſſi ęquidiſtare debeat rectæ Y, quæ nulli lateri heptagoni æquidiſtet, (ſi namque æquidiſtaret vni lateri, abſolueretur problema, vt proxime traditum eſt) ducta ex angulo G, rectæ Y, parallela GZ, quæ intra figuram cadit; [g] cõſtruemus rectilineo AGZ, ſuper rectam IK. æquale rectangulum h K;) quod fiet, ſi rectilineo AGZ, fiat æquale quadratum, cuius latus l, & duabus IK. & l, tertia proportionalis repetiatur Ih Ducta enim h i, ipſi IK parallela, [h] erit rectangulum h K, quadrato lateris, hoc eſt, rectilineo AGZ, æquale. [i] Deinde ſuper rectam GZ, inter rectas GF, ZB, conſtituemus rectangulo i P, per parallelam b a, æquale rectilineum GZ b a. [k] Nam ſi triangulis B b c, F a d, ſuper rectam d c, inter rectas e C, d E, fiat per parallelam f g, rectilineum d e g f. æquale, factum erit, quod in problemate proponitur, vt ex dictis perſpicuum eſt. Eademq; omnino ratio eſt in omnib' alijs rect' lineis quamuis irregularibus, dummodo in ijs duci poſſit vna linea parallela datæ rectæ, quæ rectilineum auferat dato rectilineo æquale. Non enim ſemper hoc fieri poſſe in figuris, cuius anguli partim introrſum, & partim extrorſum vergant, ad finem propoſ. 2. hui' lib. declarauimus, Id quod conſtructio ipſa problematis perſpicue nos docebit. g 2 huius. h 17. ſexti. 12. huius. k 2. huius.

S C H O L I V M.

DIVIDI ergo poterit quęlibet figura rectilinea in quotuis partes æquales per lineas, quæ datæ cuiuis rectæ lineæ æquidiſtent. Nã ſi verbi gratia data figura ſecãda ſit in 8. partes æquales per lineas datę rectæ parallelas, diuidemus eam primum in duas partes inter ſe proportionẽ habentes 1. ad 7. Ita namque prior pars erit $\frac{1}{8}$. totius figuræ. Deinde poſteriorem partem ſecabimus in proportionem 1. ad 6. ita vt prior pars huius diuiſionis ſit $\frac{1}{7}$. illius partis diuiſæ. hoc eſt, $\frac{1}{8}$. totius figuræ, cum pars illa diuiſa complectatur $\frac{7}{8}$. totius figuræ. Poſtea partem poſteriorem proximæ diuiſionis partiemur in proportionem 1. ad 5. Et poſteriorem huius diuiſionis partem in proportionem 1. ad 4. Atque ita deinceps, minuendo ſemper, donec ad partem deueniamus, quę ſecanda ſit in proportionem 1. ad 1. hoc eſt, in partes æquales. *Quo pacto figura data ſecetur per lineas parallelas in quotuis partes æquales.*

HOC idem effici poterit ea ratione, quam ad finem ſcholij propoſ. 4. expoſuimus: ſi videlicet latus quadrati HI, quod rectilineo dato conſtructum eſt æquale, in tot ęquales partes ſecetur, in quod partes datum rectilineum diuidendum eſt, & primo rectilineum diuidatur in proportionem primæ partis ad reliquas: Deinde poſterior pars rectilinei in proportionem ſecundæ partis lateris HI, ad reliquas: atque ita deinceps, &c.

ATQVE hic finem habet noſtra Geodeſia complectens diuiſionẽ omnium figurarum rectilinearum: ſequuntur iam particulares nonnullæ diuiſiones quarundam figurarũ, quæ tum, quia ſubtiles acutaſque demõſtrationes continent, tum quia pleraſque earum eruditi quoque Geometrę, vt Leonardus Piſanus, Frater Lucas Paccíolus, & Nicolaus Tartalea tradiderunt, omittendæ nullo modo viſæ ſunt. Vt autem Geometricè eas demonſtremus, præmittenda ſunt Theoremata nonnulla, quorum primum ſit hoc.

THEOR. 2. PROP. 6.

SI duo triangula æqualia habeant vnum latus commune, & in diuerſas partes vergant: Recta oppſitos angulos connectens à latere illo communi bifariam ſecatur.

SINT æqualia duo triangula ABC, ABD, habentia latus AB, cõmune, & in diuerſas partes vergentia. Dico rectam CD, oppſitos angulos C, D, iungentem ſecari in E, bifariam à latere communi AB. [a] Quoniam enim eſt tam triangulum ACE, ad triangulum ADE. quam triangulum BCE, ad triangulum BDE. vt CE. ad ED; [b] erit triangulum ACE, ad triangulum ADE, vt triangulum BCE, ad triangulum BDE. [c] Igitur erunt quoque duo triangula ſimul ACE, BCE, hoc eſt, totum triangulum ABC, ad duo triangula ſimul ADE, BDE. id eſt, ad totum triangu- a 1. ſexti. b 11. quint. c 12. quin.



ſum ABD, vt ACE, ad ADE, hoc eſt, vt CE, ad ED. Cum ergo triangula ABC, ABD, ponantur æqualia, erunt quoque rectæ CE, ED, æquales, ac proinde CD, in E, ſecta eſt bifariam. quod erat oſtendendum.

THEOR. 3. PROPOS. 7.

SI in triangulo baſi parallela ducatur, & extrema parallelarum rectis iungantur ſeſe interſecātibus; habebit vtriuſuis harum rectarum ſegmentum ab angulo incipiens ad reliquum in latere terminatum eandem proportionem, quam latus ab illa recta diuiſum ad partem eius ſuperiorem. Recta autem ex tertio angulo per interſectionem dictarum rectarum extenſa ſecabit vtramque parallelam bifariam.

IN triangulo ABC, ducta ſit DE, baſi BC, parallela, & iunctæ rectæ BE, CD, ſe interſecent in F. Dico eſſe BF, ad FE, vt AC, ad AE: Item CF, ad FD, vt AB, ad AD: Et iunctam rectam AF, ſecare parallelas DE, BC, bifariam in G, & H. [a] Quoniam enim triangula BDC, CEB, æqualia ſunt; ablato communi BFC, reliqua BDF, CEF, æqualia quoque erunt. [b] Quia vero eſt, vt BD, ad DA, ita CE, ad EA: [c] Vt autem BD, ad DA, ita eſt triangulum BFD, ad triangulum AFD: Et vt CE, ad EA, ita triangulum CFE, ad triangulum CFE; erit quoque triangulum BFD, ad triangulum AFD, vt triangulum CFE, ad triangulum AFE. Cum ergo triangulum BFD triangulo CFE, oſtenſum ſit æquale; [d] erit quoque triangulum AFD, triangulo AFE æquale. [e] Igitur DE, in G, ſecta eſt bifariam, [f] ac proinde & parallela BC, ſecta erit bifariam in H. [g] Et quoniam triangulum AFB, ad triangula æqualia AFD, AFE, eandem habet proportionem; [h] eſtque vt AFB, ad AFD, ita AB, ad AD: Et vt AFB, ad AFE, ita BF, ad FE: Erit quoque BA, ad AD, ideoque AC, ad AF, vt BF, ad FE; Eademque ratione erit AB, ad AD, vel AC, ad AE, vt CF, ad FD, quod etiam inde patet; cum ſit vt CF, ad FD, ita CFE, ad DEF, hoc eſt, ita BFD, ipſi CFE, æquale ad idem DEF, [k] hoc eſt, ita BF, ad FE. quod erat demonſtrandum.



a 37. prim. b 2. ſexti. c 1. ſexti. d 14. quin. e 6 huius. f ſchol. 4. ſexti. g 7. quint. h 1. ſexti. i 1. ſexti. k 1. ſexti.

THEOR. 4. PROPOS. 8.

SI in triangulo à duobus angulis duæ rectæ ducantur ad media puncta oppoſitorum laterum: Recta ex angulo reliquo per interſectionem earum deducta ſecat quoque reliquum latus bifariam. Cuiuslibet autem illarum trium linearum ſegmentum prope angulum ad reliquum ſegmentum duplam habet proportionem. Triangulum denique per rectas ab interſectione ad angulos ductas in tria triangula æqualia diuiditur.

IN triangulo præcedentis propoſ. ABC, duæ rectæ BE, CD, ſecent latera AC, AB, bifariam in E, D, ſe autem mutuo interſecent in F. Dico rectam ductam AF, ſecare quoque latus BC, bifariam in H, &c. [a] Iuncta enim recta DE, parallela erit ipſi BC, cum ſecet latera AB, AC, proportionaliter, in partes videlicet æquales: [b] Quam ob rē AE, vtramq; parellelam DE, BC, bifariā ſecabit. quod eſt primū.

DEINDE [c] quia eſt, vt AB, ad AD, ita CF, ad FD: Eſt autem AB, ipſius AD, dupla; erit quoque CF, ipſius FD, dupla. Eademque ratione & BF, ipſius FE; & AF, ipſius EH, dupla erit. quod eſt ſecundum.

POSTREMO [d] quia eſt vt AF, ad FH, ita triangulum AFB, ad triangulum BFH: Eſt autem AF, ipſius FH, oſtenſa dupla; erit quoq; triangulum AFB, trianguli BFH, duplū. Eſt autem & triangulum BFC, eiuſdem trianguli BFH, duplum [e] quod triangula BFH, CFH, æqualia ſint. Igitur æqualia erunt triangula AFB, BFC. Eodemq; modo triangulum AFC, eidem triangulo BFC, æquale erit: ac proinde omnia tria AFB, BFC, CFA, æqualia erunt. quod eſt tertium.



a 2. ſexti. b 7. huius. c 7. huius. d 1. ſexti. e 38. prim.

COROLLARIVM.

ITAQVE facile inueniri poteſt punctū intra triangulū, à quo tres rectæ ad tres angulos ductæ ipſū triangulū in tria æqualia triāgula partiātur. Huiuſmodi n. punctū in propoſito triangulo eſt F, vbi duæ rectæ ex duobus quibuſuis angulis ad media pūcta oppoſitorū laterū ductæ ſe interſecāt, vt in tertia parte hui' propoſ. oſtēdim'.

THEOR. 5. PROPOS. 9.

SI in triangulo ducatur recta vtcunq; duo latera ſecans: Erit totum triangulum ad abſciſſum triangulum, vt rectangulum ſub duobus lateribus ſectis totius trianguli comprehenſum, ad rectangulum ſub duobus lateribus trianguli abſciſſi, quæ priorū ſegmenta ſunt, comprehenſum.



IN triangulo ABC, recta DE, ſecet latera AB, AC, in D, E. Dico eſſe vt rectangulum ſub AB, AC, ad rectangulum ſub AD, AE, ita triangulum ABC, ad triangulum ADE. Quoniam enim triangula ABC, ADE, angulum habent communē A; habebunt per propoſ. 4. ſchol. propoſ. 23. lib. 6. Eucl. eandem proportionem, quam rectangula ſub lateribus AB, AC, & ſub AD, AE, comprehenſa, quod oſtendendum erat.

PRC-

PROBL. 5. PROPOS. 10.

DATVM triangulum ex dato puncto in eius latere in quotlibet partes æquales diuidere.

PROPOSITIONE quartadecima ſcholij propoſ.33.lib.6 Euclid. tradidimus regulam, qua triangulum in duas partes ſecundum datam proportionem diuidendum ſit: Et quo pacto ex triangulo pars imperata ſit auferenda. Si igitur triangulum ex dato puncto in eius latere quouis ſecandum ſit in quotlibet partes æquales, detrahenda primum erit per lineam rectam ex dato puncto ductam pars denominata à numero partium, in quas diuidendum eſt triangulum. Deinde duæ tales partes: poſtea tres, atque ita deinceps, donec tot partes, vna minus, detractæ ſint, in quot partes diuidendum proponitur triangulum. Vt ſi triangulum ABC, ex puncto D, diuidendum ſit in quinq; partes æquales, diuidemus latus BC, in quo datum punctum eſt, in quinq; partes æquales, in punctis E, F, G, H. Iuncta deinde recta DA; ducemus ei parallelas EI, FK. GL, HM. Si namque connectantur rectæ DI, DK, DL, DM, diuiſum erit triangulum in quinque partes æquales, Nam vt in dicta propoſ.14. ſcholij propoſ.33.lib.6. Euclid. oſtenſum eſt, triangulum DBI, eſt $\frac{1}{5}$. totius trianguli, hoc eſt, ita ſe habet DBI, ad ABC, vt BE, ad BC. Triangulum autem DBK, continet $\frac{2}{5}$. totius trianguli, id eſt, ita ſe habet DBK, ad ABC, vt BF, ad BC, At vero triangulum DBL, complectitur $\frac{3}{5}$. totius trianguli, id eſt, ita ſe habet DBL, ad ABC, vt BG, ad BC. Quadrilaterum denique ABDM, comprehendit $\frac{4}{5}$. totius trianguli, hoc eſt, ita ſe habet ABDM, ad ABC, vt BH, ad BC. Ex quo fit, reliquum triangulum DMC, eſſe $\frac{1}{5}$. eiuſdem trianguli ABC.

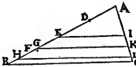


QVANDO punctum datum eſt in vno angulo, manifeſtum eſt, ſi latus oppoſitum in tot partes ſecetur, in quot triangulum diuidendum eſt [a] rectas ex eo angulo ad puncta diuiſionum eductas ſecare triangulum in propoſitas partes æquales. a 1. ſexti.

PROBL. 6. PROPOS. 11.

DATVM triangulum per lineas vni lateri parallelas in quotlibet æquales partes diuidere.

SIT triangulum ABC, diuidendum, verbi gratia, in quatuor partes æquales per lineas lateri BC, æquidiſtantes. Secetur vtrumuis reliquorum laterum nimirum AB, in 4. partes æquales, in tot videlicet, in quot triangulum diuidendum eſt, in punctis D, E, F. Et inter AB, AD, inuenta media proportionali AE; atque inter AB, AE, media proportionali AG; ac denique inter AB, media proportionali AH, ducantur EI, GK, HL, lateri BC, parallelæ, quas dico triangulum partiri in 4. partes æquales. [a] Quoniam enim triangulum ABC, triangulo AEI, ſimile eſt; [b] erit triangulum ABC, ad triangulum AEI, vt AB, ad AD, quod tres AB, AE, AD, ſint continue proportionales. Eſt autem AD, quarta pars ipſius AB. Igitur & triangulum AEI, quarta pars eſt trianguli ABC.



a corol. 4. ſexti.
b corol. 19. ſexti.

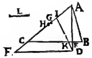
[c] NON aliter oſtendemus, eſſe triangulum ABC, ad triangulum AGK, vt AB, ad AE. quod etiam tres AB, AG, AE, ſint continue proportionales. Quare cum AE, contineat $\frac{2}{4}$. rectæ AB. continebit etiam AGK, triangulum $\frac{2}{4}$ trianguli ABC: Ideoq; cum AEI, ſit $\frac{1}{4}$. trianguli ABC, vt oſtendimus, erit EIKG, $\frac{1}{4}$. eiuſdem trianguli ABC. Denique eadem ratione erit triangulum ABC, ad triangulum AHL, vt AB, ad AF, quod etiam tres AB, AH, AF, ſint continue proportionales: ac proinde triangulum AHL, complectetur $\frac{3}{4}$. trianguli ABC, quemadmodum AF, continet $\frac{3}{4}$. ipſius AB: ideoq; BHLC, erit $\frac{1}{4}$. trianguli ABC, &c. c corol. 19. ſexti.

PROBL. 7. PROPOS. 12.

DATVM triangulum per rectam ex puncto extra triangulum dato ductam in duas partes æquales diuidere.

EX puncto D, extra triangulum ABC, dato ducenda ſit linea diuidens triangulum bifariam. Ducta recta DA, ad angulum oppoſitum ſecante latus BC, in E: ſi quidem BC. in E, diuiditur bifariam, factum erit, quod iubetur [a]: quod tunc triangula ABE, ACE, ſint æqualia. Si vero BC, non bifariam diuiditur in E. ſit ſegmentum CE, maius, cui ducatur parallela DF, occurrens lateri AC, producto in F. Secto latere AC, bifariam in G, inueniatur tribus DF, BC, CG, quarta proportionalis CH; [b] Eritq; rectangulum ſub DF, CH, æquale rectangulo ſub BC, CG, hoc eſt, ſemiſſi rectanguli ſub BC, CA: [c] cum rectangulum ſub BC, CA, duplum ſit rectanguli ſub

a 38. primi.
b 16 ſexti.
c 1. ſexti.



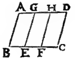
d 17.ſexti. BC,CG.Deinde inuenta L,media proportionali inter FC,CH,[d] vt quadratum ex L, æquale ſit rectangulo ſub FC, CH, adiungatur ipſi CH, recta HI, vt rectangulum ſub tota CI.& adiuncta HI,ęquale ſit quadrato ex L,ſiuę rectangulo ſub FC,CH,quemadmodum ad finem ſcholij propoſ. 36.lib.3. Euclid.ſcripſimus: ducaturq; recta DI,ſecans BC,in K. Dico rectam DI,ſecare triangulũ ABC,in duas partes ABKI,IKC,ęquales. Quoniam enim per conſtructionem rectangulum ſub CI, IH, æquale eſt rectangulo ſub CF,CH,[e] erit vt CI,ad CF,ita CH,ad IH;Et conuertendo,vt CF,ad CI,ita IH,ad CH:& compo-
e 16.ſexti. nendo vt IF,ad CI,ita CI,ad CH.[f] Vt autem IF,ad CI,ita eſt FD,ad CK. Igitur erit quoque FD,ad CK, vt CI,ad
f 4.ſexti. CH:[g] Ac proinde rectangulum ſub FD,CH,æquale erit rectangulo ſub CK,CI: Erat autem rectangulum ſub
& permu FD,CH per conſtructionem æquale ſemiſſi rectanguli ſub BC,CA. Igitur & rectangulum ſub CK,CI,æquale
tando. erit ſemiſſi rectanguli ſub BC,CA.Vt autem rectangulum ſub CK,CI,ad rectangulum ſub BC,CA,[h] ita eſt tri-
g 16.ſexti. angulum CKI,ad triangulum ABC. Igitur triangulum CKI, æquale quoque erit ſemiſſi trianguli ABC: ac pro-
h 9.huius. inde quadrilaterum ABKI,reliquæ ſemiſſi trianguli ABC.æquale erit.quod eſt propoſitum.

EADEM ratione,ſi pro CG,ſumamus $\frac{1}{3}$. vel $\frac{1}{4}$. vel quamcunque partem lateris AC, & reliqua fiant, vt ſupra auferemus per rectam ex D,ductam $\frac{1}{3}$. vel $\frac{1}{4}$. vel denique talem partem ex triangulo ABC, qualis ſumpta eſt CG,ipſius AC. vt perſpicuum eſt.

LEONARDVS Piſanus,& Nicolaus Tartalea,idem hoc problema ſoluunt,quando datum punctum eſt extra triangulum in tali loco,vt vnum latus trianguli productum,in illud incidat, cuiuſmodi eſſet punctum F,datum. Item quando eſt inter duo latera producta: Vt ſi triangulum foret AEC,punctum autem inter B,& D,exiſteret,ita vt ab eo ſolum per angulum E,duci poſſet linea ſecans latus AC: quippe cum rectæ ab eo ad angulos A, C,ductę nullum latus interſecarent. Verum quia hæc curioſa magis,quam vtilia ſunt,dedita opera à nobis omittuntur. Qui autem ea deſiderat,auctores prædictos legere poterit.

PROBL. 8. PROPOS. 13.

DATVM parallelogrammum in quotcunque partes æquales per lineas duobus lateribus oppoſitis æquidiſtantes diuidere.



SIT parallelogrammum ABCD, diuidendum verbi gratia in tres partes æquales per lineas lateribus AB,DC,æquidiſtantes. Diuiſo alterutro reliquorum duorum laterum, nimirum BC,in tres partes æquales, in quot videlicet parallelogrammum proponitur diuidẽdum, in E,& F,punctis ducantur EG, FH,ipſis AB,DC,parallelæ:factumque erit,quod iubetur;[a] quod parallelogramma AE,EH,HC, æqualia ſint,propter æquales baſes BE,EF,FC.

a 1. ſexti vel 36 pri.

COROLLARIVM.

ITAQVE ſi ex latere auferatur $\frac{1}{2}$.vel $\frac{1}{3}$.vel $\frac{3}{4}$.vel denique qualiſcunque pars, vel partes, & per extremũ eius punctum parallela lateri AB,ducatur,ablata erit ex toto parallelogrammo eadem pars,vel eędem partes. Ita vides AE,eſſe partem tertiam parallelogrammi AC,quemadmodum & BE,tertia pars eſt lateris BC,&c.

PROBL. 9. PROPOS. 14.

DATVM parallelogrammum per rectam ex puncto ſiue extra, ſiue intra ipſum, ſiue in aliquo latere dato ductam,bifariam diuidere.



SIT primo parallelogrammum ABCD, per rectam ex puncto E,exteriori ductam ſecandum bifariam. Ducta diametro BD, eaq; ſecta bifariam in F, ducatur ex E, per F,recta EH,quam dico parallelogrammũ partiri bifariam, Nam vt in ſcholio Propoſ.34.lib.1. Euclid.demonſtrauimus, recta GH. diuidens diametrum BD, in F,bifariam, ſecat parallelogrammum bifariam. Idem fiet,ſi recta IK,latera AD, BC,ſecans bifariam,diuidatur bifariam in F.& per F,extendatur recta EF, propterea quod IK, diametrum ſecat bifariam,ac proinde per F,punctum medium diametri tranſit.[a] Cum e-
a 29.prim.
b 26.pri. nim anguli IDF,FID,angulis alternis KBF,FKB,æquales ſint,& latera ID,KB,quibus adiacent,æqualia;[b] erunt tam latera DF,BF,quam IF,KF,inter ſe æqualia.

EODEM modo ex puncto interiori L;Item ex puncto G,in latere BC,recta ducta LF vel GF, parallelogrammum bifariam diuidet.

PROBL. 10. PROPOS. 15.

INTER datas duas rectas,duas medias proportionales prope verum inuenire.

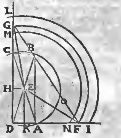
EXPOSITA Geodæſia noſtra prioribus quinq; propoſitionib⁹ huius lib. & nouẽ alijs propoſitionib⁹, ijs demõſtratis,q̃ addenda eſſe cenſuimus ad idem argumentũ ſpectantia:agendũ iam eſſet de augendis minuẽdiſque figuris in data proportione,vt in titulo huius lib.6.propoſuimus. Verum quia ſicut id in planis figuris effici nõ poteſt ſine inuentione mediæ proportionalis inter duas rectas propoſitas,quam inuentionẽ Euclid.li.6.pro

poſ.

poſ. 13. nobis tradidit: ita idem abſolui in figuris ſolidis nulla ratione poteſt, niſi inter duas rectas datas duæ mediæ reperiantur proportionales. Quocirca prius in hac propoſ. in medium afferemus, quæ antiqui Geometræ nobis hac de re ſcripta reliquerunt. Multorum enim ingenia res hęc exercuit, atq; torſit, quamuis nemo ad hanc vſq; diem, vere, ac Geometrice duas medias proportionales inter duas rectas datas inuenerit. Prętermiſſis autem modis Eratoſthenis; Platonis; Pappi Alexandrini; Spori; Menechmi tum beneficio Hyperbolæ, ac parabolæ, tum ope duarũ parabolarũ; & Architæ Tarẽtini, quamuis acutiſſimis ſubtiliſſimisq; ſolum quatuor ab Herone, Apollonio Pergæo, Philone Byſantio, Philopono, Diocle, & Nicomede traditos explicabimus, quos commodiores, facilioresq; & errori minus obnoxios iudicauimus. Qui aliorum rationes deſiderat, legere eas poterit in Commentarijs Eutocij Aſcalonitæ in librum 2. Archimedis de Sphæra, & Cylindro. Item in libello Ioannis Verneri Norimbergenſis de ſectionibus Conicis. Hinc itaque exordiamur.

MODVS HERONIS IN MECHANICIS INTRODuctionibus, & telis fabricandis: qui etiam Apollonio Pergæo adſcribitur.

SINT duæ lineæ rectæ AB, BC, inter quas oporteat duas medias proportionales inquirere. Conſtituantur ad angulum rectum B, & perficiatur rectangulum ABCD, cum diametris AC, BD, [a] quæ ſe mutuo bifariam diuident in E. Satis eſſet vnam tantum diametrũ ducere, eamq; in E, ſecare bifariam. Protractis autẽ laterib⁹ DA, DC, intelligatur circa punctũ B, moueri regula hinc inde, donec ita ſecet DA, DC, productas in F, & G, vt rectæ emiſſæ EF, EG, ęquales ſint. Vel certe, vt vult Apollonius, ex E, plures circuli deſcribãtur LI, GF, MN, donec chorda arcus vni⁹ præciſe per punctum B, incedat, qualis eſt GF. Quod ſi chorda ſupra B, tranſeat, cuiuſmodi eſt chorda LI, deſcribendus erit circul⁹ infra L; Si vero infra punctũ B, tranſeat, qualis eſt chorda MN, deſcribendus erit circulus ſupra M. Atq; hoc op⁹ toties iterandum, donec aliqua chorda, qualis eſt GF, per B, incedat. Erunt n. hac ratione EF, EG, ex centro E, ad circũferentiã, GF, inter ſe ęquales. Quib⁹ ita constructis. Dico AF, CG, eſſe medio loco ꝓportionales inter AB, BC: hoc eſt, ita eſſe AB, ad AF, vt AF, ad CG, & CG, ad CB. Diuiſis enim AD, CD, bifariam in K, & H; [b] erunt ductæ EK, EH, ad AD, CD, perpendiculares. [c] Quoniam vero rectangulum ſub DE, AF, vna cum quadrato ex AK, quadrato ex KF, æquale eſt; addito communi quadrato ex EK, erit rectangulum ſub DF, AF, vna cum quadratis ex AK, EK, [d] hoc eſt, vna cum quadrato ex EA, æquale quadratis ex KF, EK, [e] hoc eſt, quadrato ex EF, hoc eſt, quadrato ex EG, quæ ipſi EF, eſt æqualis. Eadem ratione oſtendemus, rectangulum ſub DG, GC, vna cum quadrato ex CE, id eſt, ex EA, æquale eſſe eidem quadrato ex EG. Igitur rectangulum ſub DF, AF, vna cum quadrato ex EA, æquale erit rectangulo ſub DG, GC, vna cum quadrato ex EA: demptoque communi quadrato EA, remanebit rectangulum ſub DG, GC, rectangulo ſub DF, AF, æquale. [f] Quocirca erit DG, ad DF, vt AF, ad CG: [g] Vt autem DG, ad DF, ita eſt AB, ad AF. Ergo erit vt AB, ad AF, ita AF, ad CG: hoc eſt, tres AB, AF, CG, continuè proportionales erunt. [h] Sed rurſus eſt, vt DG, ad DF, ita CG, ad CB. Igitur erit quoq; CG, ad CB, vt AB, ad AF; ideoq; vt AF, ad CG. Quare erunt quatuor AB, AF, CG, CB, continue proportionales. quod erat demonſtrandum.



a ſchol. 34. primi.
b ſchol. 26 primi.
c 6. ſecun.
d 47. pri.
e 47. pri.
f 16. ſexti.
g 4. ſexti.
h 4. ſexti.

MODVS PHILONIS BYSANTII, QVI PHILOpono quoque tribuitur.

SINT rurſus in eadem figura inter rectas AB, BC, inueniendæ duæ mediæ proportionales. Conſtituto rectangulo ABCD, vna cum diametro CA, productiſque lateribus DA, DC, vt ſupra; deſcribatur ex E, medio puncto diametri circulus CBA, ad interuallum EC. vel EA, [a] qui neceſſario per angulum rectum B, tranſibit. Deinde circa punctum B, regula hinc inde moueatur, ſecans DA, DC, protractas in F, & G, & circumferentiam in O, donec BG, OF, æquales ſint. Quod fiet, ſi per B, plurimæ lineæ occultæ ducantur. Vna enim earum habebit ſegmentum inter rectam DG, & circulum æquale ſegmento inter DF, & eundẽ circulũ. Quib⁹ peractis, dico AF, CG, medias proportionales eſſe inter AB, CB. Quoniam enim æquales ſunt GB, FO; addita communi BO, æquales quoque erunt GO, FB: ideoq; rectangulum ſub GO, GB, rectangulo ſub FB, FO, æquale erit. [b] Sed illud rectangulo ſub DG, GC, & hoc rectangulo ſub DF, AF, eſt æquale. Igitur & rectangulum ſub DG, GC, rectangulo ſub DF, AF. æquale erit. Quam ob rem, vt in præcedenti modo, oſtendemus, AB, AF, CG, CB, eſſe continue proportionales. quod eſt propoſitum.

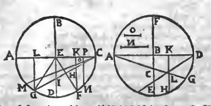
a ſchol. 31. tertij.
b 1 corol. 36. tertij.

MODVS DIOCLIS IN LIBRO DE PIRIIS PVLCHERRIMVS.

PRAEMITTIT prius Diocles Lemma tale. Deſcribatur circulus ABCD, cuius centrum E, cum diametris AC, BD, ſe ſe ad angulos rectos ſecantibus in centro E. Sumptis deinde duobus arcubus æqualibus DF, DG, iũgatur recta CG, & per F, ipſi BD parallela agatur FK, ſecãs CG, in H. Hoc facto, erũt FK, KC, mediæ ꝓportionales inter AK, KH. Ducta nãq; GL, parallela ipſi BD, iunctiſq; rectis EF, EG, [a] quoniã anguli LEG, KEF, inſiſtentes arcubus æqualib⁹ AG, CF, æquales ſunt, [b] & anguli L, K, recti, lateraq; EG, EF, æqualia; [c] erunt &

a 27. tertij.
b 27 primi
c 26. primi.

Digitized by Google



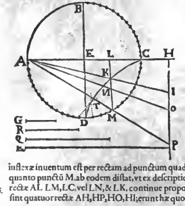
e 4. ſexti.

f ſchol. 13. ſexti.

GL, FK, & EL, EK, inter ſe æquales: ideoq; & reliquæ AL. CK; Immo addita communi LK, & totę AK, CL, æquales iuter ſe erunt.[e] Quoniam igitur eſt CL, ad LG, vt CK, ad KH: eſtq; vt CL, ad LG, ita AK, ad KF, quod hæ illis æquales ſint: erit quoq; AK, ad KF, vt CK, adK-H.[f] Vt autem AK, ad KF, ita eſt KF, ad CK. Igitur erit AK, ad KF, vt KF, ad CK, & CK ad KH, hoc eſt, KF, CK, medię proportionales erunt inter AK, KH. quod eſt propoſitum. Pari ratione ſi, ſumptis arcub' æqualib' DM, DN, iunctaq; recta CM, ducatur NP, ipſi BD, parallela, ſecans CM, in O, erunt PN, CP, inter AP, PO, mediæ proportionales, &c.

HOC lemmate præmiſſo, ſint inter rectas AB, BC, reperiendæ duæ mediæ proportinnales. Conſtituatur in altera figura ad angulum rectum B, & centro B ad interuallum maioris BA, deſcribatur circulus AFDE, ad cuius circumferentiam vſq; protendantur AB, BC, Deinde ex A, per C, ducta recta ACG, ſumatur in quadrante DE, punctũ H, in tali ſitu, vt ducta HK, ipſi EF, parallela ſecãte ipſam AG, in L; recta ex D, per L, emiſſa auferat arcum EM, arcui EH, æqualem. Nam hac ratione, per lemma præmiſſum erunt KH, DK, mediæ proportionales inter AK, KL.[g] Et quoniam eſt vt AK, ad KL, ita AB, ad BC: ſi fiat, vt AK, ad KH, ita AB, ad N; & vt KH,
g 4. ſexti.
ad DK, ita N, ad O; erunt quoq; N, O, mediæ proportionales inter AB, BC. Neque enim dubitandum eſt, eſſe & O, ad BC, vt DK, ad KL. Cum enim ſit, vt AK. ad KL, ita AB, ad BC: habeat autem AK, ad KL, proportionem triplicatam AK, ad KH. hoc eſt, AB, ad N, habebit etiam AB, ad BC, triplicatam proportionem AB ad N. Cum ergo proportio AB. ad N, ſit æqualis proportioni N, ad O; erit eidem æqualis proportio O, ad BC, vt tres æquales proportiones exiſtant inter AB, & BC. Igitur quatuor, AB, N, O, BC, continue proportionales ſunt, quemadmodum quatuor AK, KH, DK, KL. quod eſt propoſitum.

VERVM, quia difficile viſum fuit Diocli accipere in poſteriori figura punctum H, in tali ſitu, vt recta DM, ſecans AG, & parallelam HK, in L, auferat arcum Em, arcui EH, æqualẽ: deſcripſit lineam quandam inflexã ad hanc rem aptiſſimam, hac ratione. Deſcribatur circulus ABCD, cuius centrum E, cum diametris AC, BD. ſeſe ad angulos rectos in E, ſecantibus. Deinde in quadrante CD, capiantur quotcunque puncta parum inter ſe diſtantia, quæ ex D, & B, ordine in quadrantes DA, BC, transferantur. Poſt hæc applicata regula ad bina puncta
h ſchol. 27. tertij. quadrantum DC, BC, æqualiter à B, D, diſtantia, ducantur rectæ occultæ,[h] quæ ipſi BD, parallelæ erunt: Et ex



C, ad ſingula puncta quadrantis DA, rectæ occultæ emittãtur, noteuturque harum interſectiones cum prædictis parallelis occultis; nimirũ punctum T, vbi recta ex C, ad proximum punctum ipſi D, ducta interſecat proximam parallelam ipſi BD, & ſic deinceps. Nã ſi omnia hæc interſectionum puncta rite per lineam inflexam coniungantur, qualis eſt CKTD, conſtructa erit figura medijs duabus proportionalibus inueniendis aptiſſima. Sint n. inter duas F, G, duæ mediæ proportionales inueniendæ. In diametro AC, etiam producta, ſi opus eſt, ſumatur AH, maiori F, æqualis. Ducta deinde perpẽdiculari HP, abſcindatur HI, minori G, æqualis Ducta autem AI, ſecãte lineam inflexam in K, agatur per K, ipſi BD, parallela LM. Deniq; ſumpta LN, ipſi LC, æquali, ducantur per N, & M, rectæ AN, AM, ſecantes HP, in O P. Dico HP, HO, eſſe medias proportioues inter AH, HI, hoc eſt, inter F, & G. Quoniam enim punctum K, lineæ inflexæ inuentum eſt per rectam ad punctum quadrantis DA, ductam, quod tanto interuallo à puncto D, abeſt, quanto punctũ M, ab eodem diſtat, vt ex deſcriptioue lineæ inflexæ liquet; erunt ex lemmate Dioclis quatuor
i 4. ſexti. rectæ AL LM, LC, vel LN, & LK, continue proportionales.[i] Cum ergo hiſce quatuor rectis proportionales ſint quatuor rectæ AH, HP, HO, HI; erunt hæ quoque continue proportionales. quod eſt propoſitum,

MODVS NICOMEDIS IN LIBRO DE LINEIS CONCHOIDIBVS.

NICOMEDES conſtruit prius inſtrumentum quoddam, quo lineam inflexam deſcribit, quam Conchilem, vel Cõchoideos appellat. Sed nos omiſſo eo inſtrumẽto, eandem (quod ad noſtrum inſtitutum ſatis eſt) per puncta delineamus, hac ratione. Sit recta linea AB, & ad eam perpendicularis CD, in pũcto E. Sumatur deinde infra E, punctũ D, pro polo lineæ deſcribendæ, & ſupra E, aliud punctum C, vt libet. In vſu lineæ deſcriptæ conſtabit, quantum tam punctum D, quam punctum C, à puncto E, abeſſe debeat. Si igitur ex D, ducãtur plurimæ lineæ occultæ parum inter ſe diſtantes, & ex



ſingulis abſcindãtur portiones rectę EC, ęquales, initio ſemper facto à recta AB; extrema aũt harũ portionum puncta per lineam inflexam couiungantur, deſcripta erit linea conchilis. Exemplum habes in quatuor lineis DH, DG, DF, DN, in quibus ſumptæ ſunt LH, KG, SF, BN, ipſi EC, æquales, per quarum extrema puncta H, G, F, N, inflexa lineæ incedit. Et quo plures lineæ occultæ ex D, educentur, eo crebriora puncta inuenientur, per quæ tranſire debet linea inflexa.

SE

SEQVITVR ex deſcriptione huius lineæ, eam nunquam poſſe cum recta AB, conuenire, licet vtraq; in infinitum producatur: quia puncta, per quæ incedit, ſunt omnia ſupra rectam AB, terminantia nimirum ſegmenta rectarum ex D, prodeuntium ([a] quæ quidem omnes rectam AB, interſecant) ipſi EC, æqualia, a pron. 11. lib. 1.

DEMONSTRAT deinde Nicomedes duas proprietates huius lineæ inſignes. Prima eſt: Quodlibet eius punctum à puncto C, diuerſum minus diſtat à recta AB, quam punctum C: Aliorum autem punctorum, quod remotius eſt à C, minus diſtat ab eadem recta AB, quam quod minus remotum eſt. Ducta enim recta quacunque DG, demittatur perpendicularis GI. [b] Et quia KG, maior eſt quam GI; erit quoque perpendicularis EC, (ipſi KG, æqualis) maior quam perpendicularis IG, hoc eſt, punctum C, magis diſtabit à recta AB, quam punctum G. Eademque ratione magis à recta AB, diſtabit punctum C, quam quoduis aliud. Sumatur deinde aliud punctum H, remotius à C, quam punctum G, demittaturque perpendicularis HA. Dico punctum H, minus diſtare à recta AB, quã punctum G, hoc eſt, perpendicularem HA, minorẽ eſſe perpendiculari GI. Ducta namque recta DH, [c] erit angulus DKE, maior angulo DLE. [d] hoc eſt, angulus GKI, angulo HLA. Cum ergo recti I, A, æquales ſint; [e] erit reliquus G, reliquo AHL, minor. Si igitur ipſi G, fiat æqualis AHM; erunt triangula KGI, MHA, æquiangula; [f] ideoque erit, vt MH, ad HA, ita KG, ad GI. [g] Et quia LH, maior eſt, quam MH, [h] (quod angulus HML, maior ſit recto A, [i] & HLM, minor) [k] erit maior proportio LH, ad HA, quam HM, ad HA, hoc eſt, quam GK, ad GI: ac proinde cum GK, HL, æquales ſint, erit quoque maior proportio HL, ad HA, quam HL, ad GI; [l] ideoque HA, minor erit quam GI, quod eſt propoſitum.

b 19. pri. c 16. pri. d 15. pri. e 32. pri. f 4. ſexti. g 19. pri. h 16. pri. i 17. pri. k 8. quin. l 10 quin.

ALTERA proprietas eſt. Quamuis Conchilis CF, nunquam conueniat cum recta EB, tamen cum qualibet alia recta, etiam ipſi EB, propinquiſſima, conuenit. Sit enim primum recta NO, ipſi EB, parallela, ſecans EC, in O. Fiat vt EO, ad OD, ita EC, ad P. Et quoniam EO, minor eſt, quam EC: [m] erit quoque OD, minor quam P. Si igitur ex D, ad interuallum rectæ P, deſcribatur arcus circuli, ſecabit is rectam ON, in aliquo puncto, vt in N. Dico Conchilem CF, prolongatam coire cum ON, in N. Ducta enim recta DN, ſecante EB, in B, quæ ipſi P, æqualis erit; [n] quoniam eſt vt EO, ad OD, ita BN, ad ND; hoc eſt, ad ſibi æqualem P. Fuit autem etiam, vt EO, ad OD, ita EC, ad P. Igitur BN, EC, ad P, eandem proportionem habebunt: [o] ac proinde inter ſe æquales erunt, ideoque Conchilis per N, tranſibit.

m 14. quin. n 4. ſexti. o 9. quin.

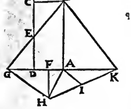
SIT deinde recta QF, non parallela ipſi EB, ſed eam ſecet in E, vergatque verſus Conchilem. Quia igitur Conchilis cum recta ON, conuenit, conueniet prius cum ipſa QF, in F, vt perſpicuum eſt.

POST hæc Nicomedes diſſoluit huiuſmodi problema. Dato quouis angulo rectilineo, & puncto extra lineas angulum datum comprehendentes: Ab illo puncto educere rectam ſecantem rectas datum continentes angulum, ita vt eius portio inter illas rectas intercepta æqualis ſit datæ rectæ. In eadem namque figura rectæ EB, EF, angulum contineant BEF, ducendaque ſit ex D, linea, ita vt eius portio inter EB, EF, æqualis ſit datæ rectæ R. Ex D, ad inferiorem lineam EB, ducatur perpendicularis DE, ſumaturque EC, datæ rectæ R, æqualis: & polo D, interuallo vero EC, Conchilis deſcribatur, quæ per ſecundam proprietatem rectam EF, ſecabit in F. Ducta ergo recta DF, ſecante EB, in S; erit SF, ipſi EC, hoc eſt, ipſi R, æqualis, vt ex deſcriptione Conchilis liquet.

HIS præmiſſis, ſint duæ rectæ AB, BC, ad angulum rectum B, coniunctæ, inter quas reperiendæ ſint duæ lineæ mediæ proportionales. Compleatur rectangulum AC, cuius duo latera AD, CD, bifariam ſecentur in F, E. Ducta autem ex B, per E, recta ſecante AD, productam in G; [p] erit DG, ipſi CB, hoc eſt, ipſi DA, æqualis; propterea quod anguli D, E, trianguli DEG, angulis C, E, trianguli CEB, æquales ſunt, & latera quoque DE, CE, quibus adiacent, æqualia. Rurſus ductam perpendicularem FH, ſecet AH, ipſi CE, æqualis quod fiet, ſi ex A, ad interuallum CE arcus delineetur, ſecans FH, in H. Deinde iuncta recta GH, ducatur ei parallela AI: atque producta DA, ex H, per problema præcedens, ducatur recta HK, vtramque AI, AK, ita ſecans, vt intercepta IK, ipſi AH, vel CE, æqualis ſit. quod fiet, ſi ex H, plurimæ rectæ ducentur occultæ, donec vnius portio intercepta æqualis ſit ipſi AH, vel CE. Poſtremo ex K, per B, recta extendatur ſecans DC, productam in L. Dico duas AK, CL, medias proportionales eſſe inter AB, BC. [q] Quoniam enim eſt LC, ad CD, vt LB, ad BK, hoc eſt, vt DA, ad AK; Et vt CD, ad CE, ita eſt GA, ad DA, quod vtraque CD, GA, ſecta ſit bifariam in E, D: erit ex proportione perturbata LC, ad CE, vt GA, ad AK, vt in hac formula apparet: hoc eſt, vt HI, ad IK. Cum ergo CE, ipſi IK, ſit æqualis per conſtructionem, [r] erit quoque LC, ipſi HI, æqualis, & tota LE, toti HK.

p 26. pri. q 2 ſexti.

LC.	GA.
CD.	DA.
CE.	AK.



[s] Deinde quia rectangulum ſub DK, KA, vna cum quadrato ex AF, æquale eſt quadrato FK; addito communi quadrato ex FH, erit rectangulum ſub DK, KA, vna cum quadratis ex AF, FH, [t] hoc eſt, vna cum quadrato ex AH, vel ex CE, æquale quadratis ex KF, FH, hoc eſt, quadrato ex HK, id eſt, ex LE, ipſi HK, æquali. [u] Sed & rectangulum ſub DL, LC, vna cum eodem quadrato ex CE, æquale quoque eſt eidem quadrato ex LE. Igitur rectangulum ſub DK, AK, vna cum quadrato ex CE, æquale erit rectãgulo ſub DL, LC, vna cum eodem quadrato ex CE: Et dempto communi quadrato CE, reliquum rectangulum ſub DL, LC, reliquo rectangulo ſub DK, AK, æquale erit. [x] Igitur erit DL, ad DK, [y] hoc eſt, AB, ad AK, vt AK, ad LC. [z] Vt autem AB, ad AK, ita eſt quoque LC, ad CB. Igitur erit AB, ad AK, vt AK, ad LC, & vt LC, ad CB: ac proinde AK, LC, mediæ proportionales erunt inter datas AB, BC. quod eſt propoſitum.

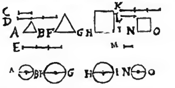
r 14. quin. s 6. ſecun. t 47. pri. u 6. ſecun. x 16. ſexti. y 4. ſexti. z 4. ſexti.

QVOD ſi datæ duæ rectæ ſint nimis longæ, accipi poterunt earum ſemiſſes, vel tertiæ partes &c. atque inter eas duæ mediæ inquirendæ. Nam ſi inuentæ duplicentur, vel triplicentur, &c. habebuntur duæ mediæ inter datas duas. Quod etiam in alijs modis intelligendum eſt.

PROBL. 11. PROPOS. 16.

DATAM figuram planam, vel circulum augere, vel minuere in data proportione.

HOC problema, quod ad figuras planas rectilineas attinet, explicauimus propoſ. 15. ſcholij propoſ 33. lib. 6. Euclid. Nunc idem ad circulos quoque extendemus. Sit ergo rectilineum, cuius latus A B, vel circulus, cuius diameter A B, oporteatque conſtituere maius rectilineum, vel circulum maiorem in proportione, C, ad D, nimirum ſubtripla. Tribus lineis C, D, A B, inueniatur quarta proportionalis E, atque inter A B, & E, reperiatur media proportionalis F G, & ſupra F G, figura conſtruatur ſimilis datæ figuræ A B, ſimiliterque poſita. Item circulus deſcribatur circa diametrum F G. Dico tam rectilineum A B, eſſe tertiam partem rectilinei F G, quam circulum A B, circuli F G, nimirum eandem habere proportionem A B, ad F G, quam habet C, ad D. Quoniam enim tres rectæ A B, F G, & E, continue proportionales ſunt, [a] erit figura A B, ad figuram F G, vt A B, ad E, hoc eſt, vt C,



a coroll. 19. vel 20. ſexti.
b 2. duode.

ad D. [b] Quia vero eſt, vt quadratum ex A B, ad quadratum ex F G, ita circulus A B, ad circulum F G; eſtque quadratum A B, ad quadratum F G, vt A B, ad E; erit quoque circulus A B, ad circulum F G, vt A B, ad E, vel vt C, ad D.

SIT deinde figura, vel circulus HI, oporteatque conſtruere minorem figuram, vel circulum in proportione K, ad L, nimirum tripla. Tribus rectis K, L, HI, inueniatur quarta proportionalis M: atque inter H I, & & M, media proportionalis inueniatur N O, ſupra quam conſtruatur figura ſimilis ſimiliterque poſita figuræ HI: Item circulus deſcribatur circa diametrum N O. Dico tam figuram HI, ad figuram NO, quam circulum HI, ad circulum N O, habere proportionem triplam, eandem videlicet, quam habet K, ad L. Quoniam enim tres rectæ H I, N O. & M, continue ſunt proportionales; [c] erit figura H I, ad figuram NO, vt recta H I, ad M, hoc eſt, vt K, ad L. [d] Et quia eſt, vt quadratum H I, ad quadratum N O, ita circulus HI, ad circulum N O, eſtque quadratum HI, ad quadratum NO, vt recta HI, ad M; erit quoque circulus HI, ad circulum N O, vt recta HI, ad M, vel vt K, ad L.

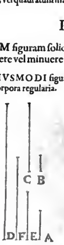
c coroll. 19. vel 20. ſexti.
d 2. duode.

EX his conſtat, qua ratione, dato foramine rotundo, vel etiam quadrato alicuius fontis, aliud foramen rotundum, vel quadratum maius, vel minus in quacunque proportione conſtruendum ſit.

PROBL. 12. PROPOS. 17.

DATAM figuram ſolidam qualemcunque ex ijs, de quibus Eucl. in lib. Stereometriæ agit, augere vel minuere in proportione data.

HVIVSMODI figuræ ſolidæ ſunt parallelepipedum, Pyramis, Priſma, Sphæra, Conus, Cylindrus, & quinque corpora regularia.



SIT ergo figura ſolida, cuius latus A, vel ſphæra, cuius diameter augenda primum in proportione B, ad C. Tribus rectis B, C, A, inueniatur quarta proportionalis D: atque inter A & D, reperiantur duæ mediæ proportionales E, F. Dico ſolidum lateris A, ad ſolidum ſupra latus E, nimirum ſupra mediam proportionalem, quæ propinquior eſt lateri dato A, conſtructũ ſimile, ſimiliterq; poſitum ſolido ſupra latus A, conſtituto, habere proportioneᷓ quam B, habet ad C. Item ſphærã datam diametri A, ad ſphęram diametri E, eſſe, vt B, ad C. Quoniam n. figura ſolida lateris A, ad figuram ſolidã lateris E, ſimileᷓ, ſimiliterq; poſitã habet proportionem triplicatam lateris A, ad latus E, vt lib 11. & 12. Eucl. demonſtratũ eſt: Similiter Conus, & Cylindrus, cuius baſis diameter A, ad Conum & Cylindrum ſimilem, cuius diameter E: Nec non ſphæra diametri A, ad ſphæram diametri E; Eſt autem, ex defin. 10. lib. 5. Euclid. proportio quoque A, ad D, triplicata proportionis A, ad E: Erit ſolidum A, ad ſolidum E, vt A, ad D, hoc eſt, vt B, ad C. quod eſt propoſitum.

SIT deinde ſolidum lateris, vel diametri D, minuendũ in proportione data C, ad B. Tribus C, B, D, inueniatur quarta proportionalis A; atque inter D, & A, reperiantur duæ mediæ proportionales F, E. Dico ſolidum lateris, vel diametri D, ad ſolidum ſimile, ſimiliterque deſcriptum ſupra F, nimirum ſupra mediam proportionalem, quæ lateri dato D, propinquior eſt, proportionem habere, quam C, ad B. Quoniam enim ſolidum D, ad ſimile ſimiliterque deſcriptum ſolidum F, proportionem habet triplicatam lateris D, ad latus F: qualem etiam habet ex defin. 10. lib. 5. Euclid. recta D, ad rectam A: erit ſolidum D, ad ſolidum F, vt D, ad A, id eſt, vt C, ad B. quod eſt propoſitum.

CONSTAT ex his, qua ratione Cubus non ſolum duplicandus ſit (quod veteres inquirebant) ſed etiam augendus minuendusue in quacunque proportione: Item quo pacto pylæ bombardarum maiores, aut minores fieri debeant ſecundum proportionem datam.

SCHO-

SCHOLIVM.

FIGVRAS ſolidas ſimiliterque poſitas habere proportionem triplicatam homologorum laterum, demonſtratum eſt de parallelepipedis quidem lib. 11. Euclid. propoſ. 33. De Pyramidibus vero lib. 12. propoſ. 8. eiuſq; coroll. & de Priſmatis, in eiuſdem ſcholio. De ſphæra autem lib. eodem 12. propoſ. 18. De Conis deinde & Cylindris eodem lib. 12. propoſ. 12. ſi pro lateribus homologis ſumantur diametri ſphærarum, & diametri baſiũ Conorum, & Cylindorum. Ac tandem de quinque corporibus regularibus in coroll. propoſ. 17. lib. 12. quippe cum omnia hæc corpora in ſphæris deſcribi poſſint.

QVAMVIS autem problema hoc de ſupradictis corporib⁹ duntaxat propoſuerimus, idem tamen etiam locum habet in alijs cuiuſque generis corporibus ſimilibus, ſimiliterque poſitis, vt perſpicuum eſt; propterea quod diuidi poſſunt in pyramides ſimiles, æquales numero; [a] quæ quidem proportionem habent laterum homologorum triplicatam. [b] Cum ergo ſit, vt vna pyramis ad vnam pyramidem, ita omnes ad omnes, id eſt, ita ſolidum ad ſolidum; ſitq; eadem latera homologa ſolidorum, quæ pyramidum ſimilium, conſtat propoſitum.

a 8. duod. eiuſq; corol.
b 12. quin.

PROBL. 13. PROPOS. 18.

INTER duos numeros datos tum vnum, tum duos medios proportionales reperire.

NON raro figura ſiue plana, ſiue ſolida augenda, vel minuenda eſt per numeros, quod quidem ſine inuẽtione vnius medij proportionalis, vel duorũ mediorũ inter datos duos numeros perfici nõ poteſt: idcirco artem præſcribemus, qua huiuſmodi medias inuenire poſſimus. Propoſitis igitur primum duobus numeris quibuſcunque 9. & 25. inter quos reperiendus ſit vnus medius proportionalis; ſi multiplicentur inter ſe, & producti numeri 225 radix quadrata eruatur 15. vt in Arithmetica practica cap. 26. docuimus: [a] erit radix hæc quadrata medio loco proportionalis inter datos numeros, vt hic 9. 15. 25. quippe cum quadratum medij numeri ęquale ſit rectangulo ſub extremis comprehenſo. Sic inter 5. & 13. medius ꝓportionalis erit radix quadrata numeri 65. qui ex multiplicatione datorum numerorum gignitur, quæ radix paulo maior eſt, quã $8\frac{1}{17}$. & paulo minor, quã $8\frac{1}{16}$.

a 17. ſexti. vel 20 ſep.

SINT deinde duo numeri 2. & 54. inter quos inueniendi ſint duo medij proportionales. Multiplicetur quadratus minoris in maiorem. Producti namque numeri 216. radix cubica 6. erit primus medius iuxta minorẽ collocandus. Et ſi maioris quadratus ducatur in minorem, erit producti numeri 5832. radix cubica 18. alter medius iuxta maiorẽ ſtatuẽdus, vt hic 2. 6. 18. 54. Ratio huius rei eſt, quod datis quatuor lineis continuè proportionalibus, parallelepipedum ſub quadrato alterutrius extremarum, & ſub altera extrema comprehenſum, æquale eſt cubo mediæ proportionalis, quæ priori extremo aſſumpto propinquior eſt, vt in ſequenti Lemmate demonſtrabimus. Quoniam vero, vt in ſcholio propoſ. 19. lib. 8. Euclid. oſtendimus, propoſitis hiſce tribus numeris 2. 2. 54. idem procreatur numerus, ſiue prius ducantur 2. in 2, deinde productus 4. in 54. ſiue prius 2. in 54. deinde productus 108. in 2. Idem datis hiſce tribus numeris, 54. 54. 2. idem numerus gignitur, ſiue prius ducantur 54. in 54 deinde productus 2916. in 2. ſiue prius 54. in 2. deinde productus 108. in 54 manifeſto colligitur, ſi minor 2. ducatur in maiorem 54. & productus 108. in minorem 2. produci quoque cubum medij proportionalis iuxta minorem conſtituendi: Item ſi maior 54. ducatur in minorem 2. & product⁹ 108. in maiorem 54. procreari cubum medij proportionalis iuxta maiorem ſcribendi. Sic inter 4. & 100. erunt duo medij proportionales, Radix cubica numeri 1600. & Radix cubica numeri 40000. Cæterum inuẽto altero mediorũ numerorũ, reperietur alter etiam, ſi inuentus per extremum remotiorem multiplicetur & producti numeri radix quadrata capiatur. Vt in dato exemplo 2. 6. 18. 54. ſi medius inuentus 6. ducatur in 54. erit producti numeri 324. radix quadrata 18. alter medius: Item inuentus medius 18. ſi multiplicetur per 2. erit producti numeri 36. radix quadrata 6. alter medius: propterea quod tam 2. 6. 18. quam 6. 18. 54. ſunt tres continuè proportionales.

LEMMA.

SI ſint quatuor lineæ continuè proportionales: parallelepipedum ſub quadrato alterutrius extremarum, & altera extrema comprehenſum, æquale eſt cubo mediæ proportionalis, quæ priori extremæ aſſumptæ propinquior eſt.

REPETATVR figura propoſ. 17. in qua lineæ quatuor continuè ꝓportionales ſunt A, E, F, D. Dico parallelepipedum ſub quadrato extremæ A, & ſub extrema altera D, contentũ, cubo rectæ E æquale eſſe. [a] Quoniam n. quadratum rectæ A, ad quadratum rectæ E, proportionem habet, quam A, ad F, id eſt, quam E, ad D, reciprocabuntur baſes cum altitudinibus, cum baſis parallelepipedi ſit quadratũ rectæ A, & eiuſdẽ altitudo recta D: cubi autem baſis, quadratum rectæ E, & altitudo ipſamet recta E. [b] Igitur æqualia erunt parallelepipedum, & cubus. Eadem ratione erit parallelepipedum ſub quadrato extremę D, & ſub altera extrema A, contentum ęquale cubo rectæ F. [c] Nam cum ſit, vt quadratũ rectæ D, ad quadratum rectæ F, id eſt, vt baſis dicti parallelepipedi ad baſem dicti cubi, ita D, ad E, hoc eſt, ita F, ad A, hoc eſt, ita altitudo cubi, ad altitudinem parallelepipedi; reciprocabũtur quoq; baſes cum altitudinib⁹: [d] ideoq; æqualia erunt parallelepipedum, & cubus. quod eſt ꝓpoſitũ.

a corol. 20. ſexti.
b 34. vndecimi.
c corol. 20. ſexti.
d 34. vndecimi.

Quia vero in noſtra Aritbmetica practica ſolum radicis quadratæ extractionem explicauimus, operæ me pretium facturum puto, radicis cubicæ extractionem hoc loco, quamuis fortaſſe alieno, inſerere: quandoquidẽ ea neceſſaria omnino eſt, vt problema hoc 13. ad opus poſſit deduci. Hoc autem efficiam, ſi præſcribam artem quandam generalem; qua cuiuſcunq; generis radicem extrahere poſſimus, ex libro eximij cuiuſdam Arithmetici Germani depromptam ferme totam: quod quidem ſtudioſo Lectori non iniucundum, aut ingratum fore confido.

PROBL. 14. PROPOS. 19.

RADICEM cuiuſlibet generis extrahere.

Extractio radicis quid.

EXTRACTIO radicis eſt inuentio numeri ex propoſito numero, qui multiplicatione aliqua in ſe numerum propoſitum producat. Vt extractio quadratæ radicis eſt inuentio numeri ex numero quadrato, qui quadrate multiplicatus ipſum producat: Et extractio radicis cubicæ, eſt inuentio numeri, qui in ſe ductus cubice producat cubum propoſitum, &c. Quid autem ſit multiplicare numerum quadrate, aut cubice, aut alio modo, mox explicabo.

Infinitæ ſpecies radicum.

QVEMADMODVM igitur infinitæ ſunt ſpecies multiplicationum numerorum in ſe, vt ſtatim dicam, ex quibus oriuntur numeri quadrati & ſolidi, vt Cubi, Zenſizenſi, Surdeſolidi, &c. qui à Iunioribus nonnullis in Algebra explicari ſolent: ſic etiam infinitæ ſunt radicum ſpecies iuxta varias numerorum appellationes, qui conſurgunt ex varia radicum multiplicatione. Quæ omnia pulchre nobis repræſentat naturalis numerorum progreſſio, inſeruiens progreſſionibus Geometricis ab vnitate incipientibus: vt hic.

0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10. &c.
1.	2.	4.	8.	16.	32.	64.	128.	256.	512.	1024. &c.
	Radix.	Quadratus.	Cubus.	Zenſizenſus.	Surdeſolidus.	Zenſicubus	B, Surdeſolidus.	Zenſizenzenſus.	Cubicubus.	Zenſurdeſolidus.

PRIMVM numeri ſuperioris progreſſionis ſignificant ſpecies multiplicationum. Vt 2. ſupra quadratum ſignificat, multiplicationem quadratam fieri, dum radix bis ponitur, & ſic multiplicatur, vt 2.2. facit 4. Sic 3. ſignificat, multiplicationem cubicam fieri, dum radix ter ponitur, atque ita multiplicatur, vt 2.2.2. facit 8. Pari ratione, 4. oſtendit multiplicationem Zenſizenſicam: Et 5. ſurdeſolidam, &c.

DEINDE iidem numeri ſignificant radicum ſpecies. Vt 2. ſignificat radicem quadratam producere quadratum per multiplicationem quadratam: Et 3. denotat, radicem Cubicam procreare Cubum per multiplicationem cubicam: Et ſic deinceps.

Quomodo figuræ per puncta ſignentur.

Pro quadrata.
6 8 7 1 9 4 7 6 7 3 6
· · · · · ·

Pro cubica.
6 8 7 1 9 4 7 6 7 3 6
· · · ·

Pro Zenſizenſica.
6 8 7 1 9 4 7 6 7 3 6
· · ·

Pro ſurdeſolida.
6 8 7 1 9 4 7 6 7 3 6
· · ·

IN extractionibus igitur radicum obſeruanda eſt ſignatio figurarum per puncta in numero, ex quo radix aliqua extrahenda eſt, hoc modo.

IN extractione radicis quadratæ ſignantur omnes figuræ in locis imparibus, incipiendo à dextris: ita vt alternatim ſemper vna figura omittatur, quæ non ſignetur.

IN extractione cubica omittuntur ſemper duæ figuræ. In Zenſizenſica tres. In ſurdeſolida quatuor. Et ſic deinceps in infinitum. Vt in appoſitis exemplis vides

RESPONDENT autem hæ ſignationes medijs proportionalibus. Vt quoniam inter duos quadratos cadit vnus medius, ideo in extractione radicis quadratæ omittitur ſemper vna figura: Inter duos vero Cubos cadunt duo medij, idcirco omittuntur ſemper duæ figuræ, & ſic de cæteris.

PRO qualibet autem ſpecie radicis extrahendæ inſeruiunt quidam numeri peculiares: qui per ſequentem tabulam inueniuntur, quæ hoc modo conſtruitur. Prima columna continet ſeriem naturalem numerorum. Ex hac columna naſcitur ſecunda: tertia ex ſecunda: & quarta ex tertia, hoc modo. Relictis duabus cellulis primæ co-

1								
2								
3	3							
4	6							
5	10	10						
6	15	20						
7	21	35	35					
8	28	56	70					
9	36	84	126	126				
10	45	120	210	252				
11	55	165	330	462	462			
12	66	220	495	792	924			
13	78	286	715	1287	1716	1716		
14	91	364	1001	2002	3003	3432		
15	105	455	1365	3003	5005	6435	6435	
16	120	560	1820	4368	8008	11440	12870	
17	136	680	2380	6188	12376	16448	24310	24310

Cõſtructio tabulæ mirificæ.

lumnæ, repetitur numerus tertiæ cellulæ in ſecunda columna. Deinde ex additione duorũ numerorum, id eſt, ex ter-

ex tertio primæ columnæ, & primo ſecundæ columnæ, fit ſecundus numerus ſecundæ columnæ. Eodem modo ex ſecundo numero ſecundæ columnæ, & ex eius collaterali conficitur tertius ſecundæ columnæ: Atque ex tertio numero ſecundæ columnæ, & ex eius collaterali fit quartus eiuſdem ſecundæ columnæ, & ſic deinceps. Continentur autem in ſecunda columna omnes numeri triangulares. Non aliter tertia columna ex ſecunda oritur, & quarta ex tertia, &c. Semper enim in qualibet columna relinquuntur duæ primæ cellulæ, & numerus tertiæ cellulæ repetitur pro primo numero ſequentis columnæ: atque ex additione eius numeri cum collaterali præcedentis columnæ conflatur ſecundus numerus, &c.

HAC extructa tabula, deſumuntur numeri peculiares ex ordinibus tranſuerſalibus hoc ordine. Numeri cuiuslibet ordinis tranſuerſalis ordine ſcribuntur, iidemque ordine retrogrado repetuntur, vltimo ſemper excepto, & penultimo etiam tunc ſolum, quando vltimo æqualis eſt. Vt in ſecundo ordine ſumitur tantum numerus 2. quia cum ſit vltimus, non repetitur. In tertio ſumuntur quoque hi duo tantum 3. 3. quia penultimus non repetitur, cum ab vltimo non differat. In quarto autem ſumendi ſunt hi tres. 4. 6. 4. In nono hi octo 9. 36. 84. 126. 126. 84. 36. 9. Et in decimo hi nouem 10. 45. 120. 210. 252. 210. 120. 45. 10. &c. Vbi vides, ſemper tot numeros aſſumi, quot ſunt vnitates in primo numero tranſuerſali, minus vno. Vt in ordine ſeptimodecimo aſſumendi erunt hi ſexdecim 17. 136. 680. 2380. 6188. 12376. 19448. 24310. 24310. 19448. 12376. 6188. 2380. 680. 136. 17. & ſic de cæteris.

Quo pacto ex ſuperiori tabula deſumantur numeri pro radicum ſingulis ſpeciebus.

CVILIBET deinde numero præponendæ ſunt cifræ, quot numeri ab eo incluſiue numerantur vſque ad vltimum aſſumptum. Vt numero 2. ſecundi ordinis præponenda eſt vna cifra hoc modo, 20. Sed duo tertij ordinis habebunt has cifras 300. 30. Sic in nono ordine, vbi aſſumuntur octo numeri, primus habebit octo cifras, ſecundus ſeptem, tertius ſex, & ſic ſemper minuendo vnam. Cuius autem radicis extractioni inſeruiant prædicti numeri in quolibet ordine tranſuerſali accepti, pulchre indicat primus numerus ordinis tranſuerſalis, Vt quia in ſuperiori progreſſione numerus 3. notat quadratum, & 3. cubum, & 4. Zenſizenſum, &c. ideo numerus 2. ſecundi ordinis cum ſua cifra, hoc modo. 20. inſeruit radici quadratæ: Et duo numeri ex tertio ordine aſſumpti cum ſuis cifris, hoc modo 300. 30. radici cubicæ: Et tres quarti ordinis, hoc modo 4000. 600. 40. radici Zenſizenſicæ: & quatuor quinti ordinis, hoc modo, 50000. 10000. 1000. 50. radici ſurdeſolidæ, &c.

IAM vero vt propius ad extractionem radicum accedamus, ſciendum eſt, radicem cuiuslibet numeri habere tot figuras, quot puncta ſub ipſo ſignata ſunt, ſecundum doctrinam ſuperiorem. Item ad punctum vltimum verſus ſiniſtram pertinere ipſam figuram ſupra punctum poſitam, cum omnibus alijs, quæ ipſam verſus ſiniſtram præcedunt. Ex quo puncto ſubtrahatur numerus, vt mox dicemus, ſpectabit ad penultimum punctum figura ſupra ipſum punctum cum reliquis ad ſiniſtram, & ſic de cæteris.

Quot figuras quælibet radix habeat.

VT autem rite incipiat extractio cuiuslibet radicis, conſtruenda erit tabella quadratorum, cuborum, ſurdeſolidorum, B, ſurdeſolidorum, & aliorum numerorum, qui ex nouem figuris Arithmeticis producuntur, cum ſuis radicibus. Vt hic vides.

Radices.	Quadrati.	Radices.	Cubi.	Radices.	Surdeſolidi.	Radices.	B ſurdeſolidi.
1	1	1	1	1	1	1	1
2	4	2	8	2	32	2	128
3	9	3	27	3	243	3	2187
4	16	4	64	4	1024	4	16384
5	25	5	125	5	3125	5	78125
6	36	6	216	6	7776	6	279936
7	49	7	343	7	16807	7	823543
8	64	8	512	8	32768	8	2097152
9	81	9	729	9	59049	9	4782969

CVR autem non appoſuerim tabellas Zenſizenſorum, & Zenſicuborum cauſa eſt, quod eiuſmodi numerorum radices non egent nouis præceptis, vt poſtea dicetur. Sequuntur ergo iam extractionum exempla aliquot.

EXTRACTIO RADICIS QVADRATÆ.

Quadratæ radicis extractio.

SIT numerus propoſitus 6765201. ex quo erui debet radix quadrata.

PRIMVM ab vltimo puncto, id eſt, à figura 6. (Hoc enim punctum vnam tantum habet figuram, cum eam nulla alia præcedat) ſubtrahitur maximus quadratus, qui ſubtrahi poteſt, nimirum 4. & in Quotiente ad marginem ponitur eius radix 2. In reſiduo autem manent 2. pro ſequenti puncto, quod erit 276. atque ita abſolutum eſt vltimum punctum, quod eſt in operatione primum.

Radix 2601.

DEINDE paro diuiſorem ex figura 2. inuenta in Quotiente multiplicata per 20. nimirum per numerum radici quadratæ inſeruientem: quem inuenio 40. Per hunc diuido punctum ſequens 276. & pro Quotiente reperio 6. Pono ergo primum Quotientem 2. ad ſiniſtram, numerum peculiarem 20. in medio, & nouum Quotientem 6. ad dextram, ſub quo ſcribo eius quadratum 36. vt hic vides.

2 — 200 — 6.
36.

POST

POST hæc multiplico tres numeros 2.20.6. inter ſe, & producto 240. addo quadratum 36. & ſummam 276. ex puncto 276. detraho, nihilque relinquitur, atque ita abſolutum eſt ſequens punctum: aliudque ſequens punctum eſt 52.

PARO iam diuiſorem ex toto Quotiente inuento 26. ducto in 20 id eſt, in numerum peculiarem quadratæ radicis, quem inuenio 520. Et quia per hunc diuidi non poteſt punctum 52. pono in Quotiente 0. neque opus eſt multiplicare, vt repeiatur numerus ſubtrahendus, quia nihil ſubtrahitur, cum 0. multiplicans producat 0. Et ſic fit in omnibus alijs extractionibus, quando diuiſor inuetus in puncto propoſito ne ſemel quidem continetur: atque ita abſolutum eſt punctum 52. punctumque inſequens eſt 5201.

PARO iterum diuiſorem ex toto Quotiente inuento 260. ducto in numerum peculiarem 20. quem reperio 5200. qui ſemel in puncto 5201. continetur. Pono ergo totum Quotientem prius inuentum 260. ad ſiniſtram, & numerum peculiarem 20. in medio, & Quotientem 1. nunc inuentum ad dexteram, eiuſque quadratum 1. ſub illo, vt in exemplo patet.

260 - 201
1

MVLTIPLICATIO trium ſuperiorum numerorum facit 5200. addo quadratum 1. figuræ inuentæ 1. fit numerus 5201. qui ex puncto 5201. detractus nil relinquit. Eſt ergo abſoluta extractio, radixque inuenta eſt 2601. quæ quadrate, id eſt, in ſe multiplicata producit propoſitum numerum 675201.

ATQVE hæc eſt probatio, vel examen cuiuſuis extractionis, vt videlicet radix inuenta in ſe multiplicetur vel quadrate, vel cubice, vel ſurdeſolide, &c. pro qualitate radicis. Si enim in extractione nihil fuit relictum, veluti in noſtro exemplo, neceſſe eſt, numerum productum æqualem eſſe propoſito numero, ex quo facta eſt extractio: Si autem in extractione aliquid fuit relictum, illud additum producto numero conficiet numerum propoſitum. Inſtitui quoque poteſt examen per 9. vel 7. vt in Diuiſione. Nam ſi ex inuenta radice abiiciantur 9. vel 7. quoties fieri poteſt, & reſiduum collocetur tum in ſiniſtra parte crucis, tum in dextra, quod Quotiens, vel radix inuenta ſit etiam inſtar Diuiſoris. Hoc enim reſiduo in ſe multiplicato quadrate, vel cubice, &c. & ex producto abiectis 9. vel 7. neceſſe eſt, reſiduum hoc æquale eſt reſiduo numeri propoſiti, ſi abiiciantur ex eo omnia 9. vel 7. & nihil in extractione relictum ſit. Nam alioquin ex reſiduo extractionis & ex producto radicis inuentæ in ſe multiplicatæ abiicienda erunt omnia 9. vel 7. Hoc enim reſiduum æquale eſſe debet reſiduo numeri propoſiti, ſi omnia 9. vel 7. abiiciantur. In noſtro exemplo, ſi probatio inſtituatur per 9 reſiduum ſemper eſt 0. Si vero fiat per 7. ſtabit exemplum examinis, vt hic apparet.

0
0 X 0
0

2
4 X 4
2

EXTRACTIO RADICIS CVBICÆ.

SIT ex numero 23948̇31̇90̇. extrahenda radix cubica.

Cubica radicis extractio. radix 621.

PRIMVM ex puncto 239 ſubtraho cubum 216. qui eſt maximus in eo contentus, cuius radicem 6. ſcribo in Quotiente ad marginem. Et quia relinquitur numerus 23. erit ſequens punctum 23483.

DEINDE paro Diuiſorem hoc modo. Supra radicem inuentam 6. pono eius quadratum 36. Et ad dextram colloco duos numeros peculiares radicis cubicæ, nimirum 300. & 30. vt hic vides. Multiplico ſuperiores duos numeros 36. & 300. inter ſe, & producto 10800. addo productum 180. ex multiplicatione numerorum inferiorum 6. & 30. inter ſe. Nam ſumma 10980. erit Diuiſor. Satis etiam eſſet productus ex duobus ſuperioribus inter ſe multiplicatis, nimirũ 10800. pro Diuiſore, quod in alijs extractionibus intelligendũ quoq; eſt. Diuido ergo punctum meum 23843 per diuiſorem inuentum 10980. & Quotientem 2. ſcribo poſt figuram 6. prius inuentam. Pingo poſt hæc figuram huiuſmodi. Ad dextram numerorum 36. & 300. collocato inuentam figuram 2. & infra eam eius quadratũ 4. & ſub hoc cubum eiuſdem 8. Nam ſi tam ſuperiores tres numeri 36. 300. & 2. quã inferiores tres 6. 30. & 4. inter ſe multiplicentur, & productis 21600. & 720. addatur cubus 8. fiet numerus 22328. quem ſi ex meo puncto 23483. ſubtraham, remanent 1155. atque adeo punctum ſequens erit 1155190.

36 — 300
6 — 30

36 — 300. — 2.
6 — 30. — 4.
8.

PARO iam alium diuiſorem hoc pacto. Supra 62. radicem hactenus inuentam ſcribo eius quadratum 3844. & ad dextram eoſdem numeros peculiares 300. & 30. Multiplicatio duorum ſuperiorum inter ſe facit diuiſorem 1153200. per quem ſi diuidatur punctum 1155190. fit Quotiens 1. poſt alias duas figuras 62. ſcribendus. Pingo iam figuram talem Ad dextram numerorum 3844. & 300. pono figuram 1. proxime inuentam, & infra eam eius quadratum 1. & ſub hoc eiuſdem cubum 1. Nam ſi tam tres ſuperiores numeri 3844. 300. & 1. quam inferiores tres 62. 30. & 1. inter ſe multiplicentur, & productis 1153200. & 1860. addatur cubus 1. fiet numerus 1155061. quem ſi ex meo puncto 1155190. demam, remanent 129. Eſt ergo abſoluta extractio, radixque inuenta eſt 621. quæ in ſe cubice multiplicata procreat numerum 239483061. cui ſi adiiciatur reſiduum 129. conflabitur numerus propoſitus 239483190.

3844 — 300.
62 — 30.

3844 — 300 — 1.
62 — 30 — 1.
1.

EXTRACTIO RADICIS SVRDESOLIDÆ.

SIT numerus 1039589621. cuius radix ſurdeſolida quæritur.

PRIMVM à puncto 10395 ſubtraho maximum ſurdeſolidum 7776 in eo incluſum, cuius radicem 6. ſcribo in margine pro Quotiente: & quia numerus relinquitur 2619. ideo punctum ſequens erit 261989621. *Surdeſolida radicis extractio. radix 63.*

DEINDE paro diuiſorem hoc modo. Supra radicem inuentam 6. ſcribo eius quadratum 36. & ſupra hunc eiuſdem cubum 216. & ſupra hunc eiuſdem Zenſizenſum, vel quadrati quadratum 1296. ita vt conſtituatur progreſſio Geometrica aſcendens à radice 6. denominata tot terminorum, quot numeri peculiares requiruntur in extractione ſurdeſolida. Et ad dextram colloco quatuor numeros peculiares requiſitos, vt exemplũ monſtrat. Multiplico duos ſuperiores numeros (quod ſatis eſt) 1296. & 50000. inter ſe. Productus namque numerus 64800000. erit diuiſor, per quem ſi diuidatur punctum relictum 261989621. poſſet eſſe Quotiens vel 4. vel 3. vel 2. Accipio autem 3. quia figura 2. eſt nimis parua, & 4. nimis magna, vt ex ſequentibus patebit; quem Quotientem 3. in margine ſcribo poſt inuentam figuram 6. Pingo ergo talem figuram. Ad dextram numerorum 1296. & 50000. pono figuram Quotientis acceptam 3. & infra eam eius quadratum 9. & ſub hoc eiuſdem cubum 27. & ſub hoc eiuſdem Zenſizenſum, vel quadrati quadratum 81. & ſub hoc eiuſdem ſurdeſolidum 243. ita vt ad dextram conſtituatur progreſſio Geometrica deſcendens denominata à figura Quotientis 3. inuenta tot terminorum vno amplius, quot numeri peculiares requiruntur: adeo vt vltimus terminus ſit numerus ſurdeſolidus figuræ inuentæ, quemadmodum in cubica extractione fuit cubus, & in quadrata quadratus. Nam ſi terni numeri tranſuerſales inter ſe multiplicẽtur, & ad productos 194400000. 19440000. 972000. 24300. adiiciatur ſurdeſolidus 243. efficietur numerus 214836543. qui ex puncto 261989621. detractus relinquit 47153078. Eſt ergo radix ſurdeſolida inuenta 63. quæ in ſe ſurdeſolide multiplicata, ſi nimirum quinquies ponatur hoc modo, 63. 63. 63. 63. 63. producit numerum 992436543. cui ſi addatur reſiduum 47153078. conflabitur propoſitus numerus 1039589621.

1296—50000	
216—10000	
36— 1000	
6— 50	

1296—50000—	3.
216—10000—	9.
36— 1000—	27.
6— 50—	81.
	243.

QVOD ſi ſupereſſet aliud punctum, conſtituenda eſſet progreſſio aſcendens denominata à tota radice hactenus inuenta 63. quatuor terminorum, vt hic vides. Nam productus 78764805. ex ſuperioribus duobus numeris inter ſe multiplicatis eſſet nouus diuiſor. Deinde ex noua figura inuenta eſſet conſtituenda progreſſio deſcendens vſque ad ſurdeſolidum illius figuræ, quemadmodum ſupra cum figura 3. factum eſt.

15752961—50000
250047—10000
3969— 1000
63— 50

ATQVE in hunc modum radicem cuiuſcunque ſpeciei extrahes, ſi diligenter inquires numeros propoſitæ radici inſeruientes, vt ſupra docuimus. Quæ ſane ratio mihi ſemper præclara eſt viſa. Nam etiamſi operatio videatur aliquanto longior eſſe, quam par ſit, difficilis tamen non eſt, quippe cum ignorari in ea non poſſit, quid faciendum ſit: cum tamen in extractionibus ab alijs Arithmeticis traditis (quadrata excepta) tanta ſit operationis difficultas, vt infinita fere memoria opus ſit ad retinendum ea, quæ ad extrahendas radices adhibenda ſunt, vt in radice cubica extrahenda per aliorum regulam, ſi adhibeatur, patebit: cum tamen cubica extractio ſit longe facilior extractione ſurdeſolida, & alijs inſequentibus, quæ fere inextricabiles ſunt.

SOLA vna difficultas tam in noſtra, quam in aliorum extractione exiſtit, quod nimirum dubium interdum ſit, num figuram nimis paruam in Quotiente alicuius puncti acceperimus. Vt in ſecundo puncto extractionis ſurdeſolidæ potuit eſſe Quotiens vel 4. vel 3. vel 2. Nos autem accepimus 3. Si ergo certi eſſe velimus, an accipi potuiſſet figura 4. quandoquidem ſuperfuit numerus 47153078. valde magnus, faciendum periculum erit cum figura 4. conſtituendo ſcilicet progreſſionem deſcendentem Geometricam à 4. denominatam. Et quia quatuor numeri producti tranſuerſales cum ſurdeſolido 1024. faciunt numerum 297141824. qui ex puncto ſecundo 261989621. ſubtrahi nequit; argumento eſt, figuram 4. nimis magnam eſſe, ac proinde figuram 2. nimis paruam; quandoquidem cum figura 3. tales numeri procreati ſunt, qui ex propoſito puncto potuerunt ſubtrahi. Hoc ergo remedium ſi adhibeatur, quamuis longiuſculum, tutiſſima erit noſtra ratio extrahendarum radicum. *Difficultas in extractionibus quo pacto ſuperetur.*

1296—50000—	4
216—10000—	16
36— 1000—	64
6— 50—	256
	1024

IAM vero cur in ſuperiori tabella quadratorum, cuborum, ſurdeſolidorum, &c. omiſerim Zenſizenſos ſiue quadrati quadratos, atque adeo radicis Zenſizenſicæ extractionem prætererim; ratio eſt, quod radices Zenſizenſica, Zenſicubica, Zenſizenzēſica, cubicubica, Zenſurdeſolida, &c. quamuis erui poſſint, ſicut alia, habent tamen aliam etiam extractionis regulam; quam vel ex ipſis nominibus colligere licet. Videlicet. *Cur exemplum non ponatur de radice Zenſizenſica, &c.*

EXTRACTVRVS radicem Zenſizenſicam, ſiue quadrati quadratam, extrahe primo radicem quadratam: Deinde ex hac radice erue iterum quadratam radicem. Hæc enim erit radix Zenſizenſica, quæ quæritur.

EXTRACTVRVS vero radicem Zenſicubicam, id eſt, quadrati cubicam, vel cubi quadratam, extrahe primo radicem quadratam, & ex hac deinde radicem cubicam. Vel primo erue radicem cubicam, & ex hac quadratam. Vltima enim radix eruta erit ea, quam quæris. Idem iudicium habeto de alijs radicibus numerorum compoſitorum, vt de radice Zenſizenzenſica, cubicubica, Zenſurdeſolida, &c.

REGVLA PROPRIA EXTRACTIOnis radicis cubicæ.

QVONIAM frequentior vſus eſt radicis quadratæ, & cubicæ apud Mathematicos, quam aliarum radicum, lubet in ſtudioſorum gratiam præſcribere hoc loco regulam propriam ad cubicam radicem extrahendam: quemadmodum idem de quadrata radice fecimus in noſtra Arithmetica practica. Relictis autem aliorum regulis, quod minus faciles, minuſque expeditæ ſint, excerpam vnam quaſi nouam ex ſuperiori extractione radicis cubicæ, quæ ſic ſe habet.

SIT eruenda radix cubica ex numero 1860867.

Regula propria radicis cubicæ. radix 123.

EX primo puncto 1. ad ſiniſtram ſubtraho cubum 1. maximum in eo contentum, nihilque remanet. Erit ergo ſequens punctum 860. & pro radice inuenta eſt figura 1.

PARO diuiſorem, multiplicando quadratum figuræ inuentæ, nimirum 1. per 300. qui erit 300. per quem ſi diuidam punctum 860. inuenio Quotientem 2. pro ſecunda figura radicis. Hanc duco in diuiſorem inuentum 300. facioque 600. Deinde duco quadratum nouæ figuræ 2. inuentæ, nimirum 4. in productum ex priori figura 1. multiplicata per 30. hoc eſt, in 30. facioque 120. Poſtremo ad ſummam duorum horum productorum 600 & 120. id eſt, ad 720. adiicio cubum inuentæ nouæ figuræ 2. nimirum 8. totamque ſummam 728. ex meo puncto 860. ſubtraho. Et quia remanent 132. erit vltimum punctum 132867. Scribo ergo inuentam figuram 2. poſt priorem 1.

DEINDE paro eodem modo diuiſorem nouum pro vltimo puncto. Nimirum quadratum totius radicis 12. hactenus inuentæ, id eſt, 144. duco iterum in 300. Productus enim numerus 43200. erit diuiſor, per quem ſi diuidam meum punctum 132867 reperio Quotientem 3. ſcribendum poſt radicem 12. hactenus inuentam. Hanc figuram inuentam 3 ſimiliter duco in diuiſorem inuentum 43200. facioque 129600. Deinde quadratum eiuſdem nouæ figuræ 3. nimirum 9. duco in productum ex radice 12. prius inuenta, multiplicata per 30. hoc eſt in 360. efficioque 3240. Poſtremo ad ſummam horum duorum productorum 129600. & 3240. hoc eſt, ad 132840. adiicio cubum 27. ex eadem noua figura genitum, fitque numerus 132867. qui ex puncto 123867. detractus nihil relinquit. Atque ita inuenta eſt radix 123. numeri propoſiti 1860867.

QVOD ſi ſupereſſet aliud punctum, ducendus eſſet quadratus totius radicis 123. hactenus inuentæ in 300. vt nouus diuiſor exurgeret, &c. Vides ergo in hac regula plus memoriæ requiri, quam in ſuperiori, quamuis facilior ſit, quam aliorum regulæ. Memor tamen eſto, quando dubitas, an nimis paruam figuram in Quotiente acceperis, vt facias periculum de maiori figura, vt ſupra dictum eſt.

PROBL. 15. PROPOS. 20.

IN numeris non quadratis, non cubis, non Zenſizenſicis, non ſurdeſolidis, &c. radicem veræ propinquam inuenire.

QVANDO numerus propoſitus non eſt quadratus, aut cubus, aut Zenſizenſus, aut ſurdeſolidus, &c. non poteſt habere verã radicem, ſed per regulas ſuperiores inuenitur radix maximi quadrati, vel cubi, vel Zenſizenſi vel ſurdeſolidi in dato numero contenti. Vt igitur ſciamus, quænam fractio ad inuentam radicem addenda ſit, vt habeatur radix propinquior veræ, agendum erit hoc modo.

Quot binarij cifrarum vel ternarij vel quaternarij, &c. ad propinquam radicem eruendam apponendi ſint.

NVMERO propoſito apponantur aliquot binarij cifrarum, ſi quadrata radix propinqua inquiritur: vel ſi cubica, aliquot cifrarum ternarij: vel aliquot quaternarij, ſi radix Zenſizenſica deſideratur, vel aliquot quinarij cifrarum, ſi de ſurdeſolida radice agitur, &c. Reſpondet autem in qualibet ſpecie radicis numerus cifrarum aliquoties repetendus numero, qui in progreſſione ad initium præcedentis problematis poſita ſcribitur ſupra numerum, à quo radix nomen ſumit. Vt quia ſupra quadratum ponitur 2. ideo pro quadrata radice apponuntur binæ cifræ aliquoties, at pro cubica ternæ, quod ſupra cubum ſcriptus ſit numerus 3. &c. ita vt pro radice cubicubica propinqua apponendi ſint aliquot nouenarij cifrarum, quippe cum ſupra cubicubum numerus 9. reperiatur deſcriptus. Idem numerus cifrarum aliquoties repetendus reſpondet quoque ſignationibus punctorum, quæ faciendæ ſunt, vt radix extrahatur. Vt quia in quadrata radice extrahenda ſignatur ſecunda quæuis figura, propterea aliquot cifrarum binarij aſcribendi ſunt; in cubica vero radice aliquot ternarij cifrarum adiungendi ſunt, quia in ea extrahenda tertia quæque figura ſignatur, &c.

QVO autẽ plures binarij, vel ternarij cifrarũ, &c. numero ꝓpoſito apponẽtur, eo ꝓpinquior radix erueẽ.

Quæ fractio addenda ſit radici, vt propinquior radix gignatur.

APPOSITIS hoc modo cifris ad numerũ, ex quo radix eruẽda eſt, extrahẽda eſt ex toto illo numero radix, vt ſupra traditũ eſt. Deinde ex ea radice abiectis ad dexterã tot figuris, quot cifrarũ binarij, vel ternarij, vel quaternarij, &c appoſiti fuere, reliquæ figuræ radicẽ integrã dabunt, cui addẽda eſt fractio numeratorẽ habẽs figuras abiectas, denominatorẽ vero vnitatem, cũ totidem cifris, quot binarij cifrarũ, vel ternarij, &c. additi fuerunt, nimirum vel 10. ſi vnus binarius, vel ternarius, &c. additus fuit, vel 100. ſi duo binarij: vel ternarij, &c. additi fuerunt: vel 1000. ſi tres, & ſic deinceps: ita vt fractio illa contineat vel decimas, vel centeſimas, vel milleſimas, &c.

EXEMPLI cauſa. Ex numero 29. extrahenda ſit radix quadrata. Appoſitis tribus binarijs cifrarum, hoc modo 29000000. inuenitur huius numeri quadrata radix 5385. minor quam vera, quippe cum in extractione aliquid remanſerit: addita vero vnitate, fiet radix 5386. maior, quam vera. Abiectis igitur tribus figuris ad dextram, propter tres cifrarum binarios additos, erit propinqua radix $5\frac{385}{1000}$. minor tamen quã vera: at $5\frac{386}{1000}$. maior quam vera. Illius enim quadratus numerus eſt $28\frac{998225}{1000000}$. minor quam propoſitus numerus 29. Huius vero numerus quadratus eſt $29\frac{8996}{1000000}$. maior eodem numero propoſito 29.

ITEM ex numero 29160. eruenda ſit radix cubica. Apponantur tres ternarij cifrarum, vt rurſus habeantur in fractione partes denominatæ à 1000. atq; ex toto numero 29160000000000. extrahatur radix cubica, quæ reperietur 30779. minor quam vera, quod in extractione fuerit aliquis numerus reſiduus: atq; adeo maior quã vera, erit 30780. Abiectis tribus figuris ad dextrã, propter tres cifrarũ ternarios appoſitos, erit pro-

pinqua radix cubica $30\frac{777}{1000}$. minor quam vera, cum eius cubus ſit tantum 29158 [illegible]. maior autem propinqua radix, quam vera, erit $30\frac{780}{1000}$. quippe cum eius cubus ſit 29161 [illegible].

DEMONSTRATIO huius inuentionis radicis propinquæ hæc eſt. Quando pro radice quadrata apponuntur 00. ad numerum propoſitum, verbi gratia ad 5. multiplicatur propoſitus numerus per 100. hoc eſt, per quadratum radicis 10. Et quia quadrati 500. & 5. (Nam datus numerus, & conflatus ex additione 00. ſumendi ſunt tamquam quadrati, cum eorum radices quærantur) [a] habent proportionem ſuarum radicum duplicatam: Eſt autem 500. ad 5. vt 10. ad 1 propterea quod 5. multiplicatus per 100. fecit 500. Centupla vero proportio decuplæ duplicata eſt, vt in hoc appoſito exemplo patet; erit proportio radicis numeri 500. ad radicem numeri 5. decupla. Cum ergo radix 500. ſit 22. minor quam vera, erit eius $\frac{1}{10}$. nimirum $2\frac{2}{10}$. radix numeri 5. minor, quam vera: ac proinde $2\frac{3}{10}$. erit maior quam vera. Recte ergo præcepimus, quando apponuntur 00. abiiciendam eſſe ex radice 22. vnam figuram, vt relinquatur radix $2\frac{2}{10}$. *a 11. oct. 1.*

1.	10.	100.
	5.	500.

QVANDO autem apponuntur 0000 multiplicatur numerus propoſitus, verbi gratia numerus 5. per 1000. id eſt, per quadratum radicis 100. Et quia quadrati 50000. 5. [b] habent duplicatam proportionem ſuarum radicum: Eſt autem 50000. ad 5. vt 10000. ad 1. propterea quod 5. multiplicatus per 10000. fecit 50000. Proportio autem 10000. ad 1. duplicata eſt proportionis 100. ad 1. vt in hoc exemplo patet; erit proportio radicis numeri 50000 nimirum 223. ad radicem numeri 5. vt 100. ad 1. Quare ſi radix 223 diuidatur per 100. procreabitur radix quadrata propinqua $2\frac{23}{100}$. minor quam vera, at $2\frac{24}{100}$. erit maior quam vera. Recte ergo præcepimus, cum apponuntur 0000. abiiciendas eſſe ex radice 223. duas figuras, vt reliqua fiat radix $2\frac{23}{100}$. *b 11. oct. 1.*

1.	100.	10000.
	5.	50000.

PARI ratione, ſi apponantur 000000. procreabitur radix propinqua in milleſimis, atq; ita deinceps.

RVRSVS quando pro radice cubica ad numerum propoſitum, vt ad 5. adduntur 000. multiplicatur datus numerus per 1000. id eſt, per cubum radicis 10. Et quia cubi 5000. 5. [c] habent proportionem ſuarum radicum triplicatam: Eſt autem 5000. ad 5. vt 1000. ad 1. quod multiplicans 5. fecit 5000. Proportio autem 1000. ad 1. triplicata eſt proportionis 10. ad 1. vt in hoc appoſito exemplo apparet; erit proportio radicis numeri 5000 nimirum 17. ad radicem numeri 5. vt 10. ad 1. Quocirca ſi radix 17. diuidatur per 10. fit radix cubica propinqua $1\frac{7}{10}$. minor quam vera, at $1\frac{8}{10}$. erit maior quam vera. Recte ergo præcepimus, quando pro radice cubica apponuntur 000. abiiciendam eſſe ex radice inuenta 17. vnam figuram, vt reliqua fiat radix $1\frac{7}{10}$. *c 12. octa.*

1.	10.	100.	1000.
		5.	5000.

SIMILI modo ſi apponantur 000000. inuenietur propinqua radix in centeſimis: Et ſi apponantur 000000000. in milleſimis, &c. Nam ibi multiplicatur numerus per 1000000. id eſt, per cubum radicis 100. hic vero 1000000000. nimirum per cubum radicis 1000. Cætera eodem modo demonſtrabuntur.

NEQVE vero diuerſa ratio eſt in alijs radicibus. Nam in ſurdeſolida verbi gratia, quando adduntur 00000. fit multiplicatio per 100000. id eſt, per ſurdeſolidum radicis 10. Et proportio 100000. ad 1. eſt quintuplicata proportionis 10. ad 1. vt in appoſito exemplo apparet, &c.

1.	10.	100.	1000.	10000.	100000.

PROBL. 16. PROPOS. 21.

RADICEM cuiuſque generis ex data minutia extrahere.

IN minutijs extrahenda eſt radix eiuſdem appellationis cum radice, quæ quæritur, tum ex numeratore, tum ex denominatore. Ita enim fiet fractio, quæ radix eſt propoſitæ minutiæ. Vt radix quadrata minutiæ $\frac{4}{9}$. eſt $\frac{2}{3}$. Et radix cubica minutiæ $\frac{8}{27}$ eſt ſimiliter $\frac{2}{3}$. Et radix Zenſizenſica minutiæ $\frac{16}{81}$. eſt quoque $\frac{2}{3}$. Et radix ſurdeſolida minutiæ $\frac{32}{243}$. eſt pari ratione $\frac{2}{3}$. & ſic de alijs. *Extractio radicum ex minutijs.*

QVOD ſi data minutia fuerit fractio, vel minutia alterius minutiæ, reducenda prius erit ad minutiam ſimplicem. Vt ſi quærenda ſit radix quadrata ex hac minutia minutiæ $\frac{2}{4}$. $\frac{8}{9}$, reducenda erit ad hanc ſimplicem minutiam $\frac{16}{36}$. cuius radix quadrata eſt $\frac{4}{6}$. vel $\frac{2}{3}$. &c.

SIMILITER ſi fractio adhæreat integris, erunt integra prius reducenda ad fractionem eiuſdem denominationis. Vt ſi quærenda ſit radix cubica numeri $1\frac{37}{27}$. reducendus erit ad hanc fractionem $\frac{64}{27}$. cuius radix cubica eſt $\frac{4}{3}$. hoc eſt, $1\frac{1}{3}$. &c.

SI vel numerator, vel denominator minutiæ, vel vterque numerus careat radice eius appellationis, quæ deſideratur, non habebit illa minutia radicem, quæ quæritur. Vt neque $\frac{4}{7}$. neque $\frac{6}{9}$ neque $\frac{5}{12}$. habent radicem quadratam præciſe, propterea quod denominator in prima, numerator vero in ſecunda, & vterque numerus in tertia quadratam radicem non habet.

COGNOSCES autem, an data fractio habeat radicem quæſitam, nec ne, ſi eam ad minimos terminos reduces. Si namque ita reducta habuerit radicem, dicetur quoque data minutia eandem radicem habere: Si vero reducta ad minimos terminos radicem non habuerit, neque propoſita minutia radicem habebit. Vt ſi proponatur minutia $\frac{32}{72}$. volo ſcire, an habeat radicem quadratam: Et redacta ad minimos terminos eſt $\frac{4}{9}$. quæ radicem quadratam habet $\frac{2}{3}$. Hanc ergo eandem radicem quadratam dicetur habere minutia propoſita $\frac{32}{72}$. At vero minutia $\frac{6}{9}$. non habebit radicem quadratam: quia neque $\frac{2}{3}$. in minimis terminis, ad quam reducitur, eam habet. Pari ratione minutia $\frac{24}{81}$. habebit radicem cubicam $\frac{2}{3}$. eandem nimirum, quam habet minutia $\frac{8}{27}$. in minimis terminis, ad quam illa reducitur. Minutia autem $\frac{12}{20}$. radice cubica carent, quod minutia $\frac{3}{5}$. ad quam in minimis terminis reuocatur, eadem careat. Et ſic de alijs.

QVANDO ergo minutia ad minimos reuocata terminos radicem quæſitam non habuerit, exquirenda erit radix propinqua tam numeratoris, quam denominatoris, apponendo videlicet vtrique prius numero aliquot ciſrarum binarios, vel ternarios, quaternarioſue, &c. prout quadrata radix, aut cubica, aut Zenſizenſica, &c. inquiritur. Si namque radix propinqua numeratoris per propinquam denominatoris radicem diuidatur, prodibit radix propinqua, quam quærimus. Verbi gratia, ſi proponatur minutia $\frac{8}{7}$ cuius radix quadrata inquirenda ſit, appoſitis tribus binarijs ciſrarum reperietur numeratoris radix propinqua $2\frac{828}{1000}$. denominatoris vero $2\frac{645}{1000}$. Si igitur illa per hanc diuidatur, prouenict radix quæſita $\frac{2828}{2645}$. ſatis propinqua. Idem iudicium de alijs radicibus habeatur, ſi memineris tamen, in cubica tam numeratori, quam denominatori apponendos eſſe aliquot ternarios ciſrarum, vt propinquæ eorum radices eruantur: In Zenſizenſica vero aliquot quaternarios, & in ſurdeſolida aliquot quinarios, &c.

QVIA vero moleſtum eſt inquirere duas radices propinquas, vnam pro numeratore propoſitæ fractionis, & pro denominatore alteram, traduntur à Cardano, & Tartalea pro radice quadrata, & cubica, quæ nimirum magis in vſu ſunt, peculiares quædam regulæ, quas hic explicare lubet, quippe cum in eis tantummodo vnius radicis propinquæ inuentioοe opus ſit.

Alia extractio radicis quadratæ & cubicæ ex data minutia.

PRO quadrata igitur radice, duc numeratorem in denominatorem, & producti numeri radicem quadratam proqinquam diuide per denominatorem: Vel numeratorem per radicem illam propinquam partire. Vtroq; n. modo radix propinqua fractionis propoſitæ gignetur. Et ſi quidē propinqua illa radix numeri producti ex numeratore in denominatorem fuerit minor quam vera, reperietur priori modo radix fractioοis propinqua minor quoq, quā vera; propterea quod numer⁹ vero mioor diuiditur: poſteriori vero modo inuenietur radix propinqua fractionis maior, quam vera, quod tunc diuiſio fiat per numerum vero minorem. Contrarium eueniet, ſi radix illa propinqua numeri ex numeratore in denominatorem producti fuerit maior quam vera. Nam priori modo gignetur radix fractionis propinqua maior, quam vera, poſteriori vero modo minor, quam vera, vt perſpicuum eſt. Hanc regulam propoſui quoque lib. 4. cap. 2. Num. 5. ibiq; eandem demonſtraui. Exemplum huius etiam regulæ ibidem habes.

PRO radice vero cubica: duc numeratorem in quadratum denominatoris, & producti numeri radicem cubicam propinquam diuide per denominatorem: Vel duc denomioatorem in quadratum numeratoris, & per nomeri producti radicem cubicam propinquam partire numeratorem. Vtroq; eoim modo propinqua radix propoſitæ minutiæ proueoiet. Et priori quidem modo, ſi illa radix cubica propinqua fuerit minor quam vera, reperietur radix propinqua fractionis minor quoq; quā vera, propterea quod diuiſio fit numeri vero minoris per denominatorem fractionis. Si autem radix illa propinqua fuerit maior quam vera, gignetur quoque radix propinqua fractionis maior quam vera, quod tunc numerus vero maior per denominatorem fractionis diuidatur. Poſteriori vero modo, ſi radix illa cubica propinquior fuerit minor quam vera, producetur radix propinqua fractionis maior quam vera, quod tunc diuiſio fiat per numerū vero minorem: At ſi illa radix cubica propinqua fuerit maior quam vera, erit inuenta radix fractionis propinqua minor quam vera, quandoquidē tunc diuiditur oumerator per numerum vero maiorē. Exemplum in fractione $\frac{8}{27}$. habente veram radicē cubicam $\frac{2}{3}$. Ducto numeratore 8. in 729. quadratum denominatoris 27. fit numerus 5822. cuius radix cubica eſt 18. Hæc diuiſa per denominatorem 27. facit $\frac{18}{27}$. id eſt, $\frac{2}{3}$. pro radice cubica fractionis $\frac{8}{27}$. Item ducto denominatore 27. in 64. quadratum numeratoris 8. gignetur numerus 1728 cuius radix cubica eſt 12. per quam ſi diuidatur numerator 8. fit Quotiens $\frac{8}{12}$. hoc eſt, $\frac{2}{3}$. vt prius, pro radice cubica fractionis $\frac{8}{27}$. propoſitæ. Alterum exemplum in fractione $\frac{5}{7}$. non habente veram radicem cubicam. Ducto numeratore 5. in 49. quadratū denominatoris 7. fit numerus 245. cuius radix cubica propinqua $6\frac{257}{1000}$. (inuenta per appoſitionē duorū ternariorum ciſrarum) diuiſa per denominatorē 7. facit Quotientem $\frac{6257}{7000}$. hoc eſt, $\frac{2}{3}\frac{5}{5}$. pro radice fractionis $\frac{5}{7}$. Item ducto denominatore 7. in 25. quadratū numeratoris 5. fit numerus 175. per cuius radicem cubicam $5\frac{593}{1000}$. propinquam inuentam per appoſitioοē 000000. ad 175 ſi partiamur numeratorem 5. inueniemus Quotientem $\frac{5000}{5593}$. pro radice cubica propinqua datæ fractionis $\frac{5}{7}$. atq; ita de alijs. Porro hoc modo reperitur radix fractionis propinquior, quam per ſuperiorem regulam: quia hic ſolum vnus error irrepit propter radicem cubicam propinquam, quæ vera non eſt, manente tam denominatore in priori modo, quam numeratore in poſteriori, in propria ſua quantitate; at in ſuperiori regula duo interoeniunt errores, propter duas radices cubicas propinquas, quæ veræ oon ſunt.

DEMONSTRO vtrumq; hunc modum pari ratione. Quando numerator in quadratum denominatoris ducitur, erit producti numeri radix cubica vnus duorum mediorum proportionalium inter numeratorem ac denominatorem collocandus iuxta denominatorē, vt conſtat ex ijs, quæ propoſ. 18. huius lib. demonſtrata ſunt. [a] Erit igitur proportio numeratoris ad denominatorem triplicata proportionis radicis cubicæ inucotæ ad denomioatorem: [b] Eſt autem eadem proportio numeratoris ad denominatorem, tamquam cubi ad cubum, triplicata quoq; proportionis radicis cubicæ numeratoris ad radicem cubicam denominatoris. Igitur erit radix cubica inuenta ad denominatorem, vt radix cubica numeratoris ad radicem cubicam denominatoris: [c] ac proinde minutia, cuius numerator radix cubica inuenta, ac denominator ipſe denominator, æqualis erit minutiæ, cuius numerator radix cubica numeratoris, ac denominator radix cubica denominatoris. Quam ob rem ſicut hæc minutia eſt radix cubica fractionis propoſitæ, ita quoq; illa erit radix cubica eiuſdem fractionis. Diuiſa ergo radice illa cubica inuenta per deoominatorem fractioοis propoſitæ (quæ diuiſio fit, quia illa radix cubica inuenta eſt fractio, ac proinde, vt cognoſcatur valor minutiæ, cuius numerator radix illa inuenta, ac denominator ipſemet denominator fractionis propoſitæ, diuidendus eſt numerator huius minutiæ per eius denominatorem: alioquin ſi illa radix cubica inuenta foret numerus integer, diuiſio facienda non eſſet) producetur radix cubica fractionis propoſitæ: quemadmodum ex diuiſione radicis cubicæ numeratoris per radicem cubicam denominatoris procreatur radix cubica fractionis propoſitæ: quippe cum minutia nil aliud ſit, quam numerator per denominatorem diuiſus.

a 10. defin. quinti.
b 12. octa.
c 7. minutiarum ad finē lib. 9.

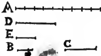
QVANDO vero denominator in quadratum numeratoris ducitur, erit numeri producti radix cubica vnus duorum mediorum proportionaliū inter numeratorem, ac denominatorem, collocandus iuxta numeratorē, vt ex demonſtratis propoſ. 18. huius lib. manifeſtū eſt. Ergo rurſus erit proportio numeratoris ad denominatorem

natorem triplicata proportionis numeratoris ad illam radicem cubicam inuentam, quemadmodum & proportionis radicis cubicæ numeratoris ad radicem cubicam denominatoris, eadem illa proportio numeratoris ad denominatorem, tamquam cubi ad cubum, triplicata eſt: Ac propterea, vt ſupra, minutia, cuius numerator ipſemet numerator fractionis propoſitæ, denominator vero radix illa cubica inuenta, æqualis erit minutiæ, cuius numerator radix cubica numeratoris fractionis propoſitæ, & denominator radix cubica denominatoris eiuſdem fractionis. Quocirca diuiſo numeratore per illam inuentam radicem cubicam, prodibit radix cubica fractionis propoſitæ.

PROBL. 17. PROPOS. 22.

RADICEM quadratam & cubicam in numeris non quadratis, & non cubicis per lineas Geometrice inuenire.

SIT datus numerus 10. repræſentans quadratum 10. palmorum, vel pedum, vel aliarum menſurarum. Capiatur linea A, palmorum, vel pedũ 10. &c. & linea B, palmi, vel pedis 1.[a] Inuenta C, media proportionali inter A, & B. Dico C, eſſe radicem quadratam, ſiue latus quadratum, numeri A, 10. [b] Quoniam enim quadratum rectæ C, æquale eſt rectangulo ſub A, & B, comprehenſo: Eſt autem hoc rectangulum 10. quod vnitas B, numerum A, 10. multiplicans procreet 10. perſpicuum eſt, rectam C, eſſe latus quadratum 10. palmorum, vel pedum, &c. quod eſt propoſitum. a 13. ſexti. b 17. ſexti.



RVRSVS [c] inuentis inter A, & B, duabus medijs proportionalibus D, & E. Dico E, quæ minori I B, propinquior eſt, latus eſſe cubicum, ſiue radicem cubicam, numeri 10. [d] Quoniam enim cubus rectæ E, æqualis eſt parallelepipedo ſub quadrato rectæ B, & ſub A, recta comprehenſo: Eſt autem hoc parallelepipedum 10. quod vnitas B, ſe multiplicans faciat quadratum 1. & quadratum 1. multiplicans numerum A, 10. gignat 10. liquido conſtat, rectam E, eſſe latus cubicum 10. palmorum, vel pedum, &c. quod eſt propoſitum. c 13. huius. d 1. minu. 18. huius.

FINIS LIBRI SEXTI.

GEOMETRIÆ PRACTICÆ
LIBER VII.

De figuris Iſoperimetris diſputans: cui Appendicis loco annectitur breuis de circulo per lineas quadrando tractatiuncula.

N*OBILIS ac præſtans de Iſoperimetris figuris ſemper apud omnes habita eſt diſputatio, in qua videlicet inquiritur, vtra duarum ſit altera maior, & capacior, & quæ ſit omnium maxima & capaciſſima. Non pauci enim rerum Geometricarum ignari hac in re hallucinati ſunt, putantes figuras Iſoperimetras, quæ nimirum æquales ambitus continent, eſſe inter ſe æquales, ſiue æque capaces. Immo è contrario, quod mirum eſt, nonnulli, qui ſe Geometras appellant, adduci vix poſſunt, vt credant, dari poſſe duas figuras Iſoperimetras inter ſe omnino æquales, quod tamen fieri poſſe, clariſſime propoſ. 20. 21. 22. huius demonſtrabimus.*

DEFINITIONES.

Definitiones ad tractationem Iſoperimetrarum figurarum pertinentes.

I.

ISOPERIMETRÆ figuræ ſunt, quæ æquales ambitus continent.

II.

REGVLARIS figura dicitur ea, quæ & æquilatera & æquiangula eſt.

III.

CENTRVM figuræ regularis dicitur punctum illud, quod centrum eſt circuli figuræ inſcripti, vel circumſcripti.

IV.

AREA cuiuslibet figuræ dicitur capacitas, ſpatium ſiue ſuperficies intra latera ipſius comprehenſa.

V.

OMNE ſolidum rectangulum (cuius nimirum baſes æquidiſtantes ſunt, & æquales, lateraque ad baſes recta, quale eſt Parallelepipedum) contineri dicitur ſub altera baſium, ac perpendiculari ab illa baſi ad alteram protracta.

QVIA nimirum alterutra baſium indicat longitudinem ac latitudinem figuræ, perpendicularis vero altitudinem, ſiue profunditatem eiuſdem demonſtrat.

THEOR. 1. PROPOS. 1.

Triangulũ quod cuiuſ, cui rectangulo æquale ſit.

AREA cuiuſlibet trianguli æqualis eſt rectangulo comprehenſo ſub perpendiculari à vertice ad baſim protracta, & dimidia parte baſis. Item rectangulo comprehenſo ſub ſemiſſe perpendicularis, & tota baſe. Vel denique ſemiſſi rectanguli ſub tota perpendiculari, & tota baſe comprehenſi.

SIT triangulum ABC, ex cuius vertice A, ad baſim BC, ducatur perpendicularis AD, diuidatque primo baſim

baſim BC.bifariam,vt in prima figura.Per A,ducatur EAF, in vtramque partem æquidiſtans rectæ BC , compleaturq; rectangulum BEFC, [a] quod erit duplum trianguli ABC;[b] Item duplum rectĩguli ADBE. Quare rectangulũ ADBE, quod nimirum continetur ſub perpendiculari AD,& dimidio baſis BD,æquale eſt triangulo ABC. Diuidat ſecundo perpendicularis AD,baſim BC.non bifariam,vel etiam cadat in baſim CB,protractam,vt in 2.& 3.figura;Et per A,ducatur rurſus AF,in vtramque partem æquidiſtans rectæ BC.compleaturque rectangulum ADCF.Diuiſa deinde baſe BC,bifariam in G,ducãtur rectæ BE,GH,ipſi AD,æquidiſtantes,[c] eritque GH, æqualis perpendiculari AD.[d] Quoniam igitur rectangulum BCFE,duplum eſt trianguli ABC;[e] Item duplum rectanguli BEHG: erit rectangulum BEHG,quod continetur ſub perpendiculari GH,vel AD,& dimidio baſis BG.æquale triangulo ABC.



a 41. prim.
b 36. prim.
c 34. prim.
d 41. prim.
e 36. prim.

SECETVR iam perpendicularis AD,vel GH,bifariam in I,agaturq; per I, Ipſi BC,parallela KL.Dico triangulum idem ABC,æquale quoque eſſe rectangulo BCLK,in 1. & 2.figura, Item rectangulo BCLM,in 3 figura,comprehenſo nimirũ ſub ID,vel IG.ſemiſſe perpendicularis AD,vel HG. [f] Quoniam n.triangulũ ABC, dimidium eſt rectanguli EC,eiuſdemq; dimidium etiam eſt rectangulum BL;[g] quod rectangula BL, LE,ſuper æquales baſes æqualia ſint: æqualia inter ſe erunt triangulum ABC, & rectangulum BL.[h] Et quia rectangulum BF,contentum ſub perpendiculari AD,vel BE. & baſe trianguli BC, duplũ eſt trianguli ABC,erit triangulum ſemiſſi illius rectanguli æquale.Area igitur cuiuslibet trianguli æqualis eſt, &c. quod erat oſtendendum.

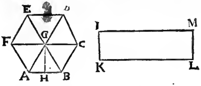
f 41. primi.
g 36. prim.
h 41. prim.

THEOR. 2. PROPOS. 2.

AREA cuiuslibet figurę regularis æqualis eſt rectangulo contento ſub perpendiculari à centro figuræ ad vnum latus ducta,& ſub dimidiato ambitu eiuſdem figuræ.

Regularis figura quacunq; cui rectangulo æqualis ſit.

SIT figura regularis quæcunque ABCDEF, & centrum eius punctum G, à quo ducatur GH,perpendicularis ad vnum latus,nempe ad AB : Sit quoque rectangulũ IKLM,contentũ ſub IK,quæ ęqualis ſit perpendiculari GH.& ſub KL,recta, quæ æqualis ponatur dimidiæ parti ambitus figuræ ABCDEF.Dico huic rectangulo æqualem eſſe figuram regularem ABCDEF.Ducantur n. ex G,ad ſingulos angulos lineæ rectæ, vt tota figura in triãgula reſoluatur,quę omnia ęqualia inter ſe erunt,vt in corollario propoſ. 8. lib. 1. Eucl. demõſtratum eſt à nobis propterea quod omnia latera triangulorum à puncto G, exeuntia ſint inter æqualia, habeantq; baſes æquales , nempe latera figuræ regularis. [a] Hinc n. efficitur, omnes angulos ad G,



æquales eſſe,ac proinde.ex dicto corollario,triangula ipſa inter ſe quoque eſſe æqualia.[b] Quoniam igitur rectãgulum contentum ſub GH,perpendiculari, & medietate baſis AB , æquale eſt triangulo ABG,ſi ſumantur tot huiuſmodi rectangula,in quot triangula diuiſa eſt figura regularis,erunt omnia ſimul figuræ ABCDEF, æqualia;propterea quod omnia triangula oſtenſa ſint æqualia triangulo ABG.[c] Cum igitur eadem ſimul æqualia ſint rectangulo IKLM;propterea quod KL.æqualis ponitur dimidio ambitus ABCDEF, hoc eſt, omnibus medietatib⁹ baſium ſimul;& recta IK,perpendiculari GH;erit figura regularis ABCDEF,æqualis rectangulo IKLM. Area igitur cuiuslibet figuræ regularis æqualis eſt,&c.quod erat demonſtrandum.

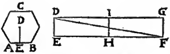
a 8. primi.
b 1. huius.
c 1. ſecund.

THEOR. 3. PROPOS. 3.

AREA cuiuslibet figuræ regularis æqualis eſt triangulo rectangulo, cuius vnum latus circa angulum rectum æquale eſt perpendiculari à centro figuræ ad vnum latus ductæ,alterum vero æquale ambitui eiuſdem figuræ.

Regularis figura quacunq; cui triangulo rectangulo æqualis ſit.

SIT rurſus figura regularis ABC, cuius centrum D , à quo perpendicularis ad latus AB,ducta ſit DE;triangulum vero rectangulum DEF , habens angulum E,rectum,& latus DE. æquale perpendiculari DE,lat⁹ autem EF,ęquale ambitui figuræ ABC.Dico triangulũ DEF,figuræ ABC,æquale eſſe.Compleatur enim rectangulũ DEFG;& diuiſa EF, bifariam in puncto H,ducatur HI,æquidiſtans rectæ DE. [a] Erit igitur rectangulum DEHI, contentum ſub DE, perpendiculari, & ſub EH,dimidio ambitus figuræ,æquale figuræ ABC:At rectangulo DEHI,æquale eſt triangulum DEF.Nam rectangulum DEHI,eſt dimidium rectanguli DEFG;[b] propterea quod æqualia ſunt rectangula DEHI,IHFG;[c] Triangulum quoque DEF,dimidium eſt eiuſdem rectanguli DEFG. Igitur & triangulum DEF, æquale erit figuræ ABC. Area ergo cuiuslibet figuræ regularis æqualis eſt triangulo rectangulo,&c.quod demonſtrandum erat.



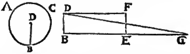
a 2. huius.
b 36. prim.
c 41. prim.

THEOR. 4. PROP. 4.

AREA cuiuslibet circuli æqualis eſt rectangulo comprehenſo ſub ſemidiametro, & dimidiata circumferentia circuli.

Circulus quicunq; cui rectangulo æqualis ſit.

ESTO circulus ABC, cuius ſemidiameter DB: Rectangulum autem DBEF, comprehenſum ſub DB, ſemidiametro circuli, & BE, recta, quæ æqualis ſit dimidiatæ circumferentię circuli. Dico aream circuli ABC, æqualem eſſe rectangulo DBEF.



Producatur enim BE, in continuũ, ponaturq; EG, æqualis ipſi BE, vt ſit BG, recta æqualis toti circumferentiæ circuli. Coniungantur denique puncta D, G, recta DG.[a] Quoniam igitur circulus ABC, æqualis eſt triangulo DBG:[b] Eſt autem triangulum DBG, rectangulo DBEF, æquale; quod baſis trianguli dupla ſit baſis trianguli; (Id quod etiam ex demonſtratione antecedentis propoſ. liquet, vbi oſtendimus, triangulum DEF, æquale eſſe rectangulo DEHI:) erit quoque circulus ABC, rectangulo DBEF, æqualis. Area ergo cuiuslibet circuli æqualis eſt rectangulo, &c. quod oſtendendum erat.

a 1. de Dimenſ. circuli Archim.

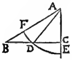
b ſchol. 41 primi.

THEOR. 5. PROPOS. 5.

Proprietas quædam trianguli rectãguli.

IN omni triangulo rectangulo, ſi ab vno acutorum angulorum vtcunque ad latus oppoſitum linea recta ducatur, erit maior proportio huius lateris ad eius ſegmentum, quod prope angulum rectum exiſtit, quam anguli acuti prædicti ad eius partem dicto ſegmento lateris oppoſitum.

SIT triangulum rectangulum ABC, cuius angulus C, ſit rectus; ducaturque ab acuto angulo A, ad latus oppoſitum BC, recta AD, vtcunque, Dico maiorem eſſe proportionem rectæ BC, ad rectam CD, quam anguli BAC, ad angulum CAD.[a] Quoniam enim recta AD, maior quidem eſt, quam AC; minor vero, quam AB; ſi centro A, interuallo autem AD, circulus deſcribatur, ſecabit is rectam AC, protractam infra punctum C, vt in E, at vero rectam AB, ſupra punctum B, vt in F. Et quia maior eſt proportio trianguli BAD, ad ſectorem FAD, quã trianguli DAC, ad ſectorẽ DAE, (propterea quod ibi eſt proportio maioris inæqualitatis, hic autem minoris inæqualitatis)[b] erit quoque permutando maior proportio trianguli BAD, ad triangulum DAC, quam ſectoris FAD, ad ſectorem DAE.[c] Componendo igitur maior quoque erit porportio trianguli BAC, ad triangulum DAC, hoc eſt, rectæ BC, ad rectam CD,[d] (habent enim triangula BAC, DAC, eandem proportionem, quam baſes BC, CD,) quam ſectoris FAE, ad ſectorem DAE hoc eſt, quam anguli BAC, ad angulum CAD;[e] quod eandem habeant proportionem ſectores, quam anguli. Quocirca in omni triangulo rectangulo, &c. quod demonſtrandum erat.



a 19. prim.

b 27. quin.

c 28. quin.

d 1. ſexti.

e corol. 33. ſexti.

HÆC propoſitio vera quoque eſt in triangulo non rectangulo, dummodo angulus C, maior ſit angulo ADC, vt patet;[f] quod tunc etiam AD, maior ſit, quam AC, minor vero, quam AB, &c.

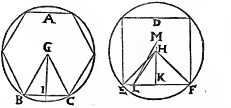
f 19. prim.

THEOR. 6. PROPOS. 6.

ISOPERIMETRARVM figurarum regularium maior eſt illa, quæ plures continet angulos, plurave latera.

Inter figuras Iſoperimetras, quæ plures angulos, ſeu latera continet, illa maior eſt.

SINT duæ figuræ regulares iſoperimetræ ABC, DEF, habeatque plura latera, ſiue angulos figura ABC, quam DEF. Dico ABC, maiorem eſſe, quam DEF. Deſcribatur enim circa figuras circuli, à quorum centris G, H, ducantur ad BC, EF, perpendiculares GI, HK,[a] quæ diuident rectas BC, EF, bifariam. Quoniam igitur figura ABC, plura habet latera, quã DEF, ſibi iſoperimetra, efficitur, vt latus BC, ſæpius repetitum metiatur ambitum figuræ ABC, quam latus EF, ambitum figuræ DEF. Quare latus BC, minus erit latere EF, ideoque BI, medietas lateris BC, minor, quam EK, medietas lateris EF. Ponatur KL, æqualis ipſi BI, & ducantur rectæ LH, HE, HF, GB, GC,[b] Et quia omnes arcus circuli DEF, ſunt æquales, quòd & rectæ ſubtenſæ æquales ponantur; erit recta EF, ita ſubmultiplex ambitus fi-



a 3. tertij.

b 28. tertij.

tus figuræ DEF, vt arcus EF, ſubmultiplex eſt circumferentiæ circuli DEF. Eademq; ratione ita multiplex ambitus figuræ ABC, rectæ BC, ſicut multiplex eſt circumferentia ABC, arcus BC. [c] Vt aũt arcus EF, ad circumferentiam circuli DEF, ita eſt angulus EHF, ad quatuor rectos, Igitur erit quoque vt recta EF, ad ambitũ figuræ DEF, hoc eſt, ad ambitum figuræ ABC, illi æqualẽ, ita angulus EHF, ad quatuor rectos: Vt autẽ ambitus figuræ ABC, ad rectam BC, ita eſt circumferentia circuli ABC, ad arcum BC, [d] hoc eſt, ita quatuor recti ad angulum BGC. Ex æquo igitur, vt recta EF, ad rectã BC, [e] hoc eſt, vt recta EK, ad rectam BI, hoc eſt, ad rectã KL, ita angul⁹ EHF, ad angulum BGC, [f] hoc eſt, ita angulus EHK, ad angulum BGI. [g] Eſt autem maior proportio rectę EK, ad rectam KL, quam anguli EHK, ad angulum KHL. [h] Quare maior erit proportio quoque anguli EHK, ad angulum BGI, quam eiuſdem anguli EHK, ad angulum KHL; [i] ideoq; maior erit angulus KHL, quam angulus BGI. Cum igitur anguli HKL, GIB, ſint æquales, vtpote recti, [k] erit reliquus angulus HLK, minor reliquo angulo GBI. Fiat igitur angulus KLM, æqualis angulo GBI; cadetq; LM, extra LH; conuenietq; cum KH, producta vltra H, in puncto M. Quoniam igitur duo anguli B, I, trianguli GBI, æquales ſunt duobus angulis L, K, trianguli MLK, & latera BI, LK, æqualia, [l] erunt rectæ GI, MK, æquales. Recta ergo GI, maior eſt, quam recta HK. Quamobrem rectangulum ſub GI, & dimidio ambitu figuræ ABC, contentũ, maius erit rectangulo contento ſub HK, & dimidio ambitu figurę DEC, qui æqualis ponitur dimidio ambitus figuræ ABC. [m] Quocirca cũ illud rectangulũ oſtenſum ſit æquale figuræ ABC, hoc autem figuræ DEF, æquale; maior quoque erit figura ABC, quam figura DEF. Iſoperimetrarum ergo figurarum regularium maior eſt illa, &c. quod erat oſtendendum.

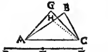
c 2. corol. 33. ſexti. — d 2 corol. 33 ſexti. — e 15. quin. — f 15. quin. — g 5. huius. — h 13. quin. — i 10. quint. — k 32. primi. — l 26. primi. — m 2. huius

PROBL. 1. PROPOS. 7.

PROPOSITO triangulo, cuius duo latera ſint inæqualia, ſupra reliquum latus triangulum priori Iſoperimetrum, ac duo habens latera æqualia, deſcribere.

Qua arte triangulũ Iſoſceles cõſtituatur Iſoperimetrum cuiuis triangulo non Iſoſcele.

SIT triangulum ABC, cuius duo latera AB, BC, ſint inæqualia, nempe AB, maius, quam BC; oporteatq; ſupra AC, conſtruere triangulum Iſoſceles, atque iſoperimetrum triangulo ABC. Sumatur recta DE, æqualis duobus lateribus AB, BC, ſimul, diuidaturque bifariam in F. [a] Et quoniam latera AB, BC, ſimul maiora ſunt latere AC, erunt quoque DF, FE, ſimul, maiores quam linea AC. Atq; ob id tres lineæ AC, DF, FE, ita ſeſe habebunt, vt quælibet duæ ſint reliqua maiores. [b] Si igitur ex ipſis conficiatur triangulum AGC, effectum erit, quod proponitur. Erunt enim latera AG, GC, & inter ſe æqualia, & ſimul ſumpta æqualia lateribus AB, BC, ſimul ſumptis: Addito igitur communi AC, erunt triangula ABC, AGC, iſoperimetra. Propoſito igitur triangulo cuius duo latera ſint inæqualia, ſupra reliquum latus triangulum, &c. deſcripſimus, quod faciendum erat.



a 16 prim. — b 22. prim.

SCHOLIVM.

CADET autem neceſſario punctum G, extra triangulum ABC: Si namque caderet in latus AB, vt ad punctum H, [a] eſſet ducta recta HC, minor, quam HB, BC, ſimul, & ob id triangulum AHC, non eſſet iſoperimetrum triangulo ABC, cuius contrarium ex conſtructione eſt demonſtratum. Multo minus cadet punctum G, intra triangulum ABC. Quare extra cadet, quod eſt propoſitum.

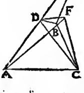
a 20. prim

THEOR. 7. PROPOS. 8.

DVORVM triangulorum iſoperimetrorum eandem habentium baſim, quorum vnius duo latera ſint æqualia, alterius vero inæqualia; maius erit illud, cuius duo latera æqualia ſunt.

Iſoſceles triangulũ maius eſt triangulo ſibi Iſoperimetro non Iſoſcele.

ESTO triangulum ABC, cuius latus AB, maius ſit latere BC, [a] conſtituaturque ſuper baſim AC, triangulo ABC, triangulum Iſoperimetrum ADC, habens latera AD, DC, æqualia & inter ſe, & lateribus AB, BC, ſimul ſumptis. Dico triangulum ADC, maius eſſe triangulo ABC, Producatur enim AD, ad partes D, ſitq; DE, æqualis ipſi AD, ſiue ipſi DC. Ducantur quoque rectæ DB, BE. [b] Quoniam igitur AB, BE, maiores ſunt, quam AE, hoc eſt, quam AD, DC, ſimul, hoc eſt, quam AB, BC, ſimul; ablata communi AB, erit BE, maior quam BC. Et quia latera ED, DB, trianguli EDB, æqualia ſunt lateribus CD, DB, trianguli CDB. At vero baſis BF, baſe BC, maior, [c] erit angulus EDB, maior angulo CDB. Quare angulus EDB, maior eſt, quam dimidium anguli EDC: Eſt aũt angulus DAC, dimidiũ anguli EDC; [d] propterea quod anguli DAC, DCA, æquales ſunt, [e] & his ſimul ſumptis æqualis quoque externus angulus E-



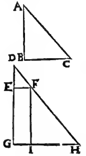
a 7. huius. — b 20. prim. — c 25 prim. — d 5 primi. — e 32 prim.

f 21. prim. lus EDC. Maior igitur angulus EDB, angulo DAC.[f] Fiat angulus EDF, æqualis angulo interno DAC; cadetq;
g 23. pri. DF, recta ſupra rectam DB,[g] æquidiſtabitque rectæ AC. Producatur DF, donec cum AB, protracta conueniat
h 37 pri. in F, ducaturque recta FC.[h] Quoniam igitur triangula ADC, AFC, æqualia ſunt, triangulum autem AFC, maius eſt triangulo ABC; maius quoque erit triangulum ADC, triangulo ABC. Quam ob rem duorum triangulorum Iſoperimetrorum eandem habentium baſim, &c. quod demonſtrandum erat.

THEOR. 8. PROPOS. 9.

Proprietas duorum triangulorum rectangulorum ſimilium.

IN ſimilibus triangulis rectangulis quadratum à lateribus, quæ angulis rectis ſubtenduntur, tanquam ab vna linea, deſcriptum, æquale eſt quadratis duobus ſimul, quæ à reliquis homologis lateribus tanquam ex duobus lineis, ita vt quęlibet duo latera homologa conficiant vnam lineam rectam, deſcribuntur.



SINT triangula rectangula ſimilia ABC, DEF, ita vt anguli B, & E, ſint recti, anguli vero, C, & F, inter ſe ęquales; itéq; anguli, A, & D, inter ſe æquales; homologaq; latera AB, DE; Item BC, EF, & AC, DF. Dico quadratum ex AC, DF, tanquam ex linea vna, deſcriptum, æquale eſſe duobus quadratis, quorum vnum ex AB, DE, tanquam ex vna linea, alterum vero ex BC, EF, tanquam ex vna quoque linea, deſcribitur. Producta namque DE, ad partes E, ſumatur EG, æqualis rectæ AB. & ducatur GH, recta æquidiſtans rectæ EF, donec cum FD, producta conueniat in puncto H; Deinde per F, ducatur recta FI, æquidiſtans rectæ EG. Erit igitur triangulum FIH, æquiangulum triangulo DEF, hoc eſt, triangulo ABC,[a] Nam angulus FIH, æqualis eſt angulo G,[b] & hic æqualis angulo DEF, hoc eſt, angulo B; angulus vero H, æqualis eſt angulo DFE, hoc eſt, angulo C;[c] ac proinde & angulus IFH, angulo A: Sunt autem & latera AB, FI æqualia;[e] Nam recta FI, eſt æqualis rectæ FG, hæc autem rectæ AB, ſumpta fuit æqualis.[d] Igitur & latera BC, IH; item AC, FH, æqualia, inter ſe erunt. Quare recta DH, compoſita erit ex AC, & DF, Recta vero DG, ex AB, & DE. Recta denique GH, ex BC, & EF;[f] quod GI, rectæ æqualis ſit rectæ EF.[g] Et quoniam quadratum rectæ DH, æquale eſt quadratis rectarum DG, GH, ſimul conſtat verum eſſe, quod proponitur. In ſimilibus igitur triangulis rectangulis quadratum à lateribus, quæ angulis rectis ſubtenduntur, &c. quod erat demonſtrandum.

a 29 primi
b 29. prim.
c 32. prim.
d 34 prim.
e 26. prim.
f 34 prim.
g 47 prim.

PROBL. 2. PROPOS. 10.

Qua arte ... triangula iſoſcelia ſimilia, quidem inter ſe: Iſoperimetra vero aliis duobus Iſoſcelibus.

DATIS duobus triangulis Iſoſcelibus, quorum baſes inæquales exiſtant, duoq; latera vnius æqualia ſint duobus lateribus alterius; Super eiſdem baſibus duo alia triangula iſoſcelia inter ſe quidem ſimilia ſumpta, prioribus verò ſimul ſumptis Iſoperimetra ſimul ſumpta, conſtituere.

SINT ſuper baſes æquales AB. CD, duo triangula Iſoſcelia AEB, CFD, ſintque quatuor lineæ AE, EB, CF, FD, inter ſe æquales; maior autem ſit baſis AB, baſe CD: quibus poſitis,[a] erit angulus D, maior angulo F, ideoque triangula non ſimilia, cum nec æquiangula. Oporteat iam ſuper baſes eaſdem AB, CD, conſtituere alia duo triangula iſoſcelia inter ſe quidem ſimilia, iſoperimetra vero ſimul ſumpta prioribus triangulis ſimul ſumptis. Ponatur recta GH, æqualis quatuor rectis AE, EB, CF, FD,[b] diuidaturque in puncto K, vt eſſet recta compoſita ex AB, & CD, diuiſa in puncto B, hoc eſt, ſit ea proportio GK, ad KH, quæ eſt AB, ad CD. Et quia maior eſt recta AB, quam recta CD, maior quoque erit recta GK, quam recta KH, cum vtrobique ſit proportio maioris inæqualitatis. Diuidatur vtraque GK, KH, bifariam in punctis L, & M. Itaque cum ſit vt GK, ad KH, ita AB, ad CD, erit componendo, vt GH, ad KH, ita AB, CD, ſimul ad CD: Eſt autem GH, minor, quam AB, CD, ſimul,[c] quod & quatuor rectæ AE, EB, CF, FD, quæ æquales ſunt rectæ GH, maiores ſint, quam AB, CD.[d] Igitur & KH, maior erit quam CD: Eademque ratione maior erit GK, quam AB. Quoniam igitur trium rectarum AB, GL, LK, duæ reliquę ſunt maiores omnifariam ſumptæ, (Duæ enim GL, LK, maiores ſunt quam AB, quod tota GK, maior ſit, quam AB, vt modo fuit oſtenſum; Manifeſtum autem eſt, AB, GL, maiores eſſe reliqua LK; Itemque AB, LK, reliqua GL, eſſe maiores, propterea quod GK, diuiſa eſt bifariam in puncto L. Idem quoque dices de tribus rectis CD, KM, MH.)[e] conſtituatur ex tribus rectis AB, GL, LK, triangulum ANB, quod erit Iſoſceles, cadetque punctum N, extra triangulum AEB, cum AE, EB, ſimul dimidium conſtituant rectæ GH; at vero AN, NB, ſimul maius efficiant, quam dimidium



a 25. primi.
b 10. ſexti.
c 20. prim.
d 14 quin.
e 22. prim.

rectæ

rectæ GH. [d] Ruſſus ex tribus rectis CD, KM, MH, conſtituatur quoque triangulum COD, quod Iſoſceles erit, cadetque punctum O, intra triangulum CFD, eo quod CF, FD, ſimul æquales ſint dimidio rectæ GH; at CO, OD, ſimul minores ſint dimidio rectæ GH. Et quoniam quatuor latera AE, EB, CF, FD, ſimul; Item AN, NB, CO, OD, ſimul æqualia ſunt rectæ GH, erunt priora quatuor ſimul, poſterioribus quatuor ſimul æqualia; additis ergo communibus AB, CD, fient ſex latera AE, EB, BA, CF, FD, DC, ſimul æqualia ſex lateribus AN, NB, BA, CO, OD, DC, ſimul, ideoq; triangula ANB, COD, ſimul iſoperimetra erunt triangulis AEB, CFD, ſimul. Dico iam, quod & ſimilia inter ſe ſunt triangula ANB, COD. Nam quoniam eſt, vt AB, ad CD, ita GK, ad KH, [e] hoc eſt, ita GL, ad KM, hoc eſt, ita AN, ad CO, & NB, ad OD; erit permutando, vt AB, ad AN, ita CD, ad CO; & vt AN, ad NB, ita CO, ad OD. Proportionalia ergo ſunt latera triangulorum ANB, COD, [f] ac proinde æquiangula inter ſe erunt, & idcirco ſimilia. Quare datis duobus triangulis Iſoſcelibus, quorum baſes inæquales exiſtant, &c. conſtituimus. quod faciendum erat.

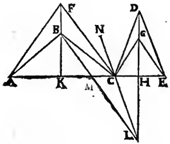
d 22. pri. *e 15. quin.* *f 5. ſexti.*

THEOR. 9. PROPOS. 11.

DVO triangula Iſoſcelia ſimilia ſuper inæqualibus baſibus conſtituta, vtraque ſimul maiora ſunt duobus triangulis Iſoſcelibus, vtriſque ſimul, quæ habeant eaſdem baſes cum prioribus, ſintq; diſſimilia quidem inter ſe, at iſoperimetra prioribus duobus, nec non quatuor latera inter ſe habeant æqualia.

Triangula duo Iſoſcelia ſimilia maiora ſunt duobus Iſoſcelibus non ſimilibus, quæ illis ſint Iſoperimetra, baſeſque habeant eaſdē.

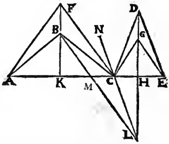
SVPER baſibus inæqualibus AC, CE, ſint duo triangula Iſoſcelia inter ſe non ſimilia ABC, CDE, ita vt quatuor latera AB, BC, CD, DE, inter ſe ſint æqualia. [a] Atque ſuper eiſdem baſibus AC, CE, conſtituãtur alia duo triangula Iſoſcelia AFC, CGE, ſimilia inter ſe, & iſoperimetra ſimul prioribus triangulis ſimul. Dico duo triangula AFC, CGE, ſimul maiora eſſe duobus triangulis ABC, CDE, ſimul. Ponantur enim AC, CE, ſecundum lineam rectam vnam; ſitque AC, baſis maior baſe CE. Deinde ex F, per B, ducatur recta FBK, ſecans rectam AC, in puncto K; Itē ex D, per G; punctū ducatur recta DGH, ſecans rectam CE, in H. Et quia latera AF, FB, triãguli AFB, æqualia ſunt laterib⁹ CF, FB, trianguli CFB, & baſis AB, baſi BC, æqualis, [b] erit angul⁹ AFB, angulo CFB, æqualis. Rurſus quia latera AF, FK, trianguli AFK, æqualia ſunt lateribus CF, FK, trianguli CFK, & angulus AFK, angulo CFK, æqualis, vt probatum eſt; [c] erunt baſes AK, KC, æquales, & anguli ad K, æquales quoque, hoc eſt, recti. Eadem ratiocinatione concludemus rectam CE, in puncto H, diuidi bifariam, angulosque ad H, eſſe rectos. Producatur recta DH, ad partes H, ſumaturque HL, æqualis rectæ DH, & extendatur à puncto L, per punctum C, recta LCN. Quoniam vero latera DH, HC, trianguli DCH, æqualia ſunt lateribus LH, HC, trianguli LCH, & anguli ad H, æquales, vtpote recti; [d] erunt baſes DC, LC, æquales; & anguli DCH, LCH, æquales etiam: Atqui angulus DCH, maior eſt angulo GCH, & angulus GCH, æqualis eſt angulo FAK, propter ſimilitudinem triangulorum GCE, & FAC, hoc eſt, angulo FCA, [e] qui angulo FAC, æqualis eſt. Erit igitur angulus DCH, hoc eſt angulus LCH, qui illi oſtenſus eſt æqualis, hoc eſt, angulus NCK. [f] qui angulo LCH, ad verticē eſt æqualis, maior etiam angulo FCA: & ob id CN, recta extra rectam CF, cadet neceſſario; & rectæ LC, CB; propterea comprehendent ad partes K, angulū BCL. Quare ſi ducatur recta BL, ſecabit ea lineam CK, in aliquo puncto inter puncta, C, & K, quod ſit M. Quoniam vero rectæ AB, BC, CD, DE, ſimul æquales ſunt rectis AF, FC, CG, GE, ſimul, propter triangula iſoperimetra, erunt quoque dimidia earum æqualia inter ſe, nimirum rectæ BC, CD, hoc eſt, BC, CL, ſimul æquales ipſis FC, CG, ſimul. [g] Sunt autem rectæ BC, CL, ſimul maiores recta BL. Igitur & FC, CG, ſimul maiores erunt eadem recta BL: ideoq; quadratum ex FC, CG, tanquam ex vna linea, deſcriptum maius erit quadrato BL. [h] Quod autem ex FC, CG, tanquam ex vna linea, deſcribitur quadratum, æquale eſt quadrato ex FK, GH, tanquam ex vna linea deſcripto, vna cum quadrato, quod ex KC, CH, tanquam ex vna linea, deſcribitur. [i] Quadratum vero ex LB, deſcriptum æquale eſt quadrato ex BK, LH, hoc eſt, ex BK, DH, tanquam ex vna linea, deſcripto, vna cum quadrato, quod ex KM, MH; tanquam ex vna linea, deſcribitur; quod triangula rectangula BKM, LHM, ſint ſimilia inter ſe. [k] Sunt enim anguli M, ad verticem æquales, & anguli K, H, recti, [l] ideoque & reliqui KBM, HLM, æquales. Igitur quadratum ex FK, GH, tanquam ex vna linea, deſcriptum, & quadratum ex KC, CH, tanquam ex vna linea, deſcriptum, hoc eſt, quadratum KH, vtraque ſimul maiora ſunt quadrato ex BK, DH, tanquam ex vna linea, deſcripto, & quadrato ex KM, MH, tanquam ex vna linea deſcripto, hoc eſt, quadrato KH, vtriſque ſimul. Ablato ergo communi quadrato KH, erit quadratum ex FK, GH, tanquam ex vna linea, deſcriptum maius quadrato ex BK, DH, tanquam ex vna linea, deſcripto; ideoq; maiores erunt rectæ lineæ FK, GH, ſimul rectis BK, DH, ſimul; Ac propterea, demptis communibus BK, GH, erit FB, reliqua maior, quam reliqua DG. Eſt autem & KC, maior quam HC, eo quod tota AC, cui⁹ dimidiū eſt KC, maior



a 10. huius *b 8. prim.* *c 4. prim.* *d 4. prim.* *e 5. prim.* *f 15. primi.* *g 20. prim.* *h 9. huius.* *i 9 huius.* *k 15. prim.* *l 32. pri.*

ior ponitur quam tota CE, cuius dimidium eſt HC. Quapropter rectangulum ſub FB,KC, contentum, maius erit rectangulo ſub DG,HC, contento. Et quoniam triangulum FBC, dimidium eſt rectanguli ſub FB,KC, cõtenti; (Nam ſi ſuper FB, conſtituatur rectangulum altitudinem habens KC, ita vt triangulum, & rectangulum inter eaſdem ſint parallelas; [a] erit triangulum parallelogrammi dimidiũ. quod quidem parallelogrammum idem eſt, quod rectangulum ſub FB,KC, contentum, vt conſtat.). Triangulum vero DGC, dimidium eſt rectanguli contenti ſub DG,HC; (Si enim ſuper DG, conſtituatur rectangulum altitudinem habens HC, ita vt triangulum, & rectangulum inter eaſdem ſint parallelas: [b] erit triangulum parallelogrammi dimidium, quod quidem parallelogrammum idem eſt, quod rectangulum ſub DG HC. cõtentum, vt conſtat.) erit quoq; triangulum FBC, maius triangulo DGC; ac propterea duplum trianguli FBC, nimirum rectilineum AFCBA, maius erit duplo trianguli DGC, vtpote rectilineo CDEGC. Quocirca, addito communi compoſito ex triangulis ABC,CGE; erunt triangula AFC,CGE, vtraque ſimul maiora triangulis ABC,CDE, vtriſque ſimul. Duo ergo triangula Iſoſcelia ſimilia ſuper inæqualibus baſib' conſtituta, &c. quod oſtendendum erat.

a 41. prim.



b 41. prim.

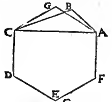
THEOR. 10. PROPOS. 12.

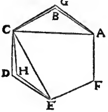
Inter Iſoperimetras figuras æqualia numero habentes latera maxima & æquilatera eſt & æquiangula.

ISOPERIMETRARVM figurarum latera numero æqualia habentium maxima & æquilatera eſt, & æquiangula.

ESTO figura quotcunque laterum ABCDEF, maxima inter omnes totidem laterum ſibi Iſoperimetras, ita vt maior dari non poſſit. Dico eam eſſe æquilateram, & æquiangulam. Sit enim, ſi fieri poteſt, primum non æquilatera, ſed ſint latera AB, BC, proxima inæqualia. Ducta igitur recta AC, [a] ſi conſtituatur ſuper AC, triangulum Iſoſceles AGC, quod ſit iſoperimetrum triangulo ABC; erit tota figura AGC.DEF, iſoperimetra figuræ ABCDEF. [b] Et quia triangulum AGC, maius eſt triangulo ABC; ſi addatur commune polygonum ACDEF, erit figura AGCDEF, maior quam figura ABCDEF. quod eſt contrarium hypotheſi. Non ergo inæqualia ſunt latera AB,BC, ſed æqualia. Eademque ratione oſtendemus, latera proxima BC.CD; Item proxima deinceps æqualia eſſe Maxima igitur figura inter ſibi iſoperimetras æqualia numero latera habentes æquilatera eſt, quod eſt primum.

a 7. huius.
b 8. huius.





SIT deinde, ſi fieri poteſt, figura ABCDEF, æquilatera quidem, vt iam demonſtratum eſt, at non æquiangula, ſed anguli B,D, non proximi inæquales ſint, maiorque angulus B, quam angulus D. Quoniam igitur demõſtratum eſt, figuram maximam eſſe æquilateram, erunt duo triangula ABC,CDE, Iſoſcelia, ita vt duo latera AB, BC. æqualia ſint duobus laterib' CD, DE: Ponitur autem angulus B, maior angulo D; [c] erit recta AC, maior quam recta CE. [d] Si igitur conſtituantur ſuper baſes AC, CE, alia duo triangula Iſoſcelia AGC,CHE, ſimilia inter ſe, & Iſoperimetra triangulis ABC,CDE; [e] erunt triangula AGC,CHE, vtraque ſimul maiora triangulis ABC,CDE, vtriſque ſimul. Si igitur addatur commune polygonum ACEF; erit figura AGCHEF, maior, quam figura ABCDEF, quod cum hypotheſi pugnat, quod hæc omnium maxima ponatur, Non ergo inęquales ſint anguli B,D, ſed æquales. Eademque ratione oſtendem', angulos non proximos C,E, æquales eſſe, & binos alios quoſuis non proximos. Ex quo efficitur, totam figuram æquiangulam eſſe, nempe proximos etiam angulos inter ſe eſſe æquales. Si enim verbi gratia angulus B, non dicatur æqualis eſſe angulo C; cum angulus C, æqualis ſit non proximo angulo E; erit quoque angulus B, angulo E, non æqualis, quod abſurdum eſt. Bini enim anguli non proximi inter ſe æquales ſunt, vt oſtendimus. Maxima ergo figura inter ſibi Iſoperimetras æqualia numero latera habentes non ſolum æquilatera, ſed & æquiangula eſt. Quocirca Iſoperimetrarum figurarum latera numero æqualia habentium maxima & æquilatera eſt, & æquiangula. quod demonſtrandum erat.

c 24. prim.
d 10. huius
e 11. huius

SCHOLIVM.

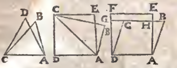
Quæ obſeruanda ſint

CIRCA demonſtrationem prioris partis huius propoſ. obſeruandum eſt, accipienda eſſe duo latera inæqualia

æqualia proxima inter ſe, ita vt angulum conſtituant, nullumque aliud inter ea interponatur, qualia ſunt latera accepta AB, BC, angulum B, efficientia. Hac enim ratione, ducta recta AC, factum erit triangulum ABC, cuius duo latera AB, BC, inæqualia ſunt, vt in demonſtratione aſſumebatur. Neque vero dubitare quis poterit, in figura non æquilatera, qualis ponitur ABCDEF, accipi poſſe duo latera proxima inæqualia. Nam ſi quis dicat latera AB, BC, eſſe æqualia, ſumemus latera AB, AF, quæ ſi dicantur etiam æqualia eſſe, accipiemus AF, FE: Et ſi hæc adhuc æqualia eſſe dicantur, capiemus EF, ED; & ſic deinceps progrediemur, donec ad duo latera proxima inæqualia veniamus, quæ angulum conſtituant. Neceſſario autem ad duo huiuſmodi latera perueniemus: alias figura eſſet æquilatera, quod non conceditur. *in demonſtratione huius prop.*

QVOD vero ad poſterioris partis demonſtrationem attinet, aduertendum eſt, in figuris multilateris accipiendos eſſe duos angulos inæquales non proximos inter ſe, ita vt inter ipſos vnus, vel plures anguli interponantur, quales ſunt anguli accepti B, D, inter quos ponitur angulus C. Hac enim ratione duæ rectæ AC, CE, dictos angulos ſubtendentes ſe mutuo non interſecabunt, conſtituenturque duæ figuræ ABCDEF, AGCHEF, ex additione communis figuræ ACEF, ad triangula ſupra baſes AC, CE, constructa: quod non contingeret, ſi duo anguli inæquales proximi inter ſe ſumerentur, vt conſtat. Non eſt autem in dubium vertendum, an tales duo anguli poſſint accipi. In omni enim figura multilatera non æquiangula neceſſario erunt aliqui duo anguli non proximi inter ſe inæquales. Nam in propoſita figura ABCDEF, comparabimus angulum B, cum omnibus non proximis angulis D, E, F, qui neceſſario duo erunt in pentagono, in hexagono vero tres, & ita deinceps. Quod ſi vni alicui eorum fuerit inæqualis, habebimus iam duos angulos non proximos inter ſe inæquales, nempe angulum B, & illum, cui inæqualis eſt: Si vero omnibus dicatur æqualis, erit tunc angulus B, ſaltem alteri proximorum inæqualis, alias figura eſſet æquiangula. Si ergo inæqualis fuerit angulo A, erit angulus A, tam angulo E, quam angulo D, non proximo inæqualis, cum vtriuis horum æqualis ponatur angulus B: Si vero inæqualis fuerit angulo C, erit angulus C, tam angulo E, quam angulo F, non proximo inæqualis, quod vtriuis horum angulus B, ponatur æqualis.

SED quoniam propoſitio hæc demonſtrata tantum eſt in figuris multilateris, vt ex iis conſtat, quæ proxime de duobus angulis nõ proximis inæqualibus diximus: In triangulis enim, & quadrilateris figuris anguli eiuſmodi reperiri non poſſunt, cum in triangulis æquilateris omnes anguli ſint æquales, vt ex coroll. propo. 5. lib. 1. Euclid. patet; in quadrilateris autem figuris omnia latera habentibus æqualia, (quoniam neceſſario ſunt parallelogramma, vt in ſcholio propoſ. 34. lib. 1. Euclid. oſtendimus) [a] ſinguli oppoſiti inter ſe ſint æquales: Idcirco totam banc propoſitionem in triangulis, & quadrilateris figuris ita demonſtrabimus. *a 34. primi.*



Sit primum triangulum ABC, inter ſibi Iſoperimetra triangula maximum. Dico illud æquilaterum eſſe & æquiangulum. Si enim non eſt æquilaterum, ſed latera AB, BC, ſunt inæqualia, [b] ſi ſuper baſem AC, conſtituatur triangulum Iſoſceles ADC, ita vt latera AD, DC, ſimul æqualia ſint lateribus AB, BC, ſimul; erunt triangula ABC, ADC, Iſoperimetra; [c] atque adeo ADC, maius, quam ABC, quod eſt contra hypotheſim. Non ergo inæqualia ſunt latera AB, BC, ſed æqualia. Eademque ratio eſt de cæteris. Æquilaterum ergo eſt triangulum ABC. Igitur, ex coroll. propoſ. 5. lib. 1. Euclid. & æquiangulum eſt, quod eſt propoſitum. *b 7. huius* *c 8. huius.*

DEINDE ſit quadrilaterum ABCD, inter omnia ſibi Iſoperimetra maximum. Dico illud eſſe & æquilaterum, & æquiangulum. Si enim non eſt æquilaterum, ſint latera AB, BC, ſi fieri poteſt, inæqualia, ducaturque recta AC. [d] Si igitur ſuper AC, conſtituatur triangulum Iſoſceles AEC, iſoperimetrum triangulo ABC; [e] erit triangulum AEC, maius triangulo ABC. Addito ergo communi triangulo ACD, erit quadrilaterum AECD, maius quadrilatero ABCD, quod eſt contra hypotheſim, cum ABCD, maximum ponatur. Non ergo inæqualia ſunt latera AB, BC, ſed æqualia. Eademque ratio eſt de cæteris. Æquilatera ergo eſt figura ABCD. *d 7. huius.* *e 8. huius.*

SIT iam quadrilatera figura ABCD, omnium iſoperimetrarum maxima, æquilatera, vt oſtenſum eſt, at non æquiangula, ſed anguli BAD, CDA, inæquales ſint. Quoniam igitur figura ABCD, cum ſit æquilatera, parallelogrammum eſt, vt in ſcholio propoſ. 34. lib. 1. demonſtrauimus; neuterque angulorum A, D, rectus eſt; (alias, [f] cum ambo duobus rectis ſint æquales, eſſent ambo recti) ſed vnus acutus, & obtuſus alter: ſi educantur ex A, & D, duæ lineæ perpendiculares AH, DG, occurrentes lateri BC, in H, & G; erit quoque AHGD, parallelogrammum. [g] Quia vero latera AB, DC, maiora ſunt lateribus AH, DG, producantur hæc, vt fiant rectæ AE, DF, lateribus AB, DC, æquales, iungaturque recta EF. Quo facto, erit figura AEFD, iſoperimetra parallelogrammo ABCD; cum latera AE, DF, lateribus AB, DC, æqualia ſint, latus vero AD, commune, & latus EF lateri BC, æquale, [h] quod vtrumque æquale ſit lateri oppoſito AD. Cum ergo figura AEFD, maior ſit parallelogrammo AHGD; [i] hoc autem æquale ſit parallelogrammo ABCD; erit quoque figura AEFD, maior parallelogrammo ABCD. Quare cum eidem ſit iſoperimetra, non erit ABCD, figura quadrilatera inter ſibi Iſoperimetras maxima, quod eſt contra hypotheſim. Non ergo inæquales ſunt anguli BAD, CDA, ſed æquales: atque adeo cum ABCD, ſit parallelogrammum, [k] erunt anguli oppoſiti B, C, angulis D, A, æquales, proptereaque tota figura æquiangula erit, quod eſt propoſitum. *f 29. primi.* *g 19. prim.* *h 34. prim.* *i 35. primi.* *k 34. prim.*

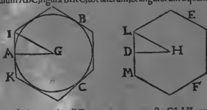
THEOR. 11. PROPOS. 13.

CIRCVLVS omnibus figuris rectilineis regularibus ſibi iſoperimetris maior eſt.

ESTO circulus ABC, figura autem regularis quotcunque laterum ei iſoperimetra DEF. Dico circulum

Circulus omnium figurarum recti linearum regularium ſibi iſoperimetrarum maximus eſt.

ABC,eſſe maiorem figura DEF.Sit enim G,centrum circuli ABC,& H,centrum figuræ DEF;De... circa circulum ABC,figura BIKC,tot laterum,& angulorum æqualium, quot continet figura DEF,per ... in ſcholio propoſ. 1... Euclid. docuimus. ... ex puncto contactus ... centrum G , ducatur ... AG, [a] quæ perpen... erit ad IK. Ducatur ... HD, ad LM, perpen... ris;[b] Diuidentq; rectæ ... HD, rectas IK, LM, ... vt conſtat , ſi figuris ...



a 18. tertij.
b 3. tertij.

DEF,circumſcribantur circuli.Ducantur quoque rectæ GI, HL, quæ diuident angulos I,& L, bifariam, ... nifeſtum eſt ex demonſtratione propoſ.12.lib.4. Euclid.Quoniam igitur toti anguli I,& L,ſunt æqua...es,p... ſimilitudinem figurarum,erunt etiam ipſorum dimidia(videlicet anguli AIG,DLH,)æqualia.Cum ergo & ... guli IAG,LDH.ſint æquales,vt ... te recti;[c] erunt triangula AIH,DLH,æquiangula. Quia vero ambitus ... BIKC, maior eſt (per 1.propol.lib. 1. Archimedis de ſphæra, & cylindro) ambitu circuli ABC; Ambitus a... circuli æqualis ponitur ambitui figuræ DEF; erit quoque ambitus figuræ BIKC, maior ambitu figuræ ... Cum igitur figuræ ſint regulares.& ſimiles,erit etiam latus IK,latere LM,maius;& ideo IA,dimidium la... maius quam LD,dimidium lateris LM. [d] Rurſus quoniam eſt,vt IA,ad AG,ita LD,ad DH; Et eſt IA ... quam LD;[e] erit quoq; AG,maior,quam DH.Quamobrem rectangulum contentum ſub AG , & d... bitu circuli ABC,[f] quod circulo ABC,eſt æquale,maius eſt,quam rectangulum contentum ſub DH,& di... ambitu figuræ DEF , hoc eſt,[g] quam area figuræ DEF. Circulus igitur omnibus figuris rectilin... regularibu... ſibi iſoperimetris maior eſt,quod oſtendendum erat.

c 32.primi.
d 4.ſexti.
e 14.quint.
f 4. huius
g 2.huius.

COROLLARIVM.

EX omnibus iis,quæ demonſtrata ſunt,perſpicuum eſt,circulum abſolute omnium figurar... rectilinearum ſibi iſoperimetrarum maximum eſſe.

Circulus omnibus figuris rectilineis ſibi iſoperimetris maior eſt.

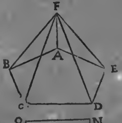
QVONIAM enim ex propoſitione 5.habetur, regularium figurarum iſoperimetrarum eam,quæ plu... latera continet,eſſe maiorem:Rurſus ex propoſitione 12.conſtat,inter omnes figuras iſoperimetras æqualia nu... mero latera habentes,eam maximam eſſe,quæ regularis eſt:Ex hac denique 13.propoſitione perſpicuum eſt,c... culum omnium figurarum iſoperimetrarum regularium eſſe maximum : Manifeſte concluditur,circulum ab... ſolute ac ſimpliciter omnium figurarum rectilinearum ſibi iſoperimetrarum maximum eſſe , quod eſt propo... ſitum.

THEOR. 12. PROPOS. 14.

Pyramis quælibet cui parallelepipedo ſit æqualis.

AREA cuiuslibet pyramidis æqualis eſt ſolido rectangulo contento ſub perpendiculari à ver... tice ad baſim protracta,& tertia parte baſis.

SIT pyramis , cuius baſis quotcunque laterum ABCDE, & vertex F Solidum autem rectangulum GN... cuius baſis G H I K , æqualis ſit terti... parti baſis ABCDE ; altitudo vero ſi... perpendicularis GL, æqualis altitudi... pyramidis,ſiue perpendiculari à verti... pyramidis ad eius baſim productæ. D... co ſolidum rectangulum GN , æqu... eſſe pyramidi ABCDEF. Ducantur ... nim ab omnibus angulis baſis G H I K ad aliquod punctum baſis oppoſitæ, ... mirũ ad L,lineæ rectæ,ita,vt conſtitua... tur pyramis GHIKL , eandem habe... baſim cum ſolido GN , eandemque a... titudinem & cum eodem ſolido G... & cum pyramide ABCDEF. [a] Q... niam igitur pyramis ABCDEF, trip... eſt pyramidis GHIKL; [b] Et ſolidu... GN, triplum quoq; eſt eiuſdem p... midis GHIKL : [c] erit ſolidum GN, ... ramidi ABCDEF,æquale.Quaprop... area cuiuslibet pyramidis æqualis eſt ... lido rectangulo,&c. quod erat oſte... dendum.



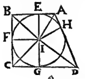
a ſchol. 6. duodec.
b coroll. 7. duodec.
c 9. quinti.

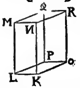
THEOR. 13. PROPOS. 15.

AREA cuiuslibet corporis planis ſuperficiebus contenti, & circa ſphæram aliquam circumſcriptibilis, hoc eſt, à cuius puncto aliquo medio omnes perpendiculares ad baſes eius productæ ſunt æquales, æqualis eſt ſolido rectangulo contento ſub vna perpendicularium, & tertia parte ambitus corporis.

Corpus quodlibet, in qua ſphæra deſcribi poteſt, cui parallelepipedo æquale ſit.

ESTO corpus planis ſuperficiebus contentum ABCD, circa ſphæram EFGH. cuius centrum I, deſcriptum, in quo ducantur ex I, ad puncta contactuum lineæ rectæ IE, IF, IG, IH, quæ ad baſes ſolidi erunt perpendiculares. Nam ſi verbi gratia per rectam IE, ducatur planum faciens in ſphæra, per propoſ. 1. lib. 1. Theod. circulum EFGH, [a] & in baſi rectam AB; tanget circulus EFGH, rectam AB, in puncto E, propterea quod ſphæra baſim non ſecat, ſed tangit. [b] Igitur IE, ad rectam AB, perpendicularis erit. Eadem ratione, ſi per IE, ducatur aliud planum à priori differens, fiet alius circulus in ſphæra, & alia linea recta in eadem baſi ſecans rectam AB, in E; ad quam etiam IE, perpendicularis erit: [c] Ac propterea IE, ad baſim ſolidi per illas rectas ductam perpendicularis erit. Non aliter oſtendemus rectas IF, IG, IH, ad alias baſes eſſe perpendiculares. Sit quoque ſolidum rectangulum LR, cuius baſis KLMN. ſit æqualis tertiæ parti ambitus corporis ABCD; altitudo vero ſiue perpendicularis LP, æqualis vni perpendicularium ex centro I, ad baſes corporis ABCD, cadentium; quæ omnes inter ſe æquales ſunt ex deſin. ſphæræ. Dico, ſolidum LR, corpori ABCD, æquale eſſe. Ducantur enim ex centro I, ad omnes angulos corporis ABCD, rectæ lineæ, vt totum corpus in pyramides, ex quibus componitur, diuidatur: quarũ quidem pyramidum baſes eædem ſunt quæ corporis, vertex autẽ communis centrum I. [d] Quoniam igitur quælibet harum pyramidum æqualis eſt ſolido rectangulo ſub perpendiculari LP, quæ ſingulis perpendicularibus corporis ABCD, æqualis ponitur, & tertia parte ſuæ baſis contento; Si fiant tot ſolida rectangula, quot ſunt pyramides, erunt omnia hæc ſimul æqualia ſolido rectangulo LR. (Si enim rectangulum KLMN, diuidatur in tot rectangula, quot baſes ſunt in ſolido propoſito, ita vt primũ æquale ſit tertiæ parti vnius baſis, & ſecundum tertiæ parti alterius, & ita deinceps, quandoquidẽ totum rectangulum KLMN, æquale ponitur tertiæ parti totius ambitus ſolidi; intelligantur autem ſuper illa rectangula conſtitui parallelepipeda; erunt omnia ſimul æqualia parallelepipedo LR.) [e] Cum ergo ſingula parallelepipeda ſingulis pyramidibus ſint æqualia; erunt quoque omnes pyramides, nempe corpus ABCD, ex illis compoſitum, æquale ſolido rectangulo LR. Quamobrem area cuiuslibet corporis planis ſuperficiebus contenti, &c. quod demonſtrandum erat.





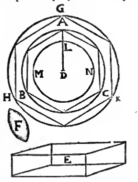
a 3. vndec.
b 18. tertij.
c 4. vnde.
d 14. huius.
e 14. huius.

THEOR. 14. PROPOS. 16.

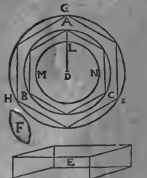
AREA cuiuslibet ſphæræ æqualis eſt ſolido rectangulo comprehenſo ſub ſemidiametro ſphæræ, & tertia parte ambitus ſphæræ.

Sphæra qualibet cui parallelepipedo ſit æqualis.

ESTO ſphæra ABC, cuius centrum D, ſemidiameter AD: Solidum autem rectangulum E, contentum ſub ſemidiametro AD, & tertia parte ambitus ſphæræ ABC. Dico corpus E, ſphæræ ABC, eſſe æquale. Nam ſi non eſt æquale: ſit, ſi fieri poteſt, primum maius, ſitque exceſſus corporis E, ſupra ſphæram ABC, quantitas F. Intelligatur circa cẽtrum D, deſcripta ſphæra GHK, maior quam ſphæra ABC, ita tamen, vt exceſſus ſphæræ GHK, ſupra ſphæram ABC, non ſit maior quantitate F, ſed vel æqualis, vel minor, hoc eſt, vt ſphæra GHK, ſit vel æqualis ſolido E, quando nimirum ipſa excedit ſphæram ABC, præciſe quantitate F; vel minor, ſi nimirum ipſa excedit ſphæram ABC, minori quantitate, quam F. Neceſſario enim aliqua ſphæra erit, quæ vel æqualis ſit magnitudini E, atq; adeo maior quam ſphæra ABC, vel maior quidem quã ſphæra ABC, minor vero quam magnitudo E, quæ maior ponitur, quam ſphæra ABC. [a] Inſcribatur deinde intra ſphæram GHK, corpus, quod non tangat ſphæram ABC, ita vt vnaquæque perpendicularium ex centro D, ad baſes iſtius corporis eductarum maior ſit ſemidiametro AD. Si igitur à centro D, ad omnes angulos dicti corporis ducantur lineæ rectæ, vt totum corpus in pyramides diuidatur, quarum baſes ſunt eædem, quæ corporis GHK, vertex autem communis centrum D: [b] erit quælibet pyramis æqualis ſolido rectangulo contento ſub eius perpendiculari, & tertia parte baſis; Atque idcirco ſolidum rectangulum contentum ſub ſemidiametro AD, & tertia parte baſis cuiuslibet pyramidis, minus ipſa pyramide erit. Et quoniam omnia ſolida rectangula contenta ſub ſingulis perpendi-



a 17. duod.
b 14. huius



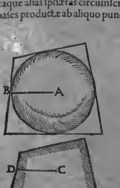
cularibus ex centro D, ad baſes corpo[illegible] pro[illegible]
gulis tertiis partibus baſium, ſimul equalia ſun[illegible]
ciunt autem omnes tertiæ partes baſium ſimul [illegible]
ambitus corporis; erit ſolidum rectangulum con[illegible]
midiametro AD, & tertia parte ambitus præfati c[illegible]
pti intra ſphæram GHK, minus corpore inſcripto. Q[illegible]
ambitus corporis inſcripti maior eſt ambitu ſphæræ ABC,
monſtrare Archimedes lib. 1. de ſphæra & cylindro propoſ.
que adeo & tertia pars ambitus dicti corporis maior tertia
ambitus ſphæræ ABC, erit ſolidum rectangulum co[illegible]nt
ſemidiametro AD, & tertia parte ambitus ſphæræ ABC, h
ſolidum E, multo minus corpore inſcripto intra ſphærã G
Poſita eſt autem ſphæra GHK, vel æqualis ſolido E vel
Igitur & ſphæra GHK, minor erit corpore intra ipſam de[illegible]
totum parte, quod eſt abſurdum. Quocirca ſolidum E,
non erit ſphæra ABC.

SIT deinde, ſi fieri poteſt, ſolidũ E, minus, quã ſphæra
excedaturq; à ſphæra ABC quantitate F. Intelligatur circa
trum D, ſphæra deſcripta LMN, minor quam ſphæra AB
tamen, vt exceſſus, quo ſphæra LMN, ſuperatur à ſphæra ABC, non ſit maior quantitate F, ſed vel æqual
minor, hoc eſt, vt ſphæra LMN, ſit vel æqualis ſolido E, ſi nimirum ipſa excedatur à ſphæra ABC, quantita
vel maior ſolido E, ſi videlicet ſphæra LMN, à ſphæra ABC, ſuperetur minori quantitate, quam F. Nec
n. aliqua ſphæra erit, quæ vel æqualis ſit ſolido E, atque adeo minor quam ſphæra ABC, vel minor quidem
a 17. duod. ſphæra ABC, maior vero quam magnitudo E, quæ minor ponitur, quam ſphæra ABC.[a] Deſcribatur dein
tra ſphæram ABC, corpus, quod minime tangat ſphæram LMN; ita vt vnaquæq; perpendicularium ex
D, ad baſes huius corporis inſcripti cadentium minor ſit ſemidiametro AD. Si igitur à centro D, ad omnes
angulos lineæ extendantur, vt totum corpus in pyramides reſoluatur, quarum baſes ſunt eædem, quæ c
b 14. huius. ABC, vertex autem communis centrum D;[b] erit quælibet pyramis æqualis ſolido rectangulo contento ſub
perpendiculari, & tertia parte baſis; Et ideo ſolidum rectangulum contentum ſub ſemidiametro AD, &
parte baſis cuiuſuis pyramidis, maius erit pyramide ipſa. Et quoniam omnia ſolida rectangula contenta ſ
gulis perpendicularibus ex centro D, ad baſes corporis dicti protractis, & ſingulis tertiis partibus baſium,
æqualia ſunt toti corpori; efficiunt autem omnes tertiæ partes baſium ſimul tertiam partem ambitus co
erit ſolidum rectangulum contentũ ſub ſemidiametro AD, & tertia parte ambitus dicti corporis ſphæræ
inſcripti maius corpore inſcripto. Cum igitur ambitus ſphæræ ABC, maior ſit ambitu corporis ſibi inſcripti,
que adeo & tertia pars ambitus ſphęræ maior tertia parte ambitus dicti corporis; erit ſolidum rectangulum
tentum ſub AD, ſemidiametro, & tertia parte ambitus ſphæræ ABC, hoc eſt, ſolidum E, multo maius co
inſcripto intra ſphæram ABC: Ponebatur autem ſphæra LMN, vel æqualis ſolido E, vel maior. Igitur & ſp
LMN, maior erit corpore intra ſphæram ABC, deſcripto, pars toto, quod eſt abſurdum. Non igitur ſolidum
minus erit ſphæra ABC. Cum ergo neq; maius ſit oſtenſum, æquale omnino erit: Ac propterea area cuiusl
ſphæræ æqualis eſt ſolido rectangulo comprehenſo ſub ſemidiametro ſphæræ, & tertia parte ambitus ſp
Quod demonſtrandum erat.

THEOR. 15. PROPOS. 17.

[illegible]hæra maior eſt omnibus corporibus ſibi iſoperimetris, & circa alias ſphæras circūſcriptibilibus, quæ planis ſuperficiebus continentur.

SPHÆRA omnibus corporibus ſibi iſoperimetris, quæ planis ſuperficiebus contineantu
circaque alias ſphæras circumſcriptibilia ſint, hoc eſt, quorum omnes perpendicular
ad baſes productæ ab aliquo puncto medio ſint æquales, maior eſt.



ESTO ſphæra A, cuius centrum A, & ſemidiameter A
Solidum autem circa aliquam ſphęram circumſcriptibile ſibi
perimetrum C, cuius vna perpendicularium CD. Dico ſphæ
A, maiorem eſſe ſolido C. Intelligatur enim circa ſphærã A,
pus deſcriptum ſimile prorſus ſolido C, ita vt ſingula quoque
tera contingant ſphæram A, hoc eſt, eius perpendiculares,
rum vna ſit AB, ſint quoque æquales, nempe ſemidiametri ſp
ræ A, exiſtentes. Itaque quoniam ambitus corporis circa ſp
ram A, maior eſt ambitu ſphæræ A, (per ea, quæ ab Archim
ſunt demonſtrata lib. 1. de ſphæra, & cylindro, propoſit. 27
erit quoque eiuſdem corporis ambitus maior ambitu c
C. Quare perpendicularis AB, hoc eſt, ſemidiameter ſph
maior erit perpendiculari CD. Quamobrem rectangulum
dum contentum ſub ſemidiametro AB, & tertia parte
a 16. huius. ſphæræ A,[a] quod ſphæræ A, æquale eſt, maius erit, quam re
gulum ſolidum contentum ſub perpendiculari CD, & tertia
b 15. huius. te ambitus corporis C,[b] hoc eſt, quam corpus C. Sphæra igi
omnibus corporibus ſibi iſoperimetris, quæ planis ſuperficie
contineantur, &c. maior eſt. Quod erat demonſtrandum.

COROL

COROLLARIVM.

CONSTAT hinc, ſphæram maiorem eſſe quolibet corpore regulari ſibi Iſoperimetro: quippe cum omnes perpendiculares e centro ad baſes corporis regularis inter ſe æquales ſint; propterea quod æquales ſunt ſemidia- ſphæræ,[c] quæ intra corpus deſcribi poteſt.

Sphæra maior eſt quauis corpore regulari ſibi Iſoperimetro

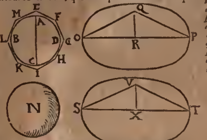
c 21. quintidec.

THEOR. 16. PROPOS. 18.

SPHÆRA omnibus corporibus ſibi iſoperimetris, & circa alias ſphæras circumſcriptibilibus, quæ ſuperficiebus conicis contineantur, ita vt latera omnia conica ſint æqualia, maior eſt.

Sphæra maior eſt omnibus corporibus ſibi Iſoperimetris, & circa alias ſphæras circumſcriptibilibus, quæ conicis ſuperficieb. continentur.

ESTO circulus ABCD, cui circumſcribatur figura regularis EFGHIKLM, ita vt numerus laterum à quaternario menſuretur, cuiuſmodi eſt quadratum, figura 8.12.16.20.24. vel 28. laterum, angulorumque æqua- ,&c. Ducaturque ex angulo E, per centrum ad angulum I, recta EI. Itaq; ſi circa manentem rectam EI, im- lem circumagatur planum, in quo eſt circulus ABCD, & figura EFGHIKLM, deſcribet circulus ſphæ- , figura vero corpus circa ſphæram conicis ſuperficiebus contentum, quarum ſuperficierum latera æqualia , nempe eadem, quæ figuræ, vt ab Archimede onſtratur propoſ. 22. & 27. lib. 1. de ſphæra & cy- ro. Sit iam ſphæra N, iſoperimetra corpori EF- IKLM, circa ſphæram ABCD, deſcripto. Dico ram N, dicto corpore eſſe maiorem. Quoniam m ambitus ſolidi EFGHIKLM, maior eſt (per opoſ. 27. lib. 1. Archimedis de ſphæra & cylindro) bitu ſphæræ ABCD, erit quoque ambitus ſphæ- N, maior ambitu ſphæræ ABCD, ideoque ſemi- meter ſphæræ N, maior erit ſemidiametro ſphæ- ABCD. Et quia ſuperficies ſphæræ quadrupla eſt propoſ. 31. lib. 1. Archimedis de ſphæra & cylin- o) maximi circuli in ſphæra; ſi ſumatur circulus P, quadruplus circuli maximi in ſphæra N; (quod



dem facile fiet, ſi diameter OP, dupla ſumatur diametri maximi circuli in ſphæra N.[a] Quoniam enim vt circulus OP, ad circulum maximum in ſphæra N, ita quadratum diametri OP. ad quadratum diametri circuli maximi in ſphæra N;[b] Eſt autem quadrati ad quadratum proportio duplicata proportionis laterum homologorũ, t quoque circulus OP, ad circulum maximum in ſphæra N, in proportione duplicata proportionis diametri OP, ad diametrum circuli maximi in ſphæra N. Cum igitur diametri ponantur habere proportionem duplam bebunt circuli proportionem quadruplam; quadrupla enim proportio duplicata eſt proportionis duplæ, vt in his numeris apparet. 1. 2. 4.) erit circulus OP, æqualis ſuperficiei ſphæræ N. Accipiatur rurſus circulus ST, æqualis circulo OP. Statuatur deinde ſupra circulum ST, conus rectus STV, axem VX, æqualem habens ſemidiametro ſphæræ N: Item ſupra circulũ OP, alter conus NPQ. cõſtruatur habens axem QR, æqualem ſemidiametro ſphæræ ABCD; eritque maior altitudo coni STV, quam coni OPQ. at baſes æquales erunt. Quare conus STV, maior erit cono OPQ;[c] propterea quod coni æqualium baſium eam inter ſe habẽt proportionem, quam altitudines. Quoniã vero ſphæra N, quadrupla eſt eius coni, qui baſem habet æqualẽ maximo in ſphæra N, circulo, & altitudinem æqualem ſemidiametro ſphæræ N, vt demonſtrauit Archimedes lib. 1. de ſphæra & cylindro propoſ. 32. Huius autem eiuſdem coni quadruplus eſt conus STV,[d] eo quod coni eandem habẽtes altitudinem proportionem habent quam baſes;[e] erit conus STV, ſphæræ N, æqualis. Eodem pacto, quia baſis coni OPQ. æqualis eſt ambitui corporis EFGHIKLM; quia & æqualis ſuperficiei ſphæræ N, quæ corpori illi iſoperimetra eſt: altitudo vero æqualis ſemidiametro ſphæræ ABCD, erit ſolido EFGHIKLM, æqualis conus OPQ, ex ea, quæ Archimedes lib. 1. de ſphæra & cylindro propoſ. 29. demonſtrauit. Quamobrem & ſphæra N, maior ſolido EFGHIKLM, conicis ſuperficiebus contento. Sphæra igitur omnibus corporibus ſibi iſoperimetris circa alias ſphæras circumſcriptibilibus, &c. maior eſt. Quod demonſtrandum erat.

a 2. duode.

b 20. ſexti.

c 14. duod.

d 11. duod.

e 9. quinti.

THEOR. 17. PROPOS. 19.

SPHÆRA quolibet cono, & cylindro ſibi Iſoperimetro maiot eſt.

Sphæra maior eſt quolibet cono & cylindro ſibi Iſoperimetro.

PROPOSITA enim quacunque ſphæra, ſi fiat conus baſem habens æqnalem ſuperficiei ſphæræ, id eſt, quadruplam maximi in ſphęra circuli, altitudinem vero ſemidiametro ſphæræ æqualem:[a] erit ſphæra huic cono , propterea qnod ad conum, cuius baſis eſt maximus in ſphæra circulus, & altitudo ſemidiameter ſphærę, hæra, ex propoſition. 32. lib. 1. Archimedis de ſphæra & cylindro, [b] quam prior conus baſem habens quam maximi circuli in ſphæra, hoc eſt, ſuperficiei ſphæræ æqualem, & altitudinem ſemidiametrum ſphæræ, rtionem habet quadruplam. Cum ergo ambitus coni baſem habentis ſuperficiei ſphæræ æqualem maior mbit ſphæræ, quippe cum ille hunc excedat tota ſuperficie coni, ſecluſa baſi, quæ ambitui ſphæræ ponitur ualis, liquido conſtat, ſi fiat conus ſphæræ iſoperimeter, hunc eſſe illo cono, ac proinde & ſphæra mino-

a 9 quinti.

b 11. duode.

RVRSVS ſi fiat cylindrus baſem habens æqualem ſuperficiei ſphæræ, & al[illegible] ſphæræ; [c] erit hic cylindrus triplus illius coni baſem habentis æqualem eidem ſuperficiei [illegible]
c 10. duod. ſemidiametrum eandem ſphæræ, quem ſphæræ æqualem eſſe proxime oſtendimus: ac pro[illegible] ſphæræ. Tertia ergo pars illius cylindri [illegible] cylindrus videlicet eandem habens baſem, altitu[illegible]
d 14. duod. tem altitudinis cylindri illius. [d] cum ille cylindrus ſit huius triplus [illegible] qualis erit ſphæræ. C[illegible] cylindrus habeat ambitum maiorem ambitu ſphæræ, quod ille hunc excedat ambitu [illegible] baſe; quis non videt, ſi fiat cylindrus ſphæræ Iſoperimeter, hunc eſſe priore illo cylindro, ac[illegible] minorem? Sphæra ergo quolibet cono, & cylindro ſibi iſoperimetro maior eſt. Quod demon[illegible]

S C H O L I V M.

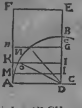
HÆC omnia fere ex Theone Alexandrino in commentariis in Almageſtum Ptolomæi & ex [illegible] xandrino in Mathematicis collectionibus, licet pleraque eorum clarius & facilius demonſtrata [illegible] ſunt: quæ vero ſequuntur, à nobis inuenta ſunt, ac demonſtrata.

PROBL. 3. PROPOS. 20.

Semicirculo & aliis partibus ſubduplis circuli æqualia rectangula & iſoperimetra conſtituere.

DATO ſemicirculo, vel quadranti, vel octauæ parti circuli, aut decimæſextæ, &c. [illegible] conſtituere iſoperimetrum & æquale; ſi linea recta peripheriæ detur æqualis.

SIT ſemicirculus ABC: Quadrans ABD, octaua pars circuli AND, pars ſextadecima AOD, [illegible] tur rectangulum AE, contentum ſub ſemidiametro AD, & ſub recta AF, quæ quartæ parti [illegible] ſit. Item rectangulum AG, ſub ſemidiametro AD [illegible] ctaua parte peripheriæ. Item rectangulum A[illegible] AD & ſub AK, parte decimaſexta peripheriæ. Item [illegible] AL, ſub ſemidiametro AD, & ſub AM, parte trigeſima [illegible] peripheriæ. Erit igitur ex iis, quæ lib. 4. cap. 7. ad [illegible] ſtendimus AE. ſemicirculo ABC; & AG, Quadranti [illegible] octauæ parti AND; & AL, parti ſextædecimæ AOD, æ[illegible] Dico hæc eadem rectangula eſſe iſoperimetra [illegible] partibus, ſingula ſingulis, quod quidem perſpicu[illegible] ſtructione. Nam AD, EF, æqualia ſunt diametro A[illegible] & [illegible] ſemicircumferentiæ ABC, nimirum duabus qua[illegible] cumferentiæ. Item AD, GH, æqualia ſunt ſemidiametris AD, DB, & AH DG, duabus partibus [illegible] quartæ parti circumferentiæ AB. Item AD, IK, duabus ſemidiametris AD, [illegible]N, & AK, DI, duabus ſ[illegible] id eſt, octauæ parti circumferentiæ AN. Item AD LM, duabus ſemidiametris AD, DO & AM. DL, d[illegible] tibus trigeſimis ſecundis, hoc eſt, parti decimæſextæ AO; Atque ita deinceps, ſi tam peripher[illegible] AO, q[illegible] AM, continue ſubdiuidatur. Dato ergo ſemicirculo, vel Quadranti, &c. rectangulum Iſoperimetrum, & [illegible] conſtituimus, quod faciendum erat.



HOC problema, quod ad ſemicirculum, ac Quadrantem attinet, aduertit etiam nuper R. P. O[illegible] cotius Mathematicus ingenioſus, cum problema Mathematicum per ſuos auditores exhiberet in Coll. Romano: quamuis illud inſtar Theorematis propoſuerit.

PROBL. 4. PROPOS. 21.

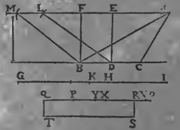
Parallelogrammum dato triangulo æquale & iſoperimetrum conſtituere.

D A T O triangulo cuicunque parallelogrammum æquale, atque iſoperimetrum conſtituere.

a coroll. 19. primi.

SIT datum triangulum qualecunque ABC. Per A ducatur AM, baſi BC, parallela. Et quia, ſi neuter angulorum B, C, rectus eſt, [a] vtrumque latus AB, AC maius eſt perpendiculari ex A, vel B, C, D, in oppoſitam parallelam demiſſa: ſi vero alter angulorum rectus eſt, [illegible] eſt, alterutrum laterum perpendiculare eſt ad [illegible] parallelas; vtrumque latus AB, AC, ſimul ma[illegible] quam duplum prædictæ perpendicularis; i[illegible] ſemiſſis aggregati ex vtroque latere maior [illegible] diculari eadem; id eſt, ſi accipiatur GH, late[illegible] HI, lateri AC, æqualis, vt tota GI, ſummæ late[illegible] AB, AC, æqualis ſit, diuidaturque GI biſariam [illegible] ſemiſſis GK, maior erit perpendiculari DE. Si [illegible] ex D, medio puncto baſis BC, ad interuallum [illegible] arcus circuli deſcribatur, ſecabit is rectam AM [illegible] liquo puncto, vt in L. Sumpta autem LM, ip[illegible] æquali, ducantur rectæ DL, BM, [b] quæ parall[illegible] ter ſe erunt; ideoque parallelogrammum eri[illegible] D[illegible] [c] triangulo ABC, æquale. Dico hoc idem tri[illegible] eſſe iſoperimetrum, quod perſpicuum eſt ex conſtructione: quippe cum DL, BM, vtraq; æqualis ſit ipſi [illegible]K, eſt, ſemiſſi laterum AB, AC, ac proinde ambæ DL, BM ſimul æquales ambobus lateribus AB, BD, AC, [illegible] & æ autem DL, LM. ſimul æquales baſi BC. Conſtructum ergo eſt parallelogrammum DM, non rectangul[illegible] æquale, & iſoperimetrum triangulo ABC.

b 33. primi.
c ſchol. 41. primi.



QVO[illegible]

[illegible] rectangulum eidem triangulo ABC, æquale, & iſoperimetrum, ita agendum erit. Erecta [illegible], DE, [d] erit rectangulum BE, triangulo æquale, ſed non iſoperimetrum; [e] quod BF, DE, [illegible] AB, AC, ſed BD, EF, baſi BC, æquales ac proinde ambitus rectanguli BE, ambitu trian- [illegible] que ſi producantur BF, DE, ad æqualitatem ſemiſſis laterum AB, AC, fiet quidem rectan- [illegible]o ABC, iſoperimetrum, ſed triangulo maius, cum ſuperet rectangulum BE. [f] Inuenta autem in- [illegible] media proportionali N; [g] erit quadratum rectæ N, rectangulo BE, ideoque & triangulo ABC, æ- [illegible] Quia vero BF, BD, ſimul maiores ſunt, quam dupla rectæ N; [h] eſtque BM, maior quam BF, erunt [illegible] ſimul multo maiores, quam dupla rectæ N. Sumpta ergo QP. ipſi BD, & PO, ipſi BM, æquali, vt [illegible]bus BD, BM, ſimul ſit æqualis: erit quoque QO, maior quam dupla rectæ N. [k] Secetur ergo QO, [illegible] N, ſit inter ſegmenta QR, RO, media proportionalis, perficiaturque rectangulum QS, ſub ſegmen- [illegible] RO, comprehenſum, [l] quod quadrato rectæ N, hoc eſt, rectangulo BE, vel triangulo ABC, æquale [illegible] idem eſſe triangulo ABC, iſoperimetrum. Quoniam enim QR, RS, ſimul, id eſt, recta QO, æquales [illegible] BD, BM, ſimul, ex conſtructione; erunt reliquæ ST, TQ reliquis LM, LD, æquales; ideoque rectan- Q[illegible] parallelogrammo BL, ac proinde & triangulo ABC, (cui parallelogrammum BK, iſoperimetrum [illegible]ſeum) erit iſoperimetrum. Dato igitur triangulo cuicunq; parallelogrammum, &c. conſtituimus, quod [illegible]dum erat.

d ſchol. 41. primi.
e coroll. 19. primi.
f 13. ſexti.
g 17. ſexti.
h ſchol. 25. quinti.
i 19. primi.
k ſchol. 13. ſexti.
l 17. ſexti.

SCHOLIVM.

QVOD ſi ſumatur punctum V, vtcunque inter R, & O, erit rectangulum ſub QV, VO, adhuc iſoperime- [illegible] triangulo ABC, ſed minus. Si vero capiatur punctum X, vtcunque inter R, & Y, (diuiſa QO, bifariam in [illegible]) ad huc rectangulum ſub QX. XO. iſoperimetrum triangulo ABC, ſed maius. Quadratum denique rectæ [illegible], iſoperimetrum quoque eſt triangulo ABC, & maius, quæ omnia ita demonſtrabimus. Prædicta rectangula, & quadratum rectæ QY, iſoperimetra eſſe triangulo ABC, hoc eſt, rectangulo QS, patet, cum bina latera circa [illegible]lum rectum æqualia ſemper ſint rectæ QO, hoc eſt, binis lateribus rectanguli QS. Eadem vero eſſe inæ- [illegible]ualia triangulo AB[C], ſic oſtendo. [m] Quoniam quadrata QV, VO, maiora ſunt quadratis QR, RO, ſimul: [illegible] Sunt autem tam illa duo, vna cum rectangulo ſub QV, VO, bis, quam hæc duo, vna cum rectangulo ſub QR, RO, bis, quadrato QO, æqualia; erit rectangulum ſub QV, VO, bis minus rectangulo ſub QR, RO, bis, ideoq; [illegible] rectangulum ſub QV, VO, ſemel rectangulo ſub QR. RO, ſemel minus erit. Non aliter oſtendemus, rectan- [illegible]gulum ſub QR, RO, minus eſſe rectangulo ſub QX. XO, hoc eſt rectangulum ſub QX XO, maius eſſe rectan- [illegible]lo ſub QR, RO. Denique [o] quoniam rectangulum ſub QX. XO, vna cum quadrato XY, æquale eſt quadra- [illegible] YO, vel QY, erit quadratum QY, maius rectangulo ſub QX. XO, ideoq; multo maius rectangulo ſub QR, [R]O, id eſt, triangulo ABC, quæ omnia demonſtranda erant.

m lemma 42. decimi.
n 4. ſecun.
o 6. ſecund.

EX quo conſtat, quadratum QY, ex ſemiſſe rectæ QO, deſcriptum maximum eſſe omnium rectangulorum ſub quibuſcunque ſegmentis rectæ QO, comprehenſorum, quod etiam ex propoſ. 12. huius lib. liquet.

PROBL. 5. PROPOS. 22.

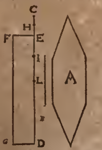
DATO rectilineo parallelogrammum rectangulum æquale, & Iſoperimetrum conſtituere. Oportet autem latus quadrati rectilineo æqualis, maius non eſſe ſemiſſe dimidiati ambitus dati rectilinei.

Rectangulum datæ figuræ iſoperimetrũ & æquale conſtituere.

SIT hexagonum datum, A, æquilaterum quidem, ſed non æquiangulum, ita vt B, ad latus quadrati illi æqualis [a] inuentum maius non ſit ſemiſſe dimidiati ambitus hexagoni. Sumpta ergo recta CD, æquali ſemiſſi ambitus hexagoni, erit B, recta non maior ſemiſſe ipſius CD, ſed vel æqualis, vel minor. [b] Secta autem CD, in E, ita vt B, ſit media proportionalis inter ſegmenta DE. EC. fiat rectangulum EG, contentum ſub ſegmentis DE, [E]C. Dico rectangulum EG, æquale eſſe, & iſoperimetrum hexagono A. Quoniam enim tres DE, B, EC, continue proportionales ſunt; [c] erit rectangulum EG, quadrato B, id eſt, hexagono A, æquale. Et quia duo latera [D]E, EF, æqualia ſunt rectæ CD, hoc eſt, ſemiſſi ambitus hexagoni A, ideoque reliquæ duæ FG, GD, alteri ſemiſſi: erit totum rectangulum EG, hexagono A. iſoperimetrum. Dato ergo rectilineo parallelogrammum rectangulum æquale, & Iſoperimetrum conſtituimus: quod erat faciendum.

a 14. ſecun.
b ſchol. 13. ſexti.
c 16. ſexti.

SCHOLIVM.



QVOD ſi B, latus quadrati foret maius [ſe]miſſe medii ambitus rectilinei A, hoc eſt, ma[ius ſemiſſe] rectæ CD, non poſſet CD, ita ſecari, vt B, eſſet medio loco proportionalis inter ſegmenta, [vt l]iquido conſtat.

IAM vero ſi ſumatur punctum H, inter [C], E, vtcunq; erit rectangulum ſub DH, HC, [adhu]c iſoperimetrum figuræ A, ſed tamen mi[nus. S]i vero accipiatur punctum I, vtcunque inter E, & L, punctum medium rectæ CD; erit adhuc rectangulum ſub DI, IC, figuræ A, iſoperimetrum, maius tamen. Sic etiam quadratum ſe[miſſi]s DL, erit iſoperimetrum eidem figuræ & [ma]ius; quæ omnia demonſtrabũtur, vt in ſcho[li]o præcedentis problematis dictum eſt.

APPENDIX.

DE circulo per lineas quadrando.

Quo pacto reperiatur per numeros quadratum circulo æquale, & contra ex doctrina Archimedis.

1 LOCVS hic me admonet, vt quoniam hoc libro demonſtratum eſt, circulum figurarum o[illegible] ſibi iſoperimetrarum eſſe maximum, breuiter doceam, qua ratione dato circulo quadratum conſtrui p[illegible] le, & viciſſim dato quadrato circulus æqualis; atque id per lineas: cum lib. 4. c. 7. copioſe traditum ſit, qu[illegible] inuẽtis ab Archimede, per numeros circulus quadrandus ſit, hoc eſt, qua ratione area circuli, ſiue [illegible] ex diametro, tum ex circumferentia cognita ſit inuenienda: Huius enim areæ radix quadrata, lat[u]s eſt quad[ratu] quod circulo æquale eſt. Sic è contrario cap. 8. eiuſdem lib. regula 1. Num. 1. docuimus, qua via ex d[a]ta circ[illegible] indaganda ſit tam circumferentia, quam diameter illius circuli: hoc eſt, propoſito quadrato, inſtar areæ c[illegible] licuius, quomodo circulus deſcribendus ſit illi quadrato æqualis. Inuenta enim diametro per prædic[illegible] lam 1. Num. 1. cap. 8. lib. 7. circulus illius diametri erit is, qui quæritur. Viſum eſt autem appendicem hanc [illegible] huic ſeptimo adiungere, quod tractatio de circuli Tetragoniſmo, ſiue quadratura, non parum affinis [illegible] de [illegible] perimetris figuris diſputationi.

Circuli quadratura per numeros ſecundum Arabes falſa.

QVADRATVRA autem circuli per numeros, quam Arabes tradiderunt, & quam Ioſephus Scaliger ſuis Cyclometricis elementis veram eſſe credit, omnino reĳcienda eſt, cum ſit extra limites Archimed[i]s, quos conſtat, proportionem circumferentiæ ad diametrum minorem debere eſſe tripla ſeſquiſeptima, maiorem vero tripla ſuperdecupartiente ſeptuageſimas primas, quod in numeris Arabum non cernitur. Dicunt enim, proportionem circumferentiæ ad diametrum eſſe potentia decuplam: adeo vt ſi quadratum circumferentiæ ponatur 10. quadratum diametri ſit 1. quod falſum eſt. Nam cum radix quadrata numeri 1[0]. ſit maior quam 3[1/7]. quod huius radicis quadratum ſit tantum $9\frac{43}{49}$. Radix autem vnitatis ſit 1. eſſet maior proportio circũferentiæ ad diametrũ, quam tripla ſeſquiſeptima: cum tamen ſecundum Archimedem ſit minor. Item quia poſita diametro 7. circumferentia minor eſt, quam 22. ex Archimede; erit quadratum circumferentiæ minus, quam 484. quod ad 49. quadratum diametri minorem proportionem habet, quam decuplam; quippe cum 490. ad 49. proportionem habeant decuplam. Minor igitur eſt proportio quadrati circumferentiæ ad quadratum diametri, quam decupla.

Quadratura circuli per numeros ex Alberto Durero falſa.

SIMILI modo reĳcienda eſt ratio quadrandi circuli per numeros Alberti Dureri, qui exiſtimat, diui[ſa di]a-metro circuli in octo partes æquales, diametrum quadrati circulo æqualis eſſe 10. adeo vt diameter quadrati [cir]culo æqualis ad diametrum circuli proportionem habeat, quam 10. ad 8. quod etiam falſum eſt. Nam cum quadratum diametri 10. ſit 100. [a] duplumque quadrati, cuius diameter eſt 10. & quod circulo diametri 8. dicitu[r] æquale: erit quadratum circulo æquale 50. Sed ex diametro 8. reperitur area circuli maior, quam vera, $50\frac{2}{7}$. minor autem, quam vera, $50\frac{18}{71}$. vt cap. 7. lib. 4. Numer. 4. tradidimus. Vera ergo circuli area maior erit, quam $50\frac{18}{71}$. atque adeo multo maior, quam 50. Eſt igitur quadratum Alberti minus area circuli, non autem æquale.

a ſchol. 47. primi.

Falſa quadratura circuli per lineas Campano aſcripta.

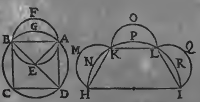
2 IAM vero, vt ad quadraturam circuli per lineas aggrediamur, pudet me refellere illam, quæ imperiti[s] vera eſſe videtur, & quam ſciolus, neſcio quis, Campano Mathematico non indocto affinxit, typiſq; mandauit. Eſt autem talis. Linea recta circumferentiæ circuli æqualis (quo pacto autem eiuſmodi linea inueniatur, n[on] docet) ſecetur in 4. partes æquales, ex quibus quadratum conſtituatur, quod ſciolus ille circulo dicit eſſe æqua[le] quæ res omnino Geometra indigna eſt, & plane ridicula. Si enim quadratum illud circulo eſt Iſoperimetrum, [b] circulus autem omnium figurarum rectilinearum ſibi iſoperimetrarum capaciſſimus eſt, quis non videt, quadratum illud circulo minus eſſe?

b 13. huius.

Quadratura Hyppocratis Chij.

3 DE Tetragoniſmo etiam Hyppocratis Chij nihil dicerem, niſi in eius demonſtratione acumen ingenij lateret, quamuis metam propoſitam non attingat Ita enim progreditur. Sit quadrandus circulus AFBE, cuius diameter AB, ex qua deſcribatur quadratum ABCD, [c] circa quod circulus deſcribatur ABCD, cuius diameter BD, datum circulum AFBE, [ſe]cet in E. Ducta ergo recta AE, [d] eri[t] angulus AEB, in ſemicirculo rectus [e] ideoque perpendicularis AE, diuidet baſem BD, trianguli Iſoſcelis ABD, bifariam: ac proinde E, centrum erit circuli ABCD. [f] Et quia quadratum diametri BD, duplum [eſt] quadrati diametri AB; [g] eſtque v[t] quadratum BD, ad quadratum AB, ita circulus ABCD, ad circulum AFBE, erit quoque circulus circul[i] duplus; & ſemicirculus BAD, ſemicirculi AFB; ideoque ſemiſſis ſemicirculi BAD: id eſt, quadrans ABE, (e[ſt] enim ABE, quadrans, ob angulum rectum in centro E,) ſemicirculo AFB, æqualis. Dempto igitur commu[ni] ſegmento AGB, reliquum triangulum AEB, reliquæ Lunulæ AFBGA, æquale erit: ac proinde ſi triangulo [A]EB quadratum æquale, erit idem hoc quadratum Lunulæ AFBGA, æquale. Atque ita quadrata eſt Lunula AFBGA.

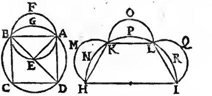
c 9 quinti. d 31. tertij. e ſchol. 26. primi.



f ſchol. 27. primi. g 2. duodec.

DEIN

DEINDE ſit recta HI, diametri AB, dupla, circa quam ſemicirculo deſcripto, aptentur in eo tres rectæ ſemidiametro huius circuli, hoc eſt, diametro AB, æquales HK, KL, LI, continentes ſemiſſem hexagoni: [a] cum latus hexagoni ſit ſemidiametro æquale. Deſcriptis autẽ circa illas tres rectas ſemicirculis HMK, kOL, LQI, qui ſemicirculo AFB, æquales ſunt, propter diametros æquales; [b] quoniam quadratum rectæ HI, quadrati rectæ HK, quadruplum eſt, quod latus lateris ſit duplum: [c] erit quoq; circulus diametri HI, circuli diametri HK, quadruplus & ſemicirculus HKLI, ſemicirculis HMK, KOL, LQI, AFB, æqualis erit: demptiſq; ſegmentis communibus HNK, KPL, LRI, reliquum trapezium HKLI, æquale erit tribus Lunulis HNKM, KPLO, LRkQ. vna cum ſemicirculo AFB. Si igitur tres illæ Lunulæ quadrentur, vt traditum eſt, & tribus illis quadratis auferatur ex trapezio rectilineum æquale, hoc eſt, [d] inquiratur exceſſus trapezii ſuper tria illa quadrata; erit exceſſus hic rectilinea figura ſemicirculo AFB, æqualis. [e] Si igitur huic figuræ quadratum fiat æquale, erit idem hoc quadratum ſemicirculo AFB, æquale; & quadratum ex illius quadrati diametro deſcriptum toti circulo AFBE, æquale. [f] quod tam quadratum quadrati duplum ſit, quam circulus ſemicirculi. Quadratus ergo circulus eſt.



a coroll 15. quarti.

b ſchol. 4. ſecundi.

c 2. duode.

d ſchol. 45. primi.

e 14. ſecun.

f ſchol. 45. primi.

HÆC eſt quadratura Hyppocratis, acuta quidem, quod Lunulam AGBF, vere quadrauerit, vitioſa autẽ, quod tres Lunulas HNKM, KPLO, LRIQ, quadratas à ſe eſſe arbitratur, quod verum non eſt. Solum enim ex eius demonſtratione Lunula ea quadratur, cuius inferior peripheria eſt quarta pars peripheriæ alicuius circuli, ſuperior autem ſemicirculus alterius circuli, qualis fuit Lunula AGBF. Nam AGB, quarta pars eſt circumferentiæ ABCD, & AFB ſemiſſis peripheriæ AFBE. At eiuſmodi non ſunt tres aliæ Lunulæ, quippe cum earum peripheriæ inferiores HNK, KPL, LRI, ſint ſextæ partes totius circumferentiæ, quamuis peripheriæ ſuperiores ſiot ſemicirculi, vt in illa: quæ nondum ſunt quadratæ. Quod ſi inuenta eſſet ars quadrandi huiuſmodi Lunulas, veriſſime quoq; quadraretur circulus, ſine inuentione lineæ rectæ circuli peripheriæ æqualis, quæ ſane res foret præclara.

Fallacia quadraturæ Hippocratis.

Quid deſideretur in Hippocratis quadratura.

COLLIGITVR ergo ex hac ratione Hippocratis, quadraturam circuli eſſe poſſibilem, cum ſicut Lunula AGBF, quadrata eſt, ita quoque Lunulam HNKM, quadrari poſſe, nihil obſtet, quamuis adhuc non ſit à quoquam quadrata. Et certe, vt quidam recte affirmat, quod hic oſtenditur ab Hippocrate de Lunula AGBF, quæ pars eſt circuli AFBE, nihil idem prohibet de circulo toto ſciri poſſe, etiam non inueſtigata quantitate peripheriæ circuli, cum ſolum deſit ars quadrandi Lunulam HNKM. Immo plus aliquanto dubitationis inferret inuentio quadraturæ Lunulæ AGBF, non cognita, quam circuli.

4 MVLTA quoque hic dicenda eſſent de falſis aliorum quadraturis, ſed quia hæ vel ſe ipſas produnt, cum in progreſſu earum facile appareat, aliquid deeſſe ad conſtituendum circulo æquale quadratum, cuiuſmodi eſt quadratura Iacobi Falconis Equitis Hiſpani, qui ſine inuentione lineæ rectæ, quæ peripheriæ ſit æqualis, circulum quadrare conatur: vel ab aliis iam dudum ſunt cõfutatæ, nimirum Nicolai Cuſani Cardinalis quadratura à Ioanne Regiomontano, ac Ioanne Buteone, & Orontii Finaei Tetragoniſmus tum ab eodem Buteone, tum à Petro Nonio Luſitano in libello de Erratis Orontii: quorum vterque variis viis lineam rectam circumferentiæ æqualem ſe inueniſſe putauit, nihil omnino dicendum mihi eſſe ſtatuo, ne fruſtra tempus terere inutiliter videar. Quamobrem ſolum hoc loco eam quadraturam ſubiiciam, & plenius aliquanto exponam, quam ad finem lib. 6. Euclid. conſcripſi, quæ videlicet per lineam Quadratricem (ſic enim eam appellare lubet) lineam rectam inuenit circulari æqualem. Hæc enim via licet ad Geometrice inueniendum punctum quoddam, nonnihil in ea deſideretur, accuratior tamen eſt omnibus aliis, quas hactenus videre potui; ita vt practice à ſcopo aberrare non poſſimus. Vt autem clare atque ordinate procedam, abſoluam totum negotium paucis quibuſdam propoſitionibus.

Cur de falſis aliorum quadraturis hic nihil dicatur.

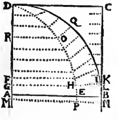
Quæ non quadratura per lineas hic explicetur.

I.

QVADRATRICEM lineam deſcribere.

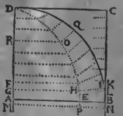
DINOSTRATVS, & Nicomedes, vt auctor eſt Pappus Alexandrinus in 4. lib. Mathematicarum collectionum, lineam quandam inflexam excogitarunt ad circuli quadraturam, ideoque ab officio τετραγωνίζουσα ab eiſdem eſt appellata: à nobis vero eadem de cauſa quadratrix dicetur. Quamquam autem prædicti auctores conentur huiuſmodi lineam deſcribere per duos motus imaginarios duarum rectarum ſe ſe interſecantium, qua in re principium (vt philoſophi loquuntur) petunt, propterea à Pappo reiiciatur, tanquam inutilis, & quæ deſcribi non poſſit: nos tamen eam ſine illis motibus Geometrice delineabimus per inuentionem quotuis punctorum, per quæ duci debeat; quemadmodum in deſcriptionibus conicarum ſectionum fieri ſolet.

5 SIT ergo in quadrato ABCD, deſcriptus Quadrans BD. Si igitur, vt volunt inuentores lineæ Quadratricis, tam ſemidiameter AD, æqualiter ferri intelligatur circa centrum A, quam latus quadrati ſupremum CD, deorſum verſus æquabiliter quoque: ita vt, quo tempore punctum D, circumferentiam DB, vniformi ſemper motu percurrit, eodem recta DC, vniformi etiam motu deſcendens ad latus AB, perueniat, ſic tamen, vt perpetuo ſit lateri AB, parallela, & cum lateribus AD, BC, angulos rectos efficiat, ſecabunt ſe mutuo continue ſemidiameter in circumferentia DB, circumacta, & recta DC, deorſum lata, in punctis,



Quadratricis deſcriptio.

ctis, quæ lineam Quadratricem deſcribent: hoc eſt, per quæ linea Quadratrix tranſibit, cuiuſmodi [illegible] flexa DE. Sed quia duo iſti motus vniformes, quorũ vn[illegible] cumferentiam DB, fit, & alter per lineas rectas DA, CB, [illegible] poſſunt, niſi proportio habeatur circularis lineæ ad r[illegible] à Pappo deſcriptio hæc reprehenditur: quippe cu[illegible] igno[illegible] ſit ea proportio, & quæ per hanc lineam inu[illegible]ſtiganda prop[illegible] Quare nos Geometrice eandem lineam Quadratricem d[illegible] mus hoc modo. Arcus BD, in quotuis partes æquales diuid[illegible] latus vtrumq; AD, BC, in totidem æquales partes. Fac[illegible] ma[illegible] ſio erit, ſi & arcus DB, & vtrumque latus AD, BC, ſecetur pri[illegible] bifariam, deinde vtraque ſemiſſis iterum bifariam, atque ita [illegible] ceps, quantum libuerit. Quo autem plures exiterint diuiſio[illegible] accuratius Quadratrix linea deſcribetur. Nos ad confuſione[illegible] tandam ſecuimus tam arcum DB, quam duo latera AD, BC, in octo tantum partes æquales.



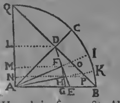
DEINDE bina puncta laterum AD, BC, æqualiter diſtantia a latere DC, vel AB, coniungantur lineis [illegible] ctis occultis, atque ex centro A, aliæ rectæ occultæ ad ſingula diuiſionum puncta Quadrantis DB, extendan[illegible] Vbi enim hæ rectæ priores rectas interſecabunt, prima primam, ſecunda ſecundam, &c. per ea puncta [illegible] trix linea congruenter ducenda eſt, ita vt non ſit ſinuoſa, ſed æquabiliter ſemper progrediatur nullum e[illegible] gibbum, aut angulum alicubi: qualis eſt linea inflexa DE, ſecans ſemidiametrum AB, in E.

6 SED quia punctum E, in latere AB, inueniri Geometrice non poteſt, cum ibi omnis ſectio rectaru[illegible] ceſſet: vt illud ſine notabili errore, qui ſcilicet ſub ſenſum cadat, reperiamus: vtemur hoc artificio: Infimã part[illegible] AF, lateris AD, ſi ſatis exigua non ſit, ſecabimus bifariam continue, donec infima particula ſit perexigua: [illegible] demque modo infimam partem BI, arcus DB, bifariam continue ſecabimus, donec tot fiant ſubdiuiſiones, q[illegible] in parte AF, factæ ſunt, vt particula BK, talis pars ſit totius arcus DB, qualis pars eſt AG, totius lateris AD. Parti culæ deinde AG, æquales abſcindemus BL, BN, AM, ducemuſque rectas occultas GL, MN. Ducta vero ex A, centro recta occulta AK, quæ ſecet GL, in H, puncto, quod accuratiſſime notetur (adhibito videlicet Lem[illegible] Probl. 1. lib. 2. vt concurſus H, quam exquiſitiſſime reperiatur) ſumemus ipſi GH, æqualem MP. Si n. Quad[illegible] cem vſque ad H, deſcriptam continuabimus æquabili, atq; vniformi extenſione vſque ad P, ſecabit Quadratrix linea latus AB, in E, puncto, quod quæritur. Nam propter paruam rectarum GH, AE, MP, inter ſe diſtantiam efficitur, vt ferme ſint æquales, licet Geometrice loquendo recta AE, ſemper maior ſit aliquanto, quantumuis parum eæ rectæ inter ſe diſtent: ſed exceſſus ille circino deprehendi non poteſt: adeo vt arcus circuli ex A, per H, P, deſcriptus verum punctum E, quod ad ſenſum attinet, indicare videatur. Id quod etiam in circumferen[illegible] circuli contingit. Rectæ, namque GL, AB, MN, ſi parum inter ſe diſtent, in circulo omnino æquales iudicabuntur, quamuis vere AB, aliquanto maior ſit. Itaque ſi tres illæ rectæ GH, AE, MP, perexiguam habeant diſtantiam inter ſe, dubitari non poteſt, punctum E, in quo quadratrix linea ſemidiametrum AB, ſecat, ab eo, quod vere in Quadratrice ibi exiſtit, non differre notabiliter: dummodo puncta H, P, exquiſite & ſumma adhibita diligentia inuenta ſint.

Latus baſis & centrum Quadratricis. RECTAM porro AD, vocabimus latus Quadratricis: & rectam AE, eiuſdem baſem: ac deniq; punctum A, centrum eiuſdem.

7 VERVM puncta Quadratricis prope baſem certius inueniemus (ſine interſectionibus linearum, quæ ibi valde obliquæ ſunt) per lineas perpendiculares: hoc modo. Ducta chorda Quadrantis BQ, ſecetur in D, bifariam, quod fiet, ſi ex A, ad C, punctum medium Quadrantis recta ducatur. [a] Hæc enim rectam BQ, ſecabit bifariam. Deinde rectæ AD, ſumatur æqualis AE; iunctaque recta DE, ſecetur bifariam in F, quod etiam fiet, ſi ex A, ad I, punctum medium arcus BC, ducatur AI. [b] Hæc enim chordam BC, (ſi duceretur [illegible]) caret bifariam: [c] ac proinde & rectã DE, [d] quæ c[illegible] dæ BC, eſt parallela: propterea quod latera AB, A[illegible] triangulo ABC, proportionaliter ſecantur in D, [illegible] quippe cum tam AB, AC, quã AE, AD, æquales [illegible] Rurſus rectæ AF, capiatur æqualis AG, iunctaq; [illegible] ſecetur bifariam in H, quod etiam fiet per rectam AK, ductam ad K, punctum medium arcus BI. Atq; hoc [illegible] do, ſi rectæ AH, æqualis accipiatur, & reliqua fiant, vt prius, inuenietur aliud punctum inter H, & G. Et ſic d[illegible] ceps quotuis alia puncta reperiemus viciniora ipſi AB, per lineas perpendiculares, non autem per obliquas [illegible] ctiones, vt in priori figura. [e] Eſt enim AD, ad DB, perpendicularis [f] & AF, ad DE, & DH, ad FG, &c.

a ſchol. 27. tertij.
b ſchol. 27. tertij.
c ſchol. 4. ſexti.
d 2. ſexti.

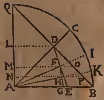


e 3. tertij.
f ſchol. 26. primi.
g 2. ſexti.
h 2. ſexti.
i 2. ſexti.

OMNIA vero hæc puncta inuenta D, F, H, &c. eſſe in Quadratrice, ita oſtendo. Ductis DL, FM, HN, i[illegible] AB, parallelis ſecantibus BD, in O, P; [g] erit vt BD, ad DQ ita AI, ad LQ ideoque & AQ, ſecta erit in L, bi[illegible] Sectus autem eſt & arcus BQ, in C, bifariam. Igitur, vt oſtenſum eſt, punctum D, eſt in Quadratrice. Rur[illegible] DE, ſecta eſt bifariam in F, [h] erit quoq; DB, ſecta bifariam in O, [i] ideoque erit vt EF, ad FD, ita BO, ad OD. [illegible] vt BO, ad OD, ita eſt AM, ad ML, & vt EF, ad FD, ita arcus BI, ad IC. Ergo vt oſtendimus, ſecabunt ſeſe, AI, M[illegible] in puncto Quadratricis. Eademque ratio eſt de aliis punctis hac arte inuentis.

8 ESSE porro lineam hanc inflexam DE, à nobis Geometrice deſcriptam, eandem, quam Dinoſtratus, & Nicomedes per duos illos motus imaginarios deſcribi concipiebant, perſpicuum eſt. Nam ſi ſemidiam[illegible] AD, in priori figura circa centrum A, per arcum DB, eodem tempore moueatur motu vniformi, quo latus D[illegible] deorſum fertur motu quoque vniformi: fit vt quando ſemidiameter AD, pertranſiuit quamcunque partem arcus DB, tunc latus DC, ſimilem partem laterum DA, CB, percurrerit. Alias aut duo illi motus non eſſent vniformes

es, aut non eodem tempore ad latus AB, tam ſemeter AD, quam latus DC, perueniret. Cum o rectæ ex centro A, per partes arcus DB, emiſſæ, ex parallelæ per partes laterum DA, CB, ductæ udant ſemper ex arcu DB, & ex lateribus DA, tes ſimiles, ex conſtructione: liquido conſtat, lineæ inflexæ DE, à nobis Geometrice in-, a punctis, quæ à duobus illis motibus reperi-, non differre



HÆC igitur eſt deſcriptio lineæ Quadratricis eometrica quodammodo, quemadmodum & co- ſectionum deſcriptiones, quæ per puncta etiam fiunt, vt ab Appollonio traditur, Geometricæ dicun- m tamen errori magis ſint obnoxiæ, quam noſtra deſcriptio. propter inuentionem plurimarum linearum m proportionalium, quæ ad earum deſcriptiones ſunt neceſſariæ, quibus in Quadratricis deſcriptione non eſt. Quare niſi quis totam conicarum ſectionum doctrinam, quam tanto ingenii acumine Apollo- Pergæus perſecutus eſt, vt propterea Magnus Geometra appellatus ſit, reiicere velit, tanquam inutilem, & Geometricam, (quod neminem in Geometria peritum facturum exiſtimo, cum ſectiones conicas ad de- tiones adhibuerint præſtantiſſimi Geometræ. Nam Menechmus Hyperbola, ac Parabola vſus eſt in linearum mediarum proportionalium inter quaſuis duas rectas inuentione; Et Archimedes ipſe multa æclare de iiſdem ſectionibus conicis demonſtrauit: ac denique eiuſmodi ſectiones inſignem vſum habent in Gnomonica, vt ex noſtra Gnomonica apparet) admittere omnino cogetur, hanc deſcriptionem noſtram adratricis lineæ eſſe quodammodo Geometricam. Adde quod linea conchilis, qua Nicomedes duas medias eas proportionales acutiſſime inueſtigat, per puncta etiam deſcribitur, vt libro 6. propoſ. 15. diximus.

HABET linea hæc Quadratrix multas, & inſignes vtilitates, quarum nonnullas ad finem lib. 6. Euclid. de- onſtrauimus, quas hoc loco repetere ſuperuacaneum eſt. Solum igitur eius vſum in quadrãdis circulis hic ex- nemus. Qua in re indigemus tantummodo vltimo puncto E, in priori figura, etiamſi nullum aliud Quadra- punctum inuentum eſſet quod quidem vltimum punctum licet Geometrice, ac præciſe non reperiatur: tamẽ ſi artificiũ poſterioris figuræ adhibeatur, nõ aberrabimus à vero puncto notabiliter, vt ſupra diximus. Quã- do namq; deprehenſum fuerit, vltimam perpendicularem AH, æqualem eſſe præcedenti vltimæ lineæ translatæ G, ita vt nulla differentia inter illas per circinum diſcernatur: ſumi poterit citra errorem notabilem vltimum d punctum G, pro puncto extremo Quadratricis: Sin minus, ducendæ erunt aliæ perpendiculares eo artifi- o, quo AF, AH, ductæ ſunt, donec inter vltimam, & poſtremo loco inuentam rectam in ſemidiametro AB, ullum appareat diſcrimen, cuius quidem rei operatio ipſa optimus erit magiſter.

COROLLARIVM.

9 EX deſcriptione Quadratricis colligitur, ſi ex centro A, ducatur recta vtcunque AQ, ſecans arcum Quadrantis in Q, & Quadratricem in O; ita eſſe arcum BD, ad arcum BQ, vt eſt ſemidiameter AD, ad rectam AR, ducta prius OR, ipſi AB, parallela:[a] ac proinde & ad rectam, quæ ex O, ad AB, demittitur perpendicularis. Quia enim eadem pars eſt arcus DQ, totius arcus DB, quæ pars eſt recta DR, totius ſemidiametri DA, quippe cum in deſcriptione Quadratricis arcus DQ, totius arcus DB, tot particulas complectatur, quot partes recta DR, totius DA, con- et: quandoquidem rectæ AQ, RO, ſeſe interſecant in O, puncto Quadratricis. Neque hæc ſimilitudo impeditur, et- ſi tam arcus DQ toti arcui DB, quam recta DR, toti lateri DA, ſit incommenſurabilis, cum perpetuo Quadratrix dem vniformitate progrediatur per omnia ſua puncta. Si nim recta DR, non eſt talis pars, ſiue commenſurabilis, ſi- incommenſurabilis totius lateris DA, qualis pars eſt arcus DQ, totius arcus DB; ſi cogitetur talis pars lateris A, minor quam DR, vel maior, ſecabit parallela ex eius puncto extremo ducta rectam AQ, vel ſupra O, vel ra, in puncto, per quod Quadratrix deſcribenda eſt; ac proinde ea non tranſibit per O, quod eſt abſurdum, & ontra hypotheſim. Quia inquam eadem pars eſt arcus DQ, totius arcus DB, quæ pars eſt recta DR, totius lateris DA;[b] erit quoque reliquus arcus QB, eadem pars totius arcus DB, quæ pars eſt reliqua recta RA, totius lateris DA: quod eadem ſit proportio totius DB, ad DQ, quæ totius DA, ad DR: Et permutando eadẽ totius DB, totam DA, quæ ablati arcus DQ, ad ablatam rectam DR. Quocirca erit, vt totus arcus DB, ad arcum QB, totum latus DA, ad rectam RA, hoc eſt, ad rectam perpendicularem ex O, ad AB, demiſſam,[c] quæ ipſi RA, qualis eſt.



a 34. prim.

b 19. quint.

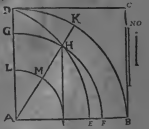
c 34. prim.

II.

SI Quadrantis, & Quadratricis idem centrum ſit, erunt arcus Quadrantis, ſemidiameter, & baſis quadratricis continue proportionales.

HÆC eſt eximia, atque inſignis proprietas Quadratricis. Sit Quadrans, & Quadratrix ex eo deſcripta, vt ſupra. Dico arcum BD, ſemidiametrum AD, & Quadratricis baſem AE, continue eſſe proportionales, hoc eſt, eſſe BD, ad AD, vt AD, ad AE. Sin minus, ſit vt BD, ad AD, ita AD, ad AF, maiorem ipſa AE, minoremue, ſitq; primum

primum AF, maior, quam AE. Deſcripto ex centro A, Quadrante FG, per F, ſecante q[illegible] tur per H, ſemidiameter AHK, demittaturque perpendicularis HI. Quoniam igitur [illegible]



ctam AD, vt AD, hoc eſt, vt AB, ad AF, eſt [illegible] meter ad ſemidiametrum AF, ita arcus BD, ad arcum [illegible] enim ſit, vt lib. 4 cap. 7. propoſ. 1. demonſtra[illegible]
a 15. quint. diametrum, vt circumferentia ad circumferen[illegible]
b 15. quint. ſemidiameter AB, ad ſemidiametrum AF, vt [illegible] tia ad eandem circumferentiam: [b] ac proinde etiam vt pars circumferentiæ ad quartam partem circu[illegible]
c 11. quint. vt arcus BD, ad arcũ FG,) Erit quoq; arcus B[illegible]
d 9. quinti. idẽ arcus BD, ad arcũ FG; [d] ac propterea æquales erunt [illegible] & arcus FG. Quia vero ex præcedenti cor. eſt, vt [illegible] cus B[illegible] cũ BK, ita recta AD, ad rectã HI, & vt arcus BD, a[illegible]
e ſchol. 33. ſexti. arcus FG, ad arcũ FH, [e] ꝙ arcus BD, BK, arcubus [illegible] ſint; [f] erit quoq; recta AD, ad rectam HI, vt ar[illegible] FG, ad
f 11. quinti. FH. Cũ ergo oſtenſa ſit recta AD, arcui FG, æqualis: [g] erit quoq; recta HI, arcui FH, æqualis, q[illegible]d eſt
g 14. quin. Eſt enim recta HI, minor arcu FH, cum ea ſit ſemiſſis chordæ ſubtendentis arcum duplum ar[illegible] FH: [illegible]
h 3. tertij. recta AF, ſecat eam chordam biſariam; [i] ac proinde & arcum) chorda autem ſemper ſuo arcu minor ſit. N[illegible]
i ſchol. 27. tertij. go eſt arcus BD, ad ſemidiametrum AD, vt AD, ad rectam maiorem baſe AE, Quadratricis.

SIT deinde, ſi fieri poteſt, vt arcus BD, ad AD, ita AD, ad AI, minorem baſe AE. Deſcripto i[illegible]tur [illegible] tro A, per I, Quadrante IL, exigatur ex I, ad AE, perpendicularis IH, ſecans Quadratricẽ in H, pu[illegible] ſemidiameter ducatur AK, ſecans arcum IL, in M. Oſtendemus ergo, vt prius, arcum IL, rectæ AD, æ[illegible] ſe. Item ita eſſe arcum BD, ad arcum BK, hoc eſt, arcum IL, ad arcum IM, vt eſt recta AD, ad [illegible] in HI.
k 14. quint. cum arcus IL, oſtenſus ſit æqualis rectæ AD; [k] erit quoque arcus IM, æqualis rectæ HI, quod eſt abſur[illegible] enim recta HI, maior arcu IM. Nam ſi ex H, duceretur verſus G, alia recta tangẽs circulum IL, ſicut H[illegible]
l 2. coroll. 36. tertij. tangit in I, [l] eſſent hæ duæ tangentes æquales, arcuſque inter eas interceptus ſecaretur biſariam in M, [m] [illegible]
m ſcho. 27. tertij. ea quod angulus ab eis comprehenſus biſariam diuideretur à recta AH, [n] ac proinde & angulus in ce[illegible] alterum punctum contactus recta adiungeretur: [o] ideoque arcus, quibus inſiſtunt, æquales forent. Ig[illegible]
n 4. vel 8. primi. lib. 8. propoſ. 1. probabimus cum Archimede, duæ illæ tangentes ſimul maiores ſint arcu ab eis compreh[illegible] rit & earum ſemiſſis HI, maior ſemiſſe IM, illius arcus. Non eſt ergo arcus BD, ad ſemidiametrum AD, v[illegible]
o 26. tertij. rectam minorem baſe AE, Quadratricis; Sed neq; vt AD, ad maiorem, ſicut oſtenſum eſt. Igitur vt AD, ad [illegible] baſem AE. Quod demonſtrandum erat.

COROLLARIVM I.

Rectam circumferentiæ circuli æqualem reperire.

HINC facile rectam reperiemus arcui Quadrantis, ex quo Quadratrix deſcripta eſt, ac pro[illegible] de & ſemicircumferentiæ, immo & toti circumferentiæ æqualem.

QVONIAM eſt arcus BD, ad ſemidiametrum AD, vt AD, ad baſem Quadratricis AE; erit conu[illegible] quoq; AE, ad AD, vt AD, ad arcum BD. Si igitur duabus rectis AE, AD, inueniatur tertia proportionalis; [p] [illegible]
p 11. quint. AD, ad eam tertiam, vt ad arcum BD, cum vtraq; proportio ſit eadem, quæ AE, ad AD, [q] Quare tertia illa pro-
q 9. quinti. portionalis arcui Quadrantis BD, æqualis erit: Et ſi duplicetur, fiet recta æqualis ſemicircumferentiæ ei[illegible]dem circuli: Si vero quadruplicetur, fiet recta toti circumferentiæ æqualis.

COROLLARIVM II.

SEQVITVR quoque ex his, ſi baſis Quadratricis AE, ſtatuatur ſemidiameter alicuius cir[illegible] eius latus AD, quartæ parti circumferentiæ illius circuli eſſe æquale. Et lineam la[illegible] AD, duplam æqualem eſſe ſemicircumferentiæ eiuſdem circuli: Et lineam quadrupla[illegible] lateris toti circumferentiæ eſſe æqualem.

CVM enim, vt lib. 4. cap. 7. propoſ. 1. oſtendimus, diametri circulorum circumferentiis ſint propo[illegible]
r 15. quint. les [r] erunt quoque ſemidiametri circumferentiis, & quadrantibus proportionales. Igitur erit, vt AD, ad AE, [illegible] eſt, vt ſupradicta tertia proportionalis ad AD, ita quadrans BD, ſemidiametri AD, ad Quadrantem ſemi[illegible]
s 14. quint. tri AE. Cum ergo tertia illa proportionalis æqualis ſit oſtenſa Quadranti BD; [s] erit quoque recta AD, quad[illegible] ti ſemidiametri AE, æqualis. Dupla ergo linea ipſius AD, ſemicircumferentiæ circuli, cuius ſemidiameter A[illegible] quadrupla toti circumferentiæ erit æqualis.

COROLLARIVM III.

EX his quoque infertur, ſi duæ rectæ N, O, in præcedenti figura eandem proportionem ha[illegible] ant, quam AD, AE, minor autem O, ſtatuatur ſemidiameter circuli alicuius, maiorem [illegible] æqualem eſſe arcui Quadrantis illius circuli.

CVM enim ſit AD,ad AE,vt N,ad O;erit permutando AD,ad N,vt AE,ad O. Vt autem AE,ad O,ita eſt Quadrans ſemidiametri AE,ad Quadrantem ſemidiametri O,vt lib.4.cap.7.propoſ.1.demonſtrauimus. [a] Igitur erit quoque AD.ad N,vt Quadrans ſemidiametri AE,ad Quadrantem ſemidiametri O. Cum ergo AD, æqualis ſit oſtenſa Quadranti ſemidiametri AE;[b] erit quoque N,æqualis Quadranti ſemidiametri O. quod eſt propoſitum.

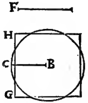
a 11. quin.
b 14. quin.

III.

DATO circulo quadratum æquale conſtituere.

Quadratum circulo æquale exhibere.

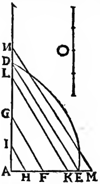
SIT quadrandus circulus ad interuallum ſemidiametri BC,deſcriptus. Tribus rectis AE, baſi Quadratricis; AD,lateri eiuſdem præcedentis figuræ, & rectæ BC, inuenta quarta proportionali F;erit er coroll.3. antecedenti recta F, quadranti circuli dati æqualis, atque eius dupla ſemicircumferentiæ æqualis erit. Inuenta autem inter ſemidiametrum BC, & duplam ipſius F,media proportionali GH:Dico quadratū ex GH,deſcriptum ęquale eſſe circulo ad interuallū BC,deſcripto.[a] Quoniam n.rectangulum ſub BC, ſemidiametro, & ſub ſemicircumferentia circuli,id eſt,ſub dupla rectę F,inuentæ,ęquale eſt circulo:[b] Prędicto autem rectangulo æquale eſt quadratum lateris GH; erit quoq; quadratum lateris GH,circulo ſemidiametri BC,æquale.



a 4. Iſoperimetrorum
b 17. ſext.

Facilis inuentio rectæ æqualis circumferentiæ.

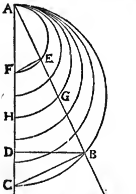
VERVM vt expedite linea recta inueniatur æqualis quartæ parti circumferentiæ dati circuli,atque idcirco & ſemicircumferentiæ,vel toti circumferentiæ,conſtruenda erit figura eiuſmodi. Fiat angulus rectus DAE,rectaq; AD,ęqualis ſit diametro Quadrantis,ex quo Quadratrix deſcripta eſt;& AE, baſi eiuſdem Quadratricis æqualis. Vel certe ex centro A,noua Quadratrix deſcribatur DE, cuius latus AD,& baſis AE.Ducta namque recta DE, conſtructa erit figura aptiſſima ad rectam circumferentiæ dati circuli æqualem inueniendā. Si enim circuli quadrandi ſemidiametro abſcindatur æqualis AF,ducaturq; FG,ipſi DE,parallela;erit ex coroll. 3.antecedēti AG,ęqualis quartę parti circūferentię dati circuli,cuius ſemidiameter nimirum eſt AF, (quemadmodum AD, quartæ parti circumferentiæ circuli ſemidiametri AE. æqualis eſt, vt ex coroll. 2.præcedenti conſtat)[c] propterea quod AF,AG,eandem habent proportionem,quam AE,AD. Eadem ratione, ductis HI,KL,MN, eidem DE, parallelis, erunt AI,AL,AN, æquales quartis partibus circumferentiarū circulorum ex ſemidiametris AH,AK,AM,deſcriptorū. Hæ aūt rectę duplicatę ſemicircumferentijs æquales erunt, &c. Atque hac arte inuenietur recta æqualis quartæ parti circumferentiæ cuiuſuis circuli, ſi eius ſemidiametro ex recta AE, æqualem lineam abſcindemus, ab eiuſq; extremo rectæ DE,parallelam ducemus,&c.



c 4. ſexti.

Facilis inuentio quadrati circulo æqualis.

VT quoq; ſine vllo labore dato cuicunq; circulo quadratū æquale exhibeamus, vtendū erit hoc artificio. Inuento ſemel latere quadrati alicui circulo ęqualis, vt paulo ante docuimus, conſtruemus figuram ad quadrandos alios circulos quoſcunq; accommodatiſſimam, hoc modo. Detur circulus ABC, diametri AC,ſitque AB, media proportionalis inter ſemidiametrum, & rectam ſemicircumferentiæ æqualem inuentam ex præcedenti figura,ita vt quadratum rectæ AB, circulo diametri AC, ſit æquale: [d] accommoderur AB, in circulo,quæ certius applicabitur, ſi forte circinus ex A, ad interuallum datæ AB,deſcriptus nimis oblique peripheriam ABC.ſecet in B, hoc modo. Duabus rectis,nimirum diametro AC,& lateri AB,quadrati inuento reperiatur tertia proportionalis AD.Perpendicularis namq; DB,cadet in punctum B,in quod latus inuentum duci debet: [e] propterea quod tres rectæ AC,AB, AD, ſunt continue proportionales: quemadmodum recta AC, latus quadrati inuentum, & AD,continuam ſeruant proportionem, ex conſtructione.Liquet autem inter AC,AD, vnam tantum poſſe eſſe mediam proportionalem.Hac figura extructa,dicto citiꝰ quemcunq; circulum quadrabimus. Si namq; diametro dati circuli rectam ęqualem abſcindemus AF,circa quam ſemicirculus deſcribatur,reſecabit is ex recta AB,latus AE, cuius quadrarum circulo dato eſt æquale. Quia enim angulus externus AEF,interno ABC,æqualis eſt: [f] quod vterque in ſemicirculo rectus ſit;[g] erunt EF,BC,parallelæ;Ideoq; triangula AEF,ABC,æquiangula. [h] Igitur erit CA,ad AB,vt FA,ad AE; Et permutando CA,ad FA,vt



d 1. quar.
e coroll. 8. ſexti.
f 31. tertij.
g 28 prim.
h 4. ſexti.

i 22. ſexti. AB,ad AE. [i] Ideoq; erit quoque quadratum ex AC, ad quadratum ex AF: [k] hoc eſt,vt circulus diametri AC,ad
k 2. duod. circulum diametri AF,vt quadratum ex AB,ad quadratum ex AE. Eſt autem circulus diametri AC,quadrato ex
l 14. quin. AB,per conſtructionem,æquale. [l] Igitur & circulus diametri AF,quadrato ex AE,æquale erit. Ita quoque quadratum rectæ AG,circulo diametri AH, erit æquale. Et ſic de cæteris.

Facilis inuentio quadrati circulo æqualis ex Archimede. IAM vero quoniam lib. 4. cap. 6. propoſ. 3. ex Archimede demonſtrauimus,quadratum diametri ad circulum habere ferme proportionem,quam 14. ad 11. ſi quis volet ſecundum hanc proportionem reperire quadratum circulo æquale; diuidenda erit recta AC,in 14. partes æquales, & ex vndecima parte D,(ita vt AD, contineat partes 11. & DC, 3.) excitanda perpendicularis DB, vſque ad circumferentiam circa AC, deſcriptam. Recta enim ducta AB,latus erit quadrati circulo diametri AC, æqualis. [m] Cum enim tres rectæ AC,AB,AD,
m carol 8. ſexti. ſint continue proportionales; [n] erit quadratum ex AC, ad quadratum ex AB,vt AC,ad AD, videlicet vt 14. ad 11. Cum ergo etiam ſit,vt diximus,quadratum diametri ad circulum,vt 14. ad 11. ferme: [o] erit quadratum ex AC,
n corol. 20. ſexti. ad quadratum ex AB,vt ad circulum diametri AC. [p] Igitur quadratum ex AB,circulo diametri AC,æquale erit.
o 11. quin. Quod ſi ſecundum varias diametros deſcribantur circuli per A,tranſeuntes,abſcindent quoq; ij circuli ex recta
p 9. quint. AB,latera quadratorum illis circulis æqualium. Habes ergo viam facilem inueniendi quadratum circulo dato æquale,ſiue quadratricem noſtram adhibeas,ſiue demonſtrata ab Archimede ſequaris.

I V.

DATO quadraro circulum æqualem deſcribere.

SIT datum quadratum lateris AE, cui circulus æqualis eſt deſcribendus. In proxima figura ex recta AB, abſcindatur recta AE,dato lateri quadrati æqualis: Et ex E, ducatur ad AB,perpendicularis EF, ſecans AC,in F. Eritque circulus diametri AF,quadrato lateris AE,æqualis,vt ex proxime demonſtratis liquet.

COROLLARIVM.

a 14. ſecun. EX his,quæ demonſtrata ſunt,conſtruemus circulum cuicunque figuræ rectilineæ æqualem. Et contra cuicunque circulo figuram rectilineam æqualem conſtituemus, quæ alteri datæ figuræ rectilineæ cuicunque ſimilis ſit. Nam ſi datæ figuræ rectilineæ [a] deſcribamus quadratum æquale, & huic quidrato circulum æqualem
b 25. ſexti. per hanc 4. propoſ. conſtituamus; erit idem hic circulus datæ figuræ rectilineæ æqualis.

RVRSVS ſi per propoſitionem 3. dato circulo quadratum æquale conſtruamus, huic autem quadrato [b] conſtituamus figuram rectilineam æqualem,& ſimilem alteri datæ figuræ rectilineæ; erit eadem hæc figura rectilinea conſtituta,dato circulo æqualis,quod eſt propoſitum.

V.

DATÆ rectæ lineæ circumferentiam circuli reperire æqualem.

IN ſecunda figura propoſ. 3. ſit rectæ O,exhibenda æqualis circumferentia. Eius quartæ parti capiatur in latere Quadratricis AD,recta æqualis AI,ac per I,ipſi DE, agatur parallela IH. Eritq, circumferentia circuli ex diametro AH,deſcripti æqualis datæ rectæ O,propterea quod quarta pars eius circumferentiæ æqualis eſt rectæ AI,vt oſtenſum eſt;ac proinde tota circumferentia æqualis erit quadruplæ rectę AI,hoc eſt,ęqualis rectæ O, cuius quarta pars poſita eſt recta AI. Datæ ergo rectæ circumferentiam æqualem reperimus. Quod faciendum erat.

FINIS LIBRI SEPTIMI.

GEO-

GEOMETRIÆ PRACTICÆ

LIBER VIII.

Varia Theoremata, ac problemata Geometrica demonſtrans.

VT extremam manum Geometriæ huic noſtræ practicæ imponamus, concludemus eam varus nonnullis Theorematibus, atque problematibus Geometricis, tum collectis ex Geometris aliis, tum proprio, vt aiunt, Marte excogitatis, ac demonſtratis. Qui in re exemplum illuſtre habemus in Pappo Alexandrino, qui octo totos libros conſcripſit de Mathematicis collectionibus. Neque vero hoc præter inſtitutum noſtrum exiſtimare quis debet: cum per eiuſmodi demonſtrationes Geometricas ſtudioſo Lectori via multiplex aperiatur ad inueſtigandas ſimiles ſpeculationes in rebus Geometricis: quippe cum in iis ad exercendum ingenium ampliſsimum campum habeat. Eſt & alia cauſa, quæ me ad hunc librum octauum conſcribendum permouit, ne videlicet tot Theoremata, ac problemata non ſine magno labore peruestigata pereant, cum ad nullam Geometriæ partem magis proprie pertineant, quam ad hanc Geometriam practicam: præſertim quod pleraque eorum praxes Geometricas pertractent. Adde quod non pauci viri docti & graues ad hunc librum perſcribendum auctores mihi, atque ſuaſores fuerunt.

THEOR. 1. PROPOS. 1.

FIGVRA regularis circulo circumſcripta maiorem ambitum habet, quam circulus.

HÆC eſt prima propoſitio Archimedis in lib. 1. de ſphæra & Cylindro: quam demonſtrat, hoc aſſumpto principio.

Si duæ lineæ in plano eoſdem habeant terminos, & in eaſdem partes cauæ ſint, comprehendens comprehenſa maior eſt. quod quidem principium eſſe verum, ex eo euidenter intelligi poteſt, quod ex eo non ſolum Archimedes, verum etiam plurimi alij Geometræ tum veteres, tum recentiores, innumera propemodum, atque admiranda Theoremata, problemataque demonſtrarint, quæ vt veriſſima, ab omnibus recepta ſunt; neque vnquam ex illo abſurdi aliquid conſecutum eſt, aut contra id quiſquam hactenus à duobus ferme millibus annorum, noui quid commentus eſt. Hoc ergo poſito principio, facilis eſt demonſtratio Archimedis. Sit namque figura regularis ABCDEF, deſcripta circa circulum, cuius centrum N, tangens eum in punctis G, H, I, K, L, M. Quoniã igitur per præmiſſum principium rectæ AG, AM, maiores ſunt arcu GM: Item BG, BH, maiores arcu GH, & ſic de reliquis; erunt omnes rectę ſimul conficientes totum ambitum figuræ, maiores omnibus arcubus ſimul conficientibus totam circuli peripheriam, quod erat demonſtrandum.



SCHOLIVM.

CARDANVS in libro quinto de proportionibus propoſ. 201. conatur demonſtrare, duas rectas circulum contingentes, cuiuſmodi ſunt AG, AM, maiores eſſe arcu intercepto GM. (quod Archimedes ex ſuo aſſumpto principio deduxit) præmiſſis tribus Lemmatibus, & vno principio, quorum primum eſt hoc.

LEMMA I.

SI fuerint quatuor quantitates, & minor ſit exceſſus inter primam & ſecundam, quam inter tertiam & quartam; ſitque prima non minor, quam tertia, maior vero quam ſecunda. Item tertia maior quam quarta: Erit minor proportio primæ ad ſecundam, quam tertiæ ad quartam.



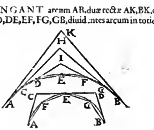
SINT quatuor quantitates A, BC, D, EF; ſitque GB, exceſſus inter primam A, & ſecundam BC, minor exceſſu HE, inter tertiam D, & quartam EF; Item prima A, non ſit minor, quam tertia D: maior vero quam ſecunda BC: Ac denique tertia D; maior ſit quam quarta EF; Dico minorem eſſe proportionem primæ A, ad ſecundam BC, quam tertiæ D, ad quartam EF. Cum enim A, non minor ſit, quam D: at GB, minor, quam HE, [a] erit maior proportio A, ad GB, quam ad HE: Eſt autem A, (ſi eſt æqualis ipſi D) ad HE vt D, ad HE; vel maior eſt proportio A, (ſi maior eſt quam D,) ad HE quam D, ad HE. Igitur maior eſt proportio A, ad GB, quam D, ad HE. Si igitur fiat vt D, ad HE, ita A, ad GI, habebit quoque A, ad GB, maiorem proportionem, quam ad GI; [b] ac proinde erit GI, maior quam GB, ideoque IC minor, quam BC. [c] Maior ergo erit proportio A, ad IC, quam ad BC Et quoniam GC, ipſi A, æqualis eſt, ad GI, vt HF, ipſi D, æqualis, ad HE; Erit quoq; per conuerſionem rationis GC, hoc eſt, A, ad IC, vt HF hoc eſt, vt D, ad EF Cum ergo oſtenſum ſit, maiorem eſſe proportiooem A, ad IC, quam ad BC; erit quoq; maior proportio D, ad EF, quam A, ad BC, hoc eſt, A, ad BC, minorem proportionem habebit, quam D, ad EF. quod eſt propoſitum.

a 8. quint.
b 10. quin.
c 8 quint.

LEMMA II.

SI circuli arcum duæ rectæ tangant in vno puncto coeuntes; & in eodem arcu aptentur quotlibet rectæ æquales diuidentes ipſum in partes totidem æquales. Erunt duæ illæ tangentes omnibus huſce chordis ſimul maiores.

TANGANT arcum AB, duæ rectæ AK, BK, coeuntes in K, aptenturque quotlibet rectæ in eo æquales AC, CD, DE, EF, FG, GB, diuidentes arcum in totidem partes æquales. Dico rectas AK, BK, ſimul maiores eſſe omnibus illis rectis ſubtenſis ſimul. Productis enim rectis AC, BG, donec coeant in H; Item productis rectis CD, GF, donec concurrant in I, & ſic deinceps, ſi plures rectæ fuerint: [a] Erunt rectæ DI, FI, maiores rectis DE, FE. Additis ergo æqualibus DC, FG; erũt etiam rectæ CI, GI, maiores rectis CD, DE; EF, FG, ſimul. [b] Sed CH, GH, maiores ſunt rectis CI, GI. Igitur multo maiores erunt CH GH, rectis CD, DE, EF, FG; additiſq; æqualibus AC, BG, maiores erunt AH, BH, ſimul quam AC, CD, DE, EF, FG, GB, ſimul. [c] Sunt autem & AK. BK. maiores, quam AH, BH. Igitur multo maiores erunt AK BK, ſimul, quam AC, CD, DE, EF, FG, GB, ſimul. quod erat demonſtrandum.



a 21. prim.
b 21. prim.
c 21. prim.

LEMMA III.

SI circuli arcum tres rectæ tangant in duobus punctis coeuntes, ita vt contactuum punctum medium diuidat arcum bifariam: In eodem autem arcu accommodentur quotlibet rectæ numero pares, & inter ſe æquales, Erunt tres illæ tangentes omnibus his ſimul ſumptis maiores.

IN antecedente figura arcum AB, tangant tres rectæ AC, CD, DB, conuenientes in duobus punctis C, D ſecantes ipſum bifariam in E. Accommodenturq; in eodem arcu quotlibet rectæ æquales, & numero pares AF, FE, EG, GB. Dico tres AC, CD, DB, ſimul ſumptas eſſe maiores rectis AF, FE, EG, GB, ſimul ſumptis. Quoniam enim per Lemma præcedens AC, CE, maiores ſunt rectis AF, FE: Item BD, DE, maiores rectis BG, GE, Erunt quoque AC, CD, DB, ſimul maiores rectis AF, FE, EG, GB, ſimul. quod oſtendendum erat.

Principiũ Cardani. HÆC ergo ſunt tria lemmata, quæ Cardanus præmittit: quibus adiungit hoc poſtulatum, ſiue principium. Cum arcus quilibet maior ſit quotcunque rectis in eo ſubtenſis ſimul ſumptis, & quo plures ſubtenſę fuerint, eo minori exceſſu arcus illas ſuperet: fieri poteſt, vt tot ſubtenſæ duci poſſint, ita vt exceſſus, quo arcus illas ſuperet, minor ſit quauis recta propoſita. Hoc principium videtur eſſe manifeſtum, cum tam paruus arcus poſſit accipi, vt eius chorda illi fere æqualis ſit; adeo vt ſenſus nullam percipere poſſit inter arcum, & chordam differentiam. A poſteriori tamen illud confirmari poteſt per numeros. Poſita enim proportione circumferentiæ ad diametrum ferme 31415926. ad 10000000. vt lib. 4. cap. 7. Num. 5. ex ꝓbatis auctoribus retulimus, deprehendemus, ſi arcus propoſitus cootinue ſecetur bifariam per rectas ſubtenſas, ſemper à præcedenti exceſſu plus dimidio auferri;[a] ac proinde tandem relinqui exceſſum omni quantitate minorē. Nam arcus verbi gratia graduum 4. erit 698131. & eius chorda ex tabula ſinuũ eruta 697990. ita vt arcus chordam ſuperet hoc numero 141. Summa deinde duarum chordarum graduum 2. erit 698096. quæ ſuperatur ab eodem arcu gr. 4. numero hoc 35. qui minor eſt ſemiſſe præcedentis exceſſus 141. ac proinde plus dimidio ab eo ablatum erit. Rurſus ſumma quatuor chordarum gradus 1. erit 698120. quam idem arcus 4. graduum ſuperat hoc numero 11. qui etiam minor eſt ſemiſſe proximi exceſſus 35. Item ſumma 8. chordarum, quarum quælibet 30. minutis debetur, erit 698128. exceſſus autem inter eam, & eundem arcum 4. graduum, numerus 3. qui minor quoque eſt, quam ſemiſſis proximi exceſſus 11. & ſic deinceps Scio confirmationem hanc propoſiti principij non eſſe demonſtratiuam, cum proportio circumferentiæ ad diametrum colligatur ex eo, quod demonſtrare conamur, nimirum figuram circulo circumſcriptam habere maiorem ambitum ambitu circuli: eam tameo probabilē eſſe, nemo dubitabit, cum vix credibile videatur, (ſi illa proportio longe à vero abeſſet) exceſſus illos paulatim ita minui, vt ſemper minor numerus ſemiſſe præcedentis exceſſus relinquatur; adeo vt tandem nulla fere differentia inter arcum, & ſummam chordarum ſubtenſarum reperiatur.

a 1. decim.

Demõſtratio Card. HIS præmiſſis, tangant duæ rectæ AB, AL, arcum BCL. Dico eas eſſe maiores arcu. Sint enim, ſi fieri poteſt, non maiores, ac proinde arc⁹ BCL. ſit vel æqualis rectis AB, AL, vel maior. Secto ergo arcu bifariam in C. ducatur DCE, tangens arcum in C. Diuiſis quoq; arcubus BC, CL, bifariam in G, F, iungantur rectæ BG, GC, CF, FL.[b] Et quia AD, AE, maiores ſunt quam DE; additis DL, EB, communibus, quæ ęquales ſunt; (Nam iunctis rectis NA, NB, NL, ex centro N; quoniam tria latera trianguli ABN, tribus lateribus trianguli ALN, æqualia ſunt;[c] erunt tam anguli ad N, quam ad A, æquales;[d] ideoq; arcus CB, CL, æquales erunt; ac proinde recta NA, per cõtactum C, tranſibit,[e] eritq; ad DE, perpendicularis. Cum igitur duo anguli DAC, DCA, duobus angulis EAC, ECA, æquales ſint, & latus adiacēs AC, commune;[f] erunt latera AD, AE, æqualia: proptereaq; & reliquæ DL, EB, æquales erunt, cum tangentes AL, AB, æquales ſint) eruot AL, AB, maiores tribus LD, DE, EB. Sit ergo exceſſus H. Rurſus quia arcus BL, maior eſt rectis BG, GC, CF, FL, ſit exceſſus I, qui minor ſit exceſſu H. Si namq; minor non eſt, diuidemus arcus LF, FC, CG, GB, bifariam, & hos rurſus bifariam, &c. connectemuſq; rectas, donec fiat exceſſus minor exceſſu H, per ſuperi⁹ principiũ Cardani. Quoniam igitur arcus LB, prima quantitas ſuperat ſecundam, videlicet rectas LF, FC, CG, GB, ſimul exceſſu I; Et tertia quantitas, nimirum ſumma rectarum AL, AB, ſuperat quartam, id eſt, ſummam rectarum LD, DE, EB, exceſſu H: Eſtque exceſſus I. minor exceſſu H; Et prima quantitas, hoc eſt, arc⁹ BL, ponitur non minor, quam tertia ex AB, AL, conflata, item tertia AB, AL, maior, quam quarta LD, DE, EB: erit per 1. Lemma, minor proportio arcus BL, primę quantitatis ad ſecundam LF, FC, CG, GB, quam tertię quantitatis AL, AB, ad quartam LD, DE, EB;[g] Et permutando minor erit proportio arcus LB, ad AL, AB, ſimul, quam rectarum LF, FC, CG, GB, ſimul ad rectas LD, DE, EB, ſimul. Sit ergo vt compoſita ex LF, FC, CG, GB, ad compoſitam ex LD, DE, EB, ita arcus BK, ad rectas AL, AB, ſimul: Eritq; propterea minor etiam proportio arcus BL, ad AL, AB, ſimul, quam arcus BL, ad arcum BK,[h] ideoque arcus BK, maior erit arcu BL. Cum ergo eadem ſit proportio rectarum LF, FC, CG, GB, ſimul ad LD, DE, EB, ſimul, quæ arcus BK, ad AL, AB, ſimul: ſintq; per 3. Lemma, rectæ LF, FC, CG, GB, ſimul minores, quam LD, DE, EB, ſimul; erit quoque arcus BK, minor, quam AL, AB, ſimul. Multo ergo minor erit arcus BL, duabus AL, AB, ſimul. Quare rectæ tangentes AL, AB, ſimul maiores ſuot arcu BL, quod erat oſtendendum.



b 20. primi.
c 8. primi.
d 26. tertij
e 18. tertij.
f 26. primi.
g ſchol. 17. quinti.
h 10. quin.

EST autem hæc demonſtratio Cardani admirabilis, & non abſimilis illi, qua Euclid. in propoſ. 12. lib. 9. vtitur. In vtraque enim infertur concluſio demonſtratione affirmatiua ex eius oppoſito, vt patet.

ATTVLI hanc demonſtrationem Cardani, non quod vere Geometrica ſit, niſi principium illud ſuum admittatur, ſed quod ingenioſa ſit & acuta. Sine tamen hac demonſtratione concedendum erit, ambitum figurę circumſcriptæ eſſe maiorem peripheria circuli propter demonſtrationem Archimedis, cum nihil vnquam in contrarium à quoquam ſit allatum, vt ſupra diximus.

THEOR. 2. PROPOS. 2.

CIRCVLORVM diametri inter ſe ſunt, vt circumferentiæ.

HOC demonſtrauimns nos in lib. 4. cap. 7. num. 3. propoſ. 1. idem autem hic aliter demonſtrabimus ex Pappo, hoc modo. Sint duo circuli ABCD, EFGH, quorum diametri AC, EG. Dico eſſe circumferentiam ad circumferentiam, vt eſt diameter ad diametrum[a] Quoniam enim eſt circulus ad circulum, vt quadratum dia- *a 2. duod.*

 metri

RVRSVS ſi fiat cylindrus baſem habens æqualem ſuperficiei ſphæræ, & altitu[illegible] ſphæræ; [c] erit hic cylindrus triplus illius coni baſem habentis æqualem eidem ſuperficiei ſphæræ, [illegible]
c 10. duod. ſemidiametrum eandem ſphæræ, quem ſphæræ æqualem eſſe proxime oſtendimus: ac proind[illegible] ſphæræ. Tertia ergo pars illius cylindri, cylindrus videlicet eandem habens baſem, altitudinem [illegible]
d 14. duod. tem altitudinis cylindri illius. [d] cum ille cylindrus ſit huius triplus, æqualis erit ſphæræ. Cum [illegible] cylindrus habeat ambitum maiorem ambitu ſphæræ, quod ille hunc excedat ambitu totius cy[illegible] baſe; quis non videt, ſi fiat cylindrus ſphæræ Iſoperimeter, hunc eſſe priore illo cylindro, ac [illegible] minorem? Sphæra ergo quolibet cono, & cylindro ſibi iſoperimetro maior eſt. Quod demon[illegible]

S C H O L I V M.

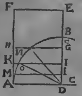
HÆC omnia fere ex Theone Alexandrino in commentariis in Almageſtum Ptolomæi & ex [illegible] xandrino in Mathematicis collectionibus, licet pleraque eorum clarius & facilius demonſtrauerimus [illegible] ſunt: quæ vero ſequuntur, à nobis inuenta ſunt, ac demonſtrata.

PROBL. 3. PROPOS. 20.

DATO ſemicirculo, vel quadranti, vel octauæ parti circuli, aut decimæſextæ, &c. re[illegible] conſtituere iſoperimetrum & æquale; ſi linea recta peripheriæ detur æqualis.

Semicirculo & aliis partibus ſubduplis circuli æqualia rectangula & iſoperimetra conſtituere.

SIT ſemicirculus ABC: Quadrans ABD, octaua pars circuli AND, pars ſextadecima AO [illegible] tur rectangulum AE, contentum ſub ſemidiametro AD, & ſub recta AF, quæ quartæ parti [illegible]



ſit, Item rectangulum AG, ſub ſemidiametro AD & [illegible] ctaua parte peripheriæ. Item rectangulum AI, ſub [illegible] AD, & ſub AK, parte decimaſexta peripheriæ. Item [illegible] AL, ſub ſemidiametro AD, & ſub AM, parte trigeſima [illegible] peripheriæ. Erit igitur ex iis, quæ lib. 4. cap. 7. ad [illegible] N [illegible] ſtendimus, AE, ſemicirculo ABC; & AG, Quadranti [illegible] octauæ parti AND; & AL, parti ſextædecimæ A[illegible] æ[illegible] Dico hæc eadem rectangula eſſe iſoperimetra [illegible] partibus, ſingula ſingulis, quod quidem perſpicuum [illegible] ſtructione. Nam AD, EF, æqualia ſunt diametro A[illegible] & A[illegible] ſemicircumferentiæ ABC, nimirum duabus q[illegible] p[illegible] cumferentiæ. Item AD, GH, æqualia ſunt ſemidiametris AD, DB, & AH DG, duabus partibus [illegible] quartæ parti circumferentiæ AB. Item AD, IK, duabus ſemidiametris AD, DN, & AK, DI, duabus [illegible] id eſt, octauæ parti circumferentiæ AN. Item AD LM, duabus ſemidiametris AD, DO & AM, LL, d[illegible] tibus trigeſimis ſecundis, hoc eſt, parti decimæſextæ AO; Atque ita deinceps, ſi tam peripher[illegible] AO, qu[illegible] AM, continue ſubdiuidatur. Dato ergo ſemicirculo, vel Quadranti, &c. rectangulum Iſoperimet[illegible], & [illegible] conſtituimus, quod faciendum erat.

HOC problema, quod ad ſemicirculum, ac Quadrantem attinet, [illegible] uerit etiam nuper R. P. O[illegible] cotius Mathematicus ingenioſus, cum problema Mathematicum per ſuos auditores exhiberet in Coll[illegible] mano: quamuis illud inſtar Theorematis propoſuerit.

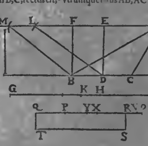
PROBL. 4. PROPOS. 21.

DATO triangulo cuicunque parallelogrammum æquale, atque iſoperimetrum conſtituere.

Parallelogrammum dato triangulo æquale & iſoperimetrum conſtituere.

SIT datum triangulum qualecunque ABC. Per A, ducatur AM, baſi BC, parallela. Et quia, ſi neuter angulorum B, C, rectus eſt, [a] vtrumque latus AB, AC maius eſt perpendiculari ex A, vel B, C, D, in oppoſitam parallelam demiſſa: ſi vero alter angulorum rectus eſt, [illegible]

a coroll. 19. primi.



eſt, alterutrum laterum perpendiculare eſt ad [illegible] parallelas; vtrumque latus AB, AC, ſimul maius quam duplum prædictæ perpendicularis; id [illegible] ſemiſſis aggregati ex vtroque latere maior p[illegible] diculari eadem; id eſt, ſi accipiatur GH, lateri [illegible] HI, lateri AC, æqualis, vt tota GI, ſummæ la[illegible] AB, AC, æqualis ſit, diuidaturque GI bifariam [illegible] ſemiſſis GK, maior erit perpendiculari DE. Si i[illegible] ex D, medio puncto baſis BC, ad interuallum [illegible] arcus circuli deſcribatur, ſecabit is rectam AM [illegible] liquo puncto, vt in L. Sumpta autem LM, ip[illegible] æquali, ducantur rectæ DL, BM, [b] quæ parall[illegible] ter ſe erunt; ideoque parallelogrammum erit D[illegible] [c] triangulo ABC, æquale. Dico hoc idem trian[illegible]

b 33. primi.
c ſchol. 41. primi.

eſſe iſoperimetrum, quod perſpicuum eſt ex conſtructione: quippe cum DL, BM, vtraq; æqualis ſit ipſi GK, [illegible] eſt, ſemiſſi laterum AB, AC, ac proinde ambæ DL, BM ſimul æquales ambobus lateribus AB, BD, AC, ſimul, [illegible] ctæ autem DL, LM, ſimul æquales baſi BC. Conſtructum ergo eſt parallelogrammum DM, non rectangul[illegible] æquale, & iſoperimetrum triangulo ABC.

QVOD [illegible] es rectangulum eidem triangulo ABC, æquale, & iſoperimetrum, ita agendum erit. Erectis [illegible] F, DE, [d] erit rectangulum BE, triangulo æquale, ſed non iſoperimetrum; [e] quod BF, DE, *d ſchol. 42. primi.* [illegible] as AB, AC, ſed BD, EF, baſi BC, æquales ac proinde ambitus rectanguli BE, ambitu trian- *e coroll. 19. primi.* [illegible] ideoque ſi producantur BF, DE, ad æqualitatem ſemiſſis laterum AB, AC, fiet quidem rectan- *f 13. ſexti.* [illegible] ABC, iſoperimetrum, ſed triangulo maius, cum ſuperet rectangulum BE. [f] Inuenta autem in- *g 17. ſexti.* [illegible] D, media proportionali N; [g] erit quadratum rectæ N, rectangulo BE, ideoque & triangulo ABC, æ- *h ſchol. 25. quinti* [illegible] Quia vero BF, BD, ſimul maiores ſunt, quam dupla rectæ N; [i] eſtque BM, maior quam BF, erunt *i 19. primi.* [illegible] ſimul multo maiores, quam dupla rectæ N. Sumpta ergo QP, ipſi BD, & PO, ipſi BM, æquali, vt to- *k ſchol. 13. ſexti.* [illegible] duabus BD, BM, ſimul ſit æqualis; erit quoque QO, maior quam dupla rectæ N. [k] Secetur ergo QO, *l 17. ſexti.* [illegible] vt N, ſit inter ſegmenta QR, RO, media proportionalis, perficiaturque rectangulum QS, ſub ſegmen- [illegible] RO, comprehenſum, [l] quod quadrato rectæ N, hoc eſt, rectangulo BE, vel triangulo ABC, æquale [illegible] idem eſſe triangulo ABC, iſoperimetrum. Quoniam enim QR, RS, ſimul, id eſt, recta QO, æquales [illegible] BD, BM, ſimul, ex conſtructione; erunt reliquæ ST, TQ, reliquis LM, LD, æquales; ideoque rectan- [illegible] QS, parallelogrammo BL, ac proinde & triangulo ABC, cui parallelogrammum BK, iſoperimetrum [illegible] m erit iſoperimetrum. Dato igitur triangulo cuicunq; parallelogrammum, &c. conſtituimus, quod [illegible] um erat.

SCHOLIVM.

QVOD ſi ſumatur punctum V, vtcunque inter R, & O, erit rectangulum ſub QV, VO, adhuc iſoperime- [illegible] triangulo ABC, ſed minus. Si vero capiatur punctum X, vtcunque inter R, & Y, (diuiſa QO, bifariam in [illegible] it adhuc rectangulum ſub QX, XO iſoperimetrum triangulo ABC, ſed maius. Quadratum denique rectæ [illegible] Y, iſoperimetrum quoque eſt triangulo ABC, & maius, quæ omnia ita demonſtrabimus. Prædicta rectangula, & quadratum rectæ QY, iſoperimetra eſſe triangulo ABC, hoc eſt, rectangulo QS, patet, cum bina latera circa an[illegible] um rectum æqualia ſemper ſint rectæ QO, hoc eſt, binis lateribus rectanguli QS. Eadem vero eſſe inæ- *m lemma 42. decimi.* qualia triangulo AB[illegible] ſic oſtendo. [m] Quoniam quadrata QV, VO, maiora ſunt quadratis QR, RO, ſimul: *n 4. ſecun.* [n] Sunt autem tam illa duo, vna cum rectangulo ſub QV, VO, bis, quam hæc duo, vna cum rectangulo ſub QR, RO, bis, quadrato QO, æqualia; erit rectangulum ſub QV, VO, bis minus rectangulo ſub QR, RO, bis, ideoq; & rectangulum ſub QV, VO ſemel rectangulo ſub QR, RO, ſemel minus erit. Non aliter oſtendemus, rectangulum ſub QR, RO, minus eſſe rectangulo ſub QX, XO, hoc eſt, rectangulum ſub QX XO, maius eſſe rectan- *o 6. ſecund.* [illegible] lo ſub Q[illegible] RO. Denique [o] quoniam rectangulum ſub QX, XO, vna cum quadrato XY, æquale eſt quadrato YO, vel QY, erit quadratum QY, maius rectangulo ſub QX, XO, ideoq; multo maius rectangulo ſub QR, RO, id eſt triangulo ABC quæ omnia demonſtranda erant.

EX quo conſtat, quadratum QY, ex ſemiſſe rectæ QO, deſcriptum maximum eſſe omnium rectangulorum ſub quibuſcunque ſegmentis rectæ QO, comprehenſorum, quod etiam ex propoſ. 12. huius lib. liquet.

PROBL. 5. PROPOS. 22.

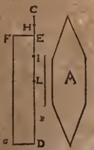
DATO rectilineo parallelogrammum rectangulum æquale, & Iſoperimetrum conſtituere. Oportet autem latus quadrati rectilineo æqualis, maius non eſſe ſemiſſe dimidiati ambitus dati rectilinei. *Rectangulum datæ figuræ iſoperimetrũ & æquale conſtituere.*

SIT hexagonum datum A, æquilaterum quidem, ſed non æquiangulum, ita vt B, ad latus quadrati illi æqualis [a] inuentum maius non ſit ſemiſſe dimidiati ambitus hexagoni. Sumpta ergo recta CD, æquali ſemiſſi ambitus hexagoni, erit B, recta non maior ſemiſſe ipſius CD, ſed vel æqualis, vel minor. [b] Secta autem CD, in E, *a 14. ſecun.* [illegible] a vt B, ſit media proportionalis inter ſegmenta DE, EC, fiat rectangulum EG, contentum ſub ſegmentis DE, *b ſchol. 13. ſexti.* EC. Dico rectangulum EG, æquale eſſe, & iſoperimetrum hexagono A. Quoniam enim tres DE, B, EC, continue proportionales ſunt; [c] erit rectangulum EG, quadrato B, id eſt, hexagono A, æquale. Et quia duo latera *c 16. ſexti.* DE, EF, æqualia ſunt rectæ CD, hoc eſt, ſemiſſi ambitus hexagoni A, ideoque reliquæ duæ FG, GD, alteri ſe- [illegible] erit totum rectangulum EG, hexagono A. iſoperimetrum. Dato ergo rectilineo parallelogrammum rectangulum æquale, & Iſoperimetrum conſtituimus: quod erat faciendum.

SCHOLIVM.

QVOD ſi B, latus quadrati foret maius [illegible] iſſe medii ambitus rectilinei A, hoc eſt, ma- [illegible] re[illegible] a CD, non poſſet CD, ita ſecari, vt B, eſ- [illegible] edio loco proportionalis inter ſegmenta, [illegible] quido conſtat.

IAM vero ſi ſumatur punctum H, inter [illegible] & E, vtcunq; erit rectangulum ſub DH, HC, [illegible] c iſoperimetrum figuræ A, ſed tamen mi- [illegible] i vero accipiatur punctum I, vtcunque in- [illegible] E & L, punctum medium rectæ CD; erit ad- [illegible] c rectangulum ſub DI, IC, figuræ A, iſoperi- [illegible] rum, maius tamen. Sic etiam quadratum ſe- [illegible] s DL, erit iſoperimetrum eidem figuræ & [illegible] ius; quæ omnia demonſtrabũtur, vt in ſcho- [illegible] præcedentis problematis dictum eſt.



APPENDIX.

DE circulo per lineas quadrando.

Quo pacto reperiatur per numeros quadratum circulo æquale, & contra ex doctrina Archimedis.

1 LOCVS hic me admonet, vt quoniam hoc libro demonſtratum eſt, circulum figurarum omnium ſibi iſoperimetrarum eſſe maximum, breuiter doceam, qua ratione dato circulo quadratum conſtrui poſſit æquale, & viciſſim dato quadrato circulus æqualis; atque id per lineas: cum lib. 4. c. 7. copioſe traditum ſit, quo pacto inuētis ab Archimede, per numeros circulus quadrandus ſit, hoc eſt, qua ratione area circuli, ſiue capacitas tam ex diametro, tum ex circumferentia cognita ſit inuenienda: Huius enim areæ radix quadrata, latus eſt quadrati, quod circulo æquale eſt. Sic è contrario cap. 8. eiuſdem lib. regula 1. Num. 1. docuimus, qua via ex data circuli area indaganda ſit tam circumferentia, quam diameter illius circuli: hoc eſt, propoſito quadrato, inſtar areæ circuli alicuius, quomodo circulus deſcribendus ſit illi quadrato æqualis. Inuenta enim diametro per prædictam regulam 1. Num. 1. cap. 8. lib. 7. circulus illius diametri erit is, qui quæritur. Viſum eſt autem appendicem hanc huic ſeptimo adiungere, quod tractatio de circuli Tetragoniſmo, ſiue quadratura, non parum affinis ſit de iſoperimetris figuris diſputationi.

Circuli quadratura per numeros ſecundum Arabes falſa.

QVADRATVRA autem circuli per numeros, quam Arabes tradiderunt, & quam Ioſephus Scaliger in ſuis Cyclometricis elementis veram eſſe credit, omnino reiicienda eſt, cum ſit extra limites Archimedis, quos conſtat, proportionem circumferentiæ ad diametrum minorem debere eſſe tripla ſeſquiſeptima, maiorem vero tripla ſuperdecupartiente ſeptuageſimas primas, quod in numeris Arabum non cernitur. Dicunt enim proportionem circumferentiæ ad diametrum eſſe potentia decuplam: adeo vt ſi quadratum circumferentiæ ponatur 10. quadratum diametri ſit 1. quod falſum eſt. Nam cum radix quadrata numeri 10. ſit maior quam 3$\frac{1}{7}$, quod huius radicis quadratum ſit tantum $9\frac{43}{49}$. Radix autem vnitatis ſit 1. eſſet maior proportio circūferentiæ ad diametrū, quam tripla ſeſquiſeptima: cum tamen ſecundum Archimedem ſit minor. Item quia poſita diametro 7. circumferentia minor eſt, quam 22. ex Archimede; erit quadratum circumferentiæ minus, quam 484. quod ad 49. quadratum diametri minorem proportionem habet, quam decuplam; quippe cum 490. ad 49. proportionem habeant decuplam. Minor igitur eſt proportio quadrati circumferentiæ ad quadratum diametri, quam decupla.

Quadratura circuli per numeros ex Alberto Durero falſa. a ſchol. 47. primi.

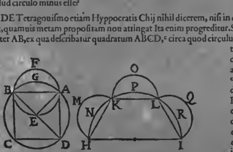
SIMILI modo reiicienda eſt ratio quadrandi circuli per numeros Alberti Dureri, qui exiſtimat, diuiſa diametro circuli in octo partes æquales, diametrum quadrati circulo æqualis eſſe 10. adeo vt diameter quadrati circulo æqualis ad diametrum circuli proportionem habeat, quam 10. ad 8. quod etiam falſum eſt. Nam cum quadratum diametri 10. ſit 100. [a] duplumque quadrati, cuius diameter eſt 10. & quod circulo diametri 8. dicitur æquale: erit quadratum circulo æquale 50. Sed ex diametro 8. reperitur area circuli maior, quam vera, $50\frac{2}{7}$. minor autem, quam vera, $50\frac{18}{71}$. vt cap. 7. lib. 4. Numer. 4. tradidimus. Vera ergo circuli area maior erit, quam $50\frac{18}{71}$. atque adeo multo maior, quam 50. Eſt igitur quadratum Alberti minus area circuli, non autem æquale.

Falſa quadratura circuli per lineas Campano aſcripta. b 13. huius.

2 IAM vero, vt ad quadraturam circuli per lineas aggrediamur, pudet me refellere illam, quæ imperitis vera eſſe videtur, & quam ſciolus, neſcio quis, Campano Mathematico non indocto affinxit, typiſq; mandauit. Eſt autem talis. Linea recta circumferentiæ circuli æqualis (quo pacto autem eiuſmodi linea inueniatur, non docet) ſecetur in 4. partes æquales, ex quibus quadratum conſtituatur, quod ſciolus ille circulo dicit eſſe æquale: quæ res omnino Geometra indigna eſt, & plane ridicula. Si enim quadratum illud circulo eſt Iſoperimetrum, [b] circulus autem omnium figurarum rectilinearum ſibi iſoperimetrarum capaciſſimus eſt, quis non videt, quadratum illud circulo minus eſſe?

Quadratura Hyppocratis Chij. c 9. quinti. d 31. tertij. e ſchol. 26. primi. f ſchol. 27. primi. g 2. duodec.

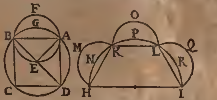
3 DE Tetragoniſmo etiam Hyppocratis Chij nihil dicerem, niſi in eius demonſtratione acumen ingenij lateret, quamuis metam propoſitam non attingat Ita enim progreditur. Sit quadrandus circulus AFBE, cuius diameter AB, ex qua deſcribatur quadratum ABCD, [c] circa quod circulus deſcribatur ABCD, cuius diameter BD, datum circulum AFBE ſecet in E. Ducta ergo recta AE, [d] erit angulus AEB, in ſemicirculo rectus; [e] ideoque perpendicularis AE, diuidet baſem BD, trianguli Iſoſcelis ABD, bifariam: ac proinde E, centrum erit circuli ABCD. [f] Et quia quadratum diametri BD, duplum eſt quadrati diametri AB; [g] eſtque vt quadratum BD, ad quadratum AB ita circulus ABCD, ad circulum AFBE, erit quoque circulus circuli duplus; & ſemicirculus BAD, ſemicirculi AFB; ideoque ſemiſſis ſemicirculi BAD: id eſt, quadrans ABE, (eſt enim ABE, quadrans, ob angulum rectum in centro E,) ſemicirculo AFB, æqualis. Dempto igitur communi ſegmento AGB, reliquum triangulum AEB, reliquæ Lunulæ AFBGA, æquale erit: ac proinde ſi triangulo fiat quadratum æquale, erit idem hoc quadratum Lunulæ AFBGA, æquale. Atque ita quadrata eſt Lunula AFBGA.



DEIN

DEINDE ſit recta HI, diametri AB, dupla, circa quam ſemicirculo deſcripto, aptentur in eo tres rectæ ſemidiametro huius circuli, hoc eſt, diametro AB, æquales HK, KL, LI, continentes ſemiſſem hexagoni: [a] cum latus hexagoni ſit ſemidiametro æquale. Deſcriptus autẽ circa illas tres rectas ſemicirculis HMK, KOL, LQI, qui ſemicirculo AFB, æquales ſunt, propter diametros æquales; [b] quoniam quadratum rectæ HI, quadrati rectæ HK, quadruplum eſt, quod latus lateris ſit duplum: [c] erit quoq; circulus diametri HI, circuli diametri HK, quadruplus & ſemicirculus HKLI, ſemicirculis HMK, KOL, LQI, AFB, æqualis erit: demptiſq; ſegmentis communibus HNK, KPL, LRI, reliquum trapezium HKLI, æquale erit tribus Lunulis HNKM, KPLO, LRKQ. vna cum ſemicirculo AFB. Si igitur tres illæ Lunulæ quadrentur, vt traditum eſt, & tribus illis quadratis auferatur ex trapezio rectilineum æquale, hoc eſt, [d] inquiratur exceſſus trapezii ſuper tria illa quadrata; erit exceſſus hic rectilinea figura ſemicirculo AFB, æqualis. [e] Si igitur huic figuræ quadratum fiat æquale, erit idem hoc quadratum ſemicirculo AFB, æquale; & quadratum ex illius quadrati diametro deſcriptum toti circulo AFBE, æquale. [f] quod tam quadratum quadrati duplum ſit, quam circulus ſemicirculi. Quadratus ergo circulus eſt.

a coroll. 15. quarti. *b ſchol. 4. ſecundi.* *c 2. duode.* *d ſchol. 45. primi.* *e 14. ſecun.* *f ſchol. 45. primi.*



HÆC eſt quadratura Hyppocratis, acuta quidem, quod Lunulam AGBF, vere quadrauerit, vitioſa autẽ, quod tres Lunulas HNKM, KPLO, LRIQ, quadratas à ſe eſſe arbitratur, quod verum non eſt. Solum enim ex eius demonſtratione Lunula ea quadratur, cuius inferior peripheria eſt quarta pars peripheriæ alicuius circuli, ſuperior autem ſemicirculus alterius circuli, qualis fuit Lunula AGBF. Nam AGB, quarta pars eſt circumferentiæ ABCD, & AFB, ſemiſſis peripheriæ AFBE. At eiuſmodi non ſunt tres aliæ Lunulæ, quippe cum earum peripheriæ inferiores HNK, KPL, LRI, ſint ſextæ partes totius circumferentiæ, quamuis peripheriæ ſuperiores ſint ſemicirculi, vt in illa: quæ nondum ſunt quadratæ. Quod ſi inuenta eſſet ars quadrandi huiuſmodi Lunulas, veriſſime quoq; quadraretur circulus, ſine inuentione lineæ rectæ circuli peripheriæ æqualis, quæ ſane res foret præclara.

Fallacia quadraturæ Hippocratis. *Quid deſideretur in Hippocratis quadratura.*

COLLIGITVR ergo ex hac ratione Hippocratis, quadraturam circuli eſſe poſſibilem, cum ſicut Lunula AGBF, quadrata eſt, ita quoque Lunulam HNKM, quadrari poſſe, nihil obſtet, quamuis adhuc non ſit à quoquam quadrata. Et certe, vt quidam recte affirmat, quod hic oſtenditur ab Hippocrate de Lunula AGBF, quæ pars eſt circuli AFBE, nihil idem prohibet de circulo toto fieri poſſe, etiam non inueſtigata quantitate peripheriæ circuli, cum ſolum deſit ars quadrandi Lunulam HNKM. Immo plus aliquanto dubitationis inferret inuentio quadraturæ Lunulæ AGBF, non cognita, quam circuli.

4 MVLTA quoque hic dicenda eſſent de falſis aliorum quadraturis, ſed quia hæ vel ſe ipſas produnt, cum in progreſſu earum facile appareat. aliquid deeſſe ad conſtituendum circulo æquale quadratum, cuiuſmodi eſt quadratura Iacobi Falconis Equitis Hiſpani, qui ſine inuentione lineæ rectæ, quæ peripheriæ ſit æqualis, circulum quadrare conatur: vel ab aliis iam dudum ſunt cõfutatæ, nimirum Nicolai Cuſani Cardinalis quadratura à Ioanne Regiomontano, ac Ioanne Buteone, & Orontii Finaci Tetragoniſmus tum ab eodem Buteonẽ, tum à Petro Nonio Luſitano in libello de Erratis Orontii: quorum vterque variis viis lineam rectam circumferentiæ æqualem ſe inueniſſe putauit, nihil omnino dicendum mihi eſſe ſtatuo, ne fruſtra tempus terere inutiliter videar. Quamobrem ſolum hoc loco eam quadraturam ſubiiciam, & plenius aliquanto exponam, quam ad finem lib. 6. Euclid. conſcripſi, quæ videlicet per lineam Quadratricem (ſic enim eam appellare lubet) lineam rectam inuenit circulari æqualem. Hæc enim via licet ad Geometrice inueniendum punctum quoddam, nonnihil in ea deſideretur, accuratior tamen eſt omnibus aliis, quas hactenus videre potui; ita vt practice à ſcopo aberrare non poſſimus. Vt autem clare atque ordinate procedam, abſoluam totum negotium paucis quibuſdam propoſitionibus.

Cur de falſis aliorum quadraturis hic nihil dicatur. *Quæ non quadratura per lineas hic explicetur.*

I.

QVADRATRICEM lineam deſcribere.

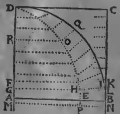
DINOSTRATVS, & Nicomedes, vt auctor eſt Pappus Alexandrinus in 4. lib. Mathematicarum collectionum, lineam quandam inflexam excogitarunt ad circuli quadraturam, ideoque ab officio τετραγωνίζουσα ab eiſdem eſt appellata: à nobis vero eadem de cauſa quadratrix dicetur. Quamquam autem prædicti auctores conentur huiuſmodi lineam deſcribere per duos motus imaginarios duarum rectarum ſe ſe interſecantium, qua in re principium (vt philoſophi loquuntur) petunt, propterea à Pappo reiiciatur, tanquam inutilis, & quæ deſcribi non poſſit: nos tamen eam ſine illis motibus Geometrice delineabimus per inuentionem quotuis punctorum, per quæ duci debeat; quemadmodum in deſcriptionibus conicarum ſectionum fieri ſolet.

5 SIT ergo in quadrato ABCD, deſcriptus Quadrans BD. Si igitur, vt volunt inuentores lineæ Quadratricis, tam ſemidiameter AD, æqualiter ferri intelligatur circa centrum A, quam latus quadrati ſupremum CD, deorſum latus æquabiliter quoque: ita vt, quo tempore punctum D, circumferentiam DB, vniformi ſemper motu percurrit, eodem recta DC, vniformi etiam motu deſcendens ad latus AB, perueniat, ſic tamen, vt perpetuo ſit lateri AB, parallela, & cum lateribus AD, BC, angulos rectos efficiat, ſecabunt ſe mutuo continue ſemidiameter in circumferentia DB, circumacta, & recta DC, deorſum lata, in pun ctis,

Quadratricis deſcriptio.



ctis, quæ lineam Quadratricem deſcribent: hoc eſt, per quæ linea Quadratrix tranſibit, cuiuſmodi eſt li-



flexa DE. Sed quia duo iſti motus vniformes, quorũ vnus per circumferentiam DB, fit, & alter per lineas rectas DA, CB, effici poſſunt, niſi proportio habeatur circularis lineæ ad rectam, m à Pappo deſcriptio hæc reprehenditur: quippe cum ignota ad ſit ea proportio, & quæ per hanc lineam inueſtiganda propona Quare nos Geometrice eandem lineam Quadratricem deſcri mus hoc modo. Arcus BD, in quotuis partes æquales diuidatur, & latus vtrumq; AD, BC, in totidem æquales partes. Facil ma di ſio erit, ſi & arcus DB, & vtrumque latus AD, BC, ſecetur primo bifariam, deinde vtraque ſemiſſis iterum bifariam, atque ita d ceps, quantum libuerit. Quo autem plures extiterint diuiſion accuratius Quadratrix linea deſcribetur. Nos ad confuſionem tandam ſecuimus tam arcum DB, quam duo latera AD, BC, in octo tantum partes æquales.

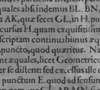
DEINDE bina puncta laterum AD, BC, æqualiter diſtantia a latere DC, vel AB, coniunguntur lineis ctis occultis, atque ex centro A, aliæ rectæ occultæ ad ſingula diuiſionum puncta Quadrantis DB, extendan Vbi enim hæ rectæ priores rectas interſecabunt, prima primam, ſecunda ſecundam, &c. per ea puncta Quadra trix linea congruenter ducenda eſt, ita vt non ſit ſinuoſa, ſed æquabiliter ſemper progrediatur nullum effic gibbum, aut angulum alicubi: qualis eſt linea inflexa DE, ſecans ſemidiametrum AB, in E.

6 SED quia punctum E, in latere AB, inueniri Geometrice non poteſt, cum ibi omnis ſectio r ceſſet: vt illud ſine notabili errore, qui ſcilicet ſub ſenſum cadat, reperiamus: vtemur hoc artificio: Infimã AF, lateris AD, ſi ſatis exigua non ſit, ſecabimus bifariam continue, donec infima particula ſit perexigua demque modo infimam partem BI, arcus DB, biſariam continue ſecabimus, donec tot fiant ſubdiuiſiones, q in parte AF, factæ ſunt, vt particula BK, talis pars ſit totius arcus DB, qualis pars eſt AG, totius lateris AD. culæ deinde AG, æquales abſcindemus BL, BN, AM, ducemuſque rectas occultas GL, MN. Ducta vero ex centro recta occulta AK, quæ ſecet GL, in H, puncto, quod accuratiſſime notetur (adhibito videlicet Lemma Probl. 1. lib. 2. vt concurſus H, quam exquiſitiſſime reperiatur) ſumemus ipſi GH, æqualem MP. Si n. Qua cem vſque ad H, deſcriptam continuabimus æquabili, atq; vniformi extenſione vſque ad P, ſecabit Quadratrix linea latus AB, in E, puncto, quod quæritur. Nam propter paruam rectarum GH, AE, MP, inter ſe diſtantia efficitur, vt ferme ſint æquales, licet Geometrice loquendo recta AE, ſemper maior ſit aliquanto, quantumuis parum eæ rectæ inter ſe diſtent: ſed exceſſus ille circino deprehendi non poteſt: adeo vt arcus circuli ex A, per H P, deſcriptus verum punctum E, quod ad ſenſum attinet, indicare videatur. Id quod etiam in circumferentia circuli contingit. Rectæ, namque GL, AB, MN, ſi parum inter ſe diſtent, in circulo omnino æquales iudicabuntur quamuis vere AB, aliquanto maior ſit. Itaque ſi tres illæ rectæ GH, AE, MP, perexiguam habeant diſtantiam inter ſe, dubitari non poteſt, punctum E, in quo quadratrix linea ſemidiametrum AB, ſecat, ab eo, quod vere in Quadratrice ibi exiſtit, non differre notabiliter: dummodo puncta H, P, exquiſite & ſumma adhibita diligenti inuenta ſint.

Latus baſis & centrum Quadratricis. RECTAM porro AD, vocabimus latus Quadratricis: & rectam AE, eiuſdem baſem: ac deniq; punctum A, centrum eiuſdem.

7 VERVM puncta Quadratricis prope baſem certius inueniemus (ſine interſectionibus linearum, qu ibi valde obliquæ ſunt) per lineas perpendiculares: hoc modo. Ducta chorda Quadrantis BQ, ſecetur in D, bifariam, quod fiet, ſi ex A, ad C, punctum medium Quadrantis recta ducatur. [a] Hæc enim rectam BQ, ſecabit bifariam. Deindè rectæ AD, ſumatur æqualis AE iunctaque recta DE, ſecetur bifariam in F, quod etiam fiet, ſi ex A, ad I, punctum medium arcus BC, ducatur AI. [b] Hæc enim chordam BC, (ſi duceretur) ſecaret bifariam: [c] ac proinde & rectã DE, [d] quæ chordæ BC, eſt parallela: propterea quod latera AB, A triangulo ABC, proportionaliter ſecantur in D quippe cum tam AB, AC, quã AE, AD, æquales ſint Rurſus rectæ AF, capiatur æqualis AG, iunctaq; F

a ſchol. 27. tertij.
b ſchol. 27. tertij.
c ſchol. 4. ſexti.
d 2. ſexti.



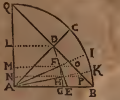
ſecetur bifariam in H, quod etiam fiet per rectam AK, ductam ad K, punctum medium arcus BI. Atq; hoc modo, ſi rectæ AH, æqualis accipiatur, & reliqua fiant, vt prius, inuenietur aliud punctum inter H, & G. Et ſic d ceps quotuis alia puncta reperiemus viciniora ipſi AB, per lineas perpendiculares, non autem per obliquas ctiones, vt in priori figura. [e] Eſt enim AD, ad DB, perpendicularis [f] & AF, ad DE, & DH, ad FG, &c.

e 3. tertij.
f ſchol. 26. primi.
g 2. ſexti.
h 2. ſexti.
i 2. ſexti.

OMNIA vero hæc puncta inuenta D, F, H, &c. eſſe in Quadratrice, ita oſtendo. Ductis DL, FM, HN, AB, parallelis ſecantibus BD, in O, P; [g] erit vt BD, ad, DQ ita AI, ad LQ ideoque & AQ, ſecta erit in L, bifar Sectus autem eſt & arcus BQ, in C, bifariam. Igitur, vt oſtenſum eſt, punctum D, eſt in Quadratrice. Rurſus q DE, ſecta eſt bifariam in F, [h] erit quoq; DB, ſecta bifariam in O, [i] ideoque erit vt EF, ad FD, ita BO, ad OD. vt BO, ad OD, ita eſt AM, ad ML, & vt EF, ad FD, ita arcus BI, ad IC. Ergo vt oſtendimus, ſecabunt ſeſe, AI, M in puncto Quadratricis. Eademque ratio eſt de aliis punctis hac arte inuentis.

8 ESSE porro lineam hanc inflexam DE, à nobis Geometrice deſcriptam, eandem, quam Dinoſtratu & Nicomedes per duos illos motus imaginarios deſcribi concipiebant, perſpicuum eſt. Nam ſi ſemidiam AD, in priori figura circa centrum A, per arcum DB, eodem tempore moueatur motu vniformi, quo latus DC deorſum fertur motu quoque vniformi: ſit vt quando ſemidiameter AD, pertranſiuit quamcunque partem arcus DB, tunc latus DC, ſimilem partem laterum DA, CB, percurrerit. Alias aut duo illi motus non eſſent vniformes

formes, aut non eodem tempore ad latus AB, tam ſemidiame r AD, quam latus DC, perueniret. Cum ergo r ctæ e c ntro A, per partes arcus DB, emiſſæ, & n parallelæ per partes laterum DA, CB, ductæ c adant ſemper ex arcu DB, & ex lateribus DA, , partes ſimiles, ex conſtructione: liquido conſtat, uncta lineæ inflexæ DE, à nobis Geometrice in , a punctis, quæ à duobus illis motibus reperi tur, non differre

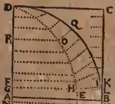


HÆC igitur eſt deſcriptio lineæ Quadratricis metrica quodammodo, quemadmodum & co m ſectionum deſcriptiones, quæ per puncta etiam fiunt, vt ab Appollonio traditur, Geometricæ dicun cum tamen errori magis ſint obnoxiæ, quam noſtra deſcriptio, propter inuentionem plurimarum linearum arum proportionalium, quæ ad earum deſcriptiones ſunt neceſſariæ, quibus in Quadratricis deſcriptione non eſt. Quare niſi quis totam conicarum ſectionum doctrinam, quam tanto ingenii acumine Apollo Pergaeus perſecutus eſt, vt propterea Magnus Geometra appellatus ſit, reiicere velit, tanquam inutilem, & Geometricam, (quod neminem in Geometria peritum facturum exiſtimo, cum ſectiones conicas ad de tiones adhibuerint præſtantiſſimi Geometræ. Nam Menechmus Hyperbola, ac Parabola vſus eſt in linearum mediarum proportionalium inter quaſuis duas rectas inuentione; Et Archimedes ipſe multa e de iiſdem ſectionibus conicis demonſtrauit: ac denique eiuſmodi ſectiones inſignem vſum habent in Gnomonica, vt ex noſtra Gnomonica apparet) admittere omnino cogetur, hanc deſcriptionem noſtram adratricis lineæ eſſe quodammodo Geometricam. Adde quod linea conchilis, qua Nicomedes duas medias as proportionales acutiſſime inueſtigat, per puncta etiam deſcribitur, vt libro 6. propoſ. 15. diximus.

HABET linea hæc Quadratrix multas, & inſignes vtilitates, quarum nonnullas ad finem lib. 6. Euclid. de onſtrauimus, quas hoc loco repetere ſuperuacaneum eſt. Solum igitur eius vſum in quadrãdis circulis hic ex nemus. Qua in re indigemus tantummodo vltimo puncto E, in priori figura, etiamſi nullum aliud Quadra cis punctum inuentum eſſet quod quidem vltimum punctum licet Geometrice, ac præciſe non reperiatur: i artificiũ poſterioris figuræ adhibeatur, nõ aberrabimus à vero puncto notabiliter, vt ſupra diximus. Quãdo namq; deprehenſum fuerit, vltimam perpendicularem AH, æqualem eſſe præcedenti vltimæ lineæ translatæ AG, ita vt nulla differentia inter illas per circinum diſcernatur: ſumi poterit citra errorem notabilem vltimum ud punctum G, pro puncto extremo Quadratricis: Sin minus, ducendæ erunt aliæ perpendiculares eo artifi io, quo AF, AH, ductæ ſunt, donec inter vltimam, & poſtremo loco inuentam rectam in ſemidiametro AB, nullum appareat diſcrimen, cuius quidem rei operatio ipſa optimus erit magiſter.

COROLLARIVM.

9 EX deſcriptione Quadratricis colligitur, ſi ex centro A, ducatur recta vtcunque AQ, ſecans arcum Quadrantis in Q, & Quadratricem in O; ita eſſe arcum BD, ad arcum BQ, vt eſt ſemidiameter AD, ad rectam AR, ducta prius OR, ipſi AB, parallela:[a] ac proinde & ad re m, quæ ex O, ad AB, demittitur perpendicularis. Quia enim eadem pars eſt arcus DQ, totius arcus DB, quæ pars eſt DR, totius ſemidiametri DA, quippe cum in deſcriptione Quadratricis arcus DQ, totius arcus DB, tot particulas complectatur, quot partes recta DR, totius DA, con et: quandoquidem rectæ AQ, RO, ſeſe interſecant in O, uncto Quadratricis. Neque hæc ſimilitudo impeditur, et ſi tam arcus DQ. toti arcui DB, quam recta DR, toti la eri DA, ſit incommenſurabilis, cum perpetuo Quadratrix dem vniformitate progrediatur per omnia ſua puncta. Si enim recta DR, non eſt talis pars, ſiue commenſurabilis, ſi incommenſurabilis totius lateris DA, qualis pars eſt arcus DQ, totius arcus DB; ſi cogitetur talis pars lateris A, minor quam DR, vel maior, ſecabit parallela ex eius puncto extremo ducta rectam AQ, vel ſupra O, vel fra, in puncto, per quod Quadratrix deſcribenda eſt; ac proinde ea non tranſibit per O, quod eſt abſurdum, & tra hypotheſim. Quia inquam eadem pars eſt arcus DQ. totius arcus DB, quæ pars eſt recta DR, totius late DA;[b] erit quoque reliquus arcus QB, eadem pars totius arcus DB, quæ pars eſt reliqua recta RA, totius late DA: quod eadem ſit proportio totius DB, ad DQ, quæ totius DA, ad DR: Et permutando eadẽ totius DB, totam DA, quæ ablati arcus DQ, ad ablatam rectam DR. Quocirca erit, vt totus arcus DB, ad arcum QB, totum latus DA, ad rectam RA, hoc eſt, ad rectam perpendicularem ex O, ad AB, demiſſam,[c] quæ ipſi RA, ualis eſt.



a 34. prim.

b 19. quint.

c 34. prim.

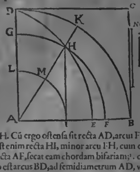
II.

Quadrantis, & Quadratricis idem centrum ſit, erunt arcus Quadrantis, ſemidiameter, & baſis quadratricis continue proportionales.

HÆC eſt eximia, atque inſignis proprietas Quadratricis. Sit Quadrans, & Quadratrix ex eo deſcripta, vt ra. Dico arcum BD, ſemidiametrum AD, & Quadratricis baſem AE, continue eſſe proportionales, hoc eſt, BD, ad AD, vt AD, ad AE. Sin minus, ſit vt BD, ad AD, ita AD, ad AF, maiorem ipſa AE, minoremue, ſitq;

primum

primum AF, maior, quam AE. Deſcripto ex centro A, Quadrante FG, per F, ſecante qua[illegible] H, [illegible] tur per H, ſemidiameter AHK, demittaturque perpendicularis HI. Quoniam igitur ponitur arcus BD, ad re-



ctam AD, vt AD, hoc eſt, vt AB, ad AF, eſtque vt AB, ſemi- meter ad ſemidiametrum AF, ita arcus BD, ad arcum FG: Cu[m] enim ſit, vt lib. 4 cap. 7. propoſ. 1. demonſtrauimus, diamet[er] ad diametrum, vt circumferentia ad circumferentiam; *a 15. quint.* a erit quo[que] ſemidiameter AB, ad ſemidiametrum AF, vt eadem circum[feren-] *b 15. quint.* tia ad eandem circumferentiam: b ac proinde etiam, vt qu[arta] pars circumferentiæ ad quartam partem circumferentiæ, ho[c eſt,] *c 11. quint.* vt arcus BD, ad arcũ FG,) c Erit quoq; arcus BD, ad rect[am] AF, *d 9. quinti.* idẽ arcus BD, ad arcũ FG; d ac propterea æquales erunt recta A[F], & arcus FG. Quia vero ex præcedenti cor. eſt, vt arcus BD, ad ar- cũ BK, ita rectã AD, ad rectã HI, & vt arcus BD, ad arcũ BK ita *e ſchol. 33. ſexti.* arcus FG, ad arcũ FH, e quod arcus BD, BK, arcubus FG, FH, ſi[miles] ſint; f erit quoq; recta AD, ad rectam HI, vt arcus FG, ad ar[cum]
f 11. quinti. FH. Cũ ergo oſtenſa ſit recta AD, arcui FG, æqualis: g erit quoq; recta HI, arcui FH, æqualis, quod eſt abſur[dum.]
g 14. quin. Eſt enim recta HI, minor arcu FH, cum ea ſit ſemiſſis chordæ ſubtendentis arcum duplum arcus FH: h (
h 3. tertij. recta AF, ſecat eam chordam bifariam; i ac proinde & arcum) chorda autem ſemper ſuo arcu minor ſit. No[n er-]
i ſchol. 27. tertij. go eſt arcus BD, ad ſemidiametrum AD, vt AD, ad rectam maiorem baſe AE, Quadratricis.

SIT deinde, ſi fieri poteſt, vt arcus BD, ad AD, ita AD, ad AI, minorem baſe AE. Deſcripto igitur [ex cen-] tro A, per I, Quadrante IL, exigatur ex I, ad AE, perpendicularis IH, ſecans Quadratricẽ in H, puncto per q[uod] ſemidiameter ducatur AK, ſecans arcum IL, in M. Oſtendemus ergo, vt prius, arcum IL, rectæ AD, æqual[em eſ-] ſe. Item ita eſſe arcum BD, ad arcum BK, hoc eſt, arcum IL, ad arcum IM, vt eſt recta AD, ad rectam HI. Q[uare]
k 14. quint. cum arcus IL, oſtenſus ſit æqualis rectæ AD; k erit quoque arcus IM, æqualis rectæ HI, quod eſt abſurdu[m. Eſt]
enim recta HI, maior arcu IM. Nam ſi ex H, duceretur verſus G, alia recta tangẽs circulum IL, ſicut HI, eunde[m]
l 2. coroll. 36. tertij. tangit in I, l eſſent hæ duæ tangentes æquales, arcuſque inter eas interceptus ſecaretur bifariam in M, m pro[pter]-
m ſcho. 27. tertij. ea quod angulus ab eis comprehenſus bifariam diuideretur à recta AH, n ac proinde & angulus in centro A, [ſi ad] alterum punctum contactus recta adiungeretur: o ideoque arcus, quibus inſiſtunt, æquales forent. Igitur c[um]
n 4. vel 8. primi. lib. 8. propoſ. 1. probabimus cum Archimede, duæ illæ tangentes ſimul maiores ſint arcu ab eis comprehen[ſo, e-]
rit & earum ſemiſſis HI, maior ſemiſſe IM, illius arcus. Non eſt ergo arcus BD, ad ſemidiametrum AD, v[t] AD, [ad]
o 26. tertij. rectam minorem baſe AE, Quadratricis; Sed neq; vt AD, ad maiorem, ſicut oſtenſum eſt. Igitur vt AD, ad [ip-] baſem AE. Quod demonſtrandum erat.

COROLLARIUM I.

Rectam circumferentia circuli æqualem reperire.

HINC facile rectam reperiemus arcui Quadrantis, ex quo Quadratrix deſcripta eſt, ac proin- de & ſemicircumferentiæ, immo & toti circumferentiæ æqualem.

QVONIAM eſt arcus BD, ad ſemidiametrum AD, vt AD, ad baſem Quadratricis AE; erit conuertend[o] quoq; AE, ad AD, vt AD, ad arcum BD. Si igitur duabus rectis AE, AD, inueniatur tertia proportionalis; p e[rit]
p 11. quint. AD, ad eam tertiam, vt ad arcum BD, cum vtraq; proportio ſit eadem, quæ AE, ad AD, q Quare tertia illa pro-
q 9. quinti. portionalis arcui Quadrantis BD, æqualis erit: Et ſi duplicetur, fiet recta æqualis ſemicircumferentiæ eiuſde[m] circuli: Si vero quadruplicetur, fiet recta toti circumferentiæ æqualis.

COROLLARIUM II.

SEQVITVR quoque ex his, ſi baſis Quadratricis AE, ſtatuatur ſemidiameter alicuius circu[li,] eius latus AD, quartæ parti circumferentiæ illius circuli eſſe æquale. Et lineam lat[eris] AD, duplam æqualem eſſe ſemicircumferentiæ eiuſdem circuli: Et lineam quadrupla[m] lateris toti circumferentiæ eſſe æqualem.

CVM enim, vt lib. 4. cap. 7. propoſ. 1. oſtendimus, diametri circulorum circumferentiis ſint proportiona-
r 15. quint. les r erunt quoque ſemidiametri circumferentiis, & quadrantibus proportionales. Igitur erit, vt AD, ad AE, h[oc] eſt, vt ſupradicta tertia proportionalis ad AD, ita quadrans BD, ſemidiametri AD, ad Quadrantem ſemidiame-
s 14. quint. tri AE. Cum ergo tertia illa proportionalis æqualis ſit oſtenſa Quadranti BD; s erit quoque recta AD, quadran- ti ſemidiametri AE, æqualis. Dupla ergo linea ipſius AD, ſemicircumferentiæ circuli, cuius ſemidiameter AE; [&] quadrupla toti circumferentiæ erit æqualis.

COROLLARIUM III.

EX his quoque infertur, ſi duæ rectæ N, O, in præcedenti figura eandem proportionem hab[e]- ant, quam AD, AE, minor autem O, ſtatuatur ſemidiameter circuli alicuius, maiorem N æqualem eſſe arcui Quadrantis illius circuli.

CVM

CVM enim ſit AD,ad AE,vt N,ad O;erit permutando AD,ad N,vt AE,ad O. Vt autem AE,ad O,ita eſt Quadrans ſemidiametri AE,ad Quadrantem ſemidiametri O,vt lib. 4.cap.7.propoſ.1.demonſtrauimus. [a] Igitur erit quoque AD,ad N,vt Quadrans ſemidiametri AE,ad Quadrantem ſemidiametri O. Cum ergo AD, æqualis ſit oſtenſa Quadranti ſemidiametri AE;[b] erit quoque N,æqualis Quadranti ſemidiametri O. quod eſt propoſitum.

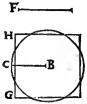
a 11. quin.
b 14. quin.

III.

DATO circulo quadratum æquale conſtituere.

Quadratum circulo æquale exhibere.

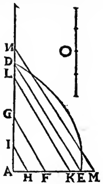
SIT quadrandus circulus ad interuallum ſemidiametri BC,deſcriptus. Tribus rectis AE, baſi Quadratricis; AD,lateri eiuſdem præcedentis figuræ, & rectæ BC, inuenta quarta proportionali F;erit ex coroll.3. antecedenti recta F, quadranti circuli dati æqualis, atque eius dupla ſemicircumferentiæ æqualis erit. Inuenta autem inter ſemidiametrum BC, & duplam ipſius F,media proportionali GH;Dico quadratũ ex GH,deſcriptum ęquale eſſe circulo ad interuallũ BC,deſcripto.[a] Quoniam n.rectangulum ſub BC, ſemidiametro, & ſub ſemicircumferentia circuli,id eſt,ſub dupla rectę F,inuentæ,ęquale eſt circulo:[b]Prędicto autem rectangulo æquale eſt quadratum lateris GH; erit quoq; quadratum lateris GH,circulo ſemidiametri BC,æquale.



a 4 Iſoperimetrorum
b 17. ſext.

VERVM vt expedite linea recta inueniatur æqualis quartæ parti circumferentiæ dati circuli,atque idcirco & ſemicircumferentiæ,vel toti circumferentiæ,conſtruenda erit figura eiuſmodi. Fiat angulus rectus DAE,rectaq; AD,ęqualis ſit diametro Quadrantis,ex quo Quadratrix deſcripta eſt;& AE, baſi eiuſdem Quadratricis æqualis. Vel certe ex centro A,noua Quadratrix deſcribatur DE, cuius latus AD,& baſis AE.Ducta namque recta DE, conſtructa erit figura aptiſſima ad rectam circumferentiæ dati circuli æqualem inueniendã. Si enim circuli quadrandi ſemidiametro abſcindatur æqualis AF,ducaturq; FG,ipſi DE,parallela;erit ex coroll. 3.antecedẽti AG,ęqualis quartę parti circũferentię dati circuli,cuius ſemidiameter nimirum eſt AF, (quemadmodum AD, quartæ parti circumferentiæ circuli ſemidiametri AE, æqualis eſt, vt ex coroll. 2.præcedenti conſtat)[c]propterea quod AF,AG,eandem habent proportionem,quam AE,AD. Eadem ratione, ductis HI,KL,MN, eidem DE, parallelis, erunt AI,AL,AN, æquales quartis partibus circumferentiarũ circulorum ex ſemidiametris AH,AK,AM,deſcriptorũ. Hæ aũt rectę duplicatę ſemicircumferentijs æquales erunt, &c. Atque hac arte inuenietur recta æqualis quartæ parti circumferentiæ cuiuſuis circuli, ſi eius ſemidiametro ex recta AE, æqualem lineam abſcindemus, ab eiuſq; extremo rectæ DE,parallelam ducemus,&c.

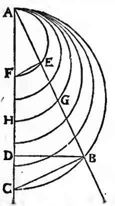
Facilis inuentio rectæ æqualis circumferentia.



c 4. ſexti.

VT quoq; ſine vllo labore dato cuicunq; circulo quadratũ æquale exhibeamus, vtendũ erit hoc artificio. Inuento ſemel latere quadrati alicui circulo ęqualis,vt paulo ante docuimus,conſtruemus figuram ad quadrandos alios circulos quoſcunq; accommodatiſſimam, hoc modo. Detur circulus ABC, diametri AC,ſitque AB, media proportionalis inter ſemidiametrum, & rectam ſemĩcircumferentiæ æqualem inuentam ex præcedenti figura,ita vt quadratum rectæ AB, circulo diametri AC, ſit æquale: [d] accommodetur AB, in circulo,quæ certius applicabitur, ſi forte circinus ex A, ad interuallum datæ AB,deſcriptus nimis oblique peripheriam ABC.ſecet in B, hoc modo. Duabus rectis,nimirum diametro AC,& lateri AB,quadrati inuento reperiatur tertia proportionalis AD.Perpendicularis namq; DB,cadet in punctum B,in quod latus inuentum duci debet: [e] propterea quod tres rectæ AC,AB, AD, ſunt continue proportionales: quemadmodum recta AC, latus quadrati inuentum, & AD,continuam ſeruant proportionem, ex conſtructione.Liquet autem inter AC,AD, vnam tantum poſſe eſſe mediam proportionalem.Hac figura extructa,dicto citius quemcunq; circulum quadrabimus. Si namq; diametro dati circuli rectam ęqualem abſcindemus AF,circa quam ſemicirculus deſcribatur,reſecabit is ex recta AB,latus AE, cuius quadratum circulo dato eſt æquale. Quia enim angulus externus AEF,interno ABC,æqualis eſt: [f] quod vterque in ſemicirculo rectus ſit;[g] erunt EF,BC,parallelæ;Ideoq; triangula AEF,ABC,æquiangula. [h] Igitur erit CA,ad AB,vt FA,ad AE; Et permutando CA,ad FA,vt

Facilis inuentio quadrati circulo æqualis.



d 1. quar.
e coroll. 8. ſexti.
f 31. tertij.
g 28 prim.
h 4. ſexti.

i 21. ſexti. AB,ad AE. [i] Ideoq; erit quoque quadratum ex AC,ad quadratum ex AF: [k] hoc eſt,vt circulus diametri AC,ad *k 2. duod.* circulum diametri AF,vt quadratum ex AB,ad quadratum ex AE. Eſt autem circulus diametri AC,quadrato ex *l 14. quin.* AB,per conſtructionem,æquale. [l] Igitur & circulus diametri AF,quadrato ex AE,æquale erit. Ita quoque quadratum rectæ AG,circulo diametri AH, erit æquale. Et ſic de cæteris.

Facilis inuentio quadrati circulo æqualis ex Archimede. IAM vero quoniam lib. 4. cap. 6. propoſ. 3. ex Archimede demonſtrauimus,quadratum diametri ad circulum habere ferme proportionem,quam 14. ad 11. ſi quis volet ſecundum hanc proportionem reperire quadratum circulo æquale;diuidenda erit recta AC,in 14. partes æquales, & ex vndecima parte D,(ita vt AD, contineat partes 11. & DC, 3.) excitanda perpendicularis DB, vſque ad circumferentiam circa AC, deſcriptam. Recta enim ducta AB,latus erit quadrati circulo diametri AC, æqualis. [m] Cum enim tres rectæ AC,AB,AD, *m corol 8. ſexti.* ſint continue proportionales; [n] erit quadratum ex AC, ad quadratum ex AB,vt AC,ad AD; videlicet vt 14. ad 11. Cum ergo etiam ſit,vt diximus,quadratum diametri ad circulum,vt 14. ad 11. ferme: [o] erit quadratum ex AC, *n corol. 20. ſexti.* ad quadratum ex AB,vt ad circulum diametri AC. [p] Igitur quadratum ex AB,circulo diametri AC,æquale erit. *o 11. quin.* Quod ſi ſecundum varias diametros deſcribantur circuli per A,tranſeuntes,abſcindent quoq; ij circuli ex recta *p 9. quint.* AB,latera quadratorum illis circulis æqualium. Habes ergo viam facilem inueniendi quadratum circulo dato æquale,ſiue quadratricem noſtram adhibeas,ſiue demonſtrata ab Archimede ſequaris.

IV.

DATO quadrato circulum æqualem deſcribere.

SIT datum quadratum lateris AE, cui circulus æqualis eſt deſcribendus. In proxima figura ex recta AB, abſcindatur recta AE,dato lateri quadrati æqualis: Et ex E, ducatur ad AB,perpendicularis EF, ſecans AC,in F. Eritque circulus diametri AF,quadrato lateris AE,æqualis,vt ex proxime demonſtratis liquet.

COROLLARIVM.

a 14. ſecun. EX his,quæ demonſtrata ſunt,conſtruemus circulum cuicunque figuræ rectilineæ æqualem. Et contra cuicunque circulo figuram rectilineam æqualem conſtituemus, quæ alteri datæ figuræ rectilineæ cuicunque ſimilis ſit. Nam ſi datæ figuræ rectilineæ [a] deſcribamus quadratum æquale, & huic quidrato circulum æqualem *b 25. ſexti.* per hanc 4. propoſ. conſtituamus;erit idem hic circulus datæ figuræ rectilineæ æqualis.

RVRSVS ſi per propoſitionem 3. dato circulo quadratum æquale conſtruamus, huic autem quadrato [b] conſtituamus figuram rectilineam æqualem,& ſimilem alteri datæ figuræ rectilineæ;erit eadem hæc figura rectilinea conſtituta,dato circulo æqualis,quod eſt propoſitum.

V.

DATÆ rectæ lineæ circumferentiam circuli reperire æqualem.

IN ſecunda figura propoſ. 3. ſit rectæ O,exhibenda æqualis circumferentia. Eius quartæ parti capiatur in latere Quadratricis AD,recta æqualis AI,ac per I,ipſi DE, agatur parallela IH. Eritq, circumferentia circuli ex diametro AH,deſcripti æqualis datæ rectæ O,propterea quod quarta pars eius circumferentiæ æqualis eſt rectæ AI,vt oſtenſum eſt;ac proinde tota circumferentia æqualis erit quadruplæ rectę AI,hoc eſt,ęqualis rectæ O, cuius quarta pars poſita eſt recta AI. Datæ ergo rectæ circumferentiam æqualem reperimus. Quod faciendum erat.

FINIS LIBRI SEPTIMI.

GEO-

GEOMETRIÆ PRACTICÆ
LIBER VIII.

Varia Theoremata, ac problemata Geometrica demonſtrans.

VT extremam manum Geometriæ huic noſtræ practicæ imponamus, concludemus eam variis nonnullis Theorematibus, atque problematibus Geometricis, tum collectis ex Geometris aliis, tum proprio, vt aiunt, Marte excogitatis, ac demonſtratis. Qui in re exemplum illuſtre habemus in Pappo Alexandrino, qui octo totos libros conſcripſit de Mathematicis collectionibus. Neque vero hoc præter inſtitutum noſtrum exiſtimare quis debet: cum per eiuſmodi demonſtrationes Geometricas ſtudioſo Lectori via multiplex aperiatur ad inueſtigandas ſimiles ſpeculationes in rebus Geometricis: quippe cum in iis ad exercendum ingenium ampliſſimum campum habeat. Eſt & alia cauſa, quæ me ad hunc librum octauum conſcribendum permouit, ne videlicet tot Theoremata, ac problemata non ſine magno labore perueſtigata pereant, cum ad nullam Geometriæ partem magis proprie pertineant, quam ad hanc Geometriam practicam: præſertim quod pleraque eorum praxes Geometricas pertractent. Adde quod non pauci viri docti & graues ad hunc librum perſcribendum auctores mihi, atque ſuaſores fuerunt.

THEOR. 1. PROPOS. 1.

FIGVRA regularis circulo circumſcripta maiorem ambitum habet, quam circulus.

HÆC eſt prima propoſitio Archimedis in lib. 1. de ſphæra & Cylindro: quam demonſtrat, hoc aſſumpto principio.

Si duæ lineæ in plano eoſdem habeant terminos, & in eaſdem partes cauæ ſint, comprehendens comprehenſa maior eſt. quod quidem principium eſſe verum, ex eo euidenter intelligi poteſt, quod ex eo non ſolum Archimedes, verum etiam plurimi alij Geometræ tum veteres, tum recentiores, innumera propemodum, atque admiranda Theoremata, problemataque demonſtrarint, quæ vt veriſſima, ab omnibus recepta ſunt; neque vnquam ex illo abſurdi aliquid conſecutum eſt, aut contra id quiſquam hactenus à duobus ferme millibus annorum, noui quid commentus eſt. Hoc ergo poſito principio, facilis eſt demonſtratio Archimedis. Sit namque figura regularis ABCDEF, deſcripta circa circulum, cuius centrum N, tangens eum in punctis G, H, I, K, L, M. Quoniã igitur per præmiſſum principium rectæ AG, AM, maiores ſunt arcu GM: Item BG, BH, maiores arcu GH, & ſic de reliquis; erunt omnes rectæ ſimul conficientes totum ambitum figuræ, maiores omnibus arcubus ſimul conficientibus totam circuli peripheriam, quod erat demonſtrandum.

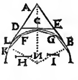


HÆC ergo ſunt tria lemmata, quæ Cardanus præmittit: quibus adiungit hoc poſtulatum, ſiue principium. Cum arcus quilibet maior ſit quotcunque rectis in eo ſubtenſis ſimul ſumptis, & quo plures ſubtenſę fuerint, eo minori exceſſu arcus illas ſuperet: fieri poteſt, vt tot ſubtenſæ duci poſſint, ita vt exceſſus, quo arcus illas ſuperet, minor ſit quauis recta propoſita. Hoc principium videtur eſſe manifeſtum, cum tam paruus arcus poſſit accipi, vt eius chorda illi fere æqualis ſit; adeo vt ſenſus nullam percipere poſſit inter arcum, & chordam differentiam. A poſteriori tamen illud confirmari poteſt per numeros. Poſita enim proportione circumferentiæ ad diametrum ferme 3141 5926. ad 10000000. vt lib. 4. cap. 7. Num. 5. ex ꝓbatis auctoribus retulimus, deprehendemus, ſi arcus propoſitus continue ſecetur bifariam per rectas ſubtenſas, ſemper à præcedenti exceſſu plus dimidio auferri; [a] ac proinde tandem relinqui exceſſum omni quantitate minorē. Nam arcus verbi gratia graduum 4. erit 698131. & eius chorda ex tabula ſinuū eruta 697990. ita vt arcus chordam ſuperet hoc numero 141. Summa deinde duarum chordarum graduum 2. erit 698096. quæ ſuperatur ab eodem arcu gr. 4. numero hoc 35. qui minor eſt ſemiſſe præcedentis exceſſus 141. ac proinde plus dimidio ab eo ablatum erit. Rurſus ſumma quatuor chordarum gradus 1. erit 698120. quam idem arcus 4. graduum ſuperat hoc numero 11. qui etiam minor eſt ſemiſſe proximi exceſſus 35. Item ſumma 8. chordarum, quarum quælibet 30. minutis debetur, erit 698128. exceſſus autem inter eam, & eundem arcum 4. graduum, numerus 3. qui minor quoque eſt, quam ſemiſſis proximi exceſſus 11. & ſic deinceps. Scio confirmationem hanc propoſiti principij non eſſe demonſtratiuam, cum proportio circumferentiæ ad diametrum colligatur ex eo, quod demonſtrare conamur, nimirum figuram circulo circumſcriptam habere maiorem ambitum ambitu circuli: eam tamen probabilē eſſe, nemo dubitabit, cum vix credibile videatur, (ſi illa proportio longe à vero abeſſet) exceſſus illos paulatim ita minui, vt ſemper minor numerus ſemiſſe præcedentis exceſſus relinquatur; adeo vt tandem nulla fere differentia inter arcum, & ſummam chordarum ſubtenſarum reperiatur.

Principiū Cardani.

a 1. decim.

HIS præmiſſis, tangant duæ rectæ AB, AL, arcum BCL. Dico eas eſſe maiores arcu. Sint enim, ſi fieri poteſt, non maiores, ac proinde arc⁹ BCL, ſit vel æqualis rectis AB, AL, vel maior. Secto ergo arcu bifariam in C. ducatur DCE, tangens arcum in C. Diuiſis quoq; arcubus BC, CL, bifariam in G, F, iungantur rectæ BG, GC, CF, FL. [b] Et quia AD, AE, maiores ſunt quam DE; additis DL, EB, communibus, quæ ęquales ſunt; (Nam iunctis rectis NA, NB, NL, ex centro N; quoniam tria latera trianguli ABN, tribus lateribus trianguli ALN, æqualia ſunt; [c] erunt tam anguli ad N, quam ad A, æquales; [d] ideoq; arcus CB, CL, æquales erunt; ac proinde recta NA, per cōtactum C, tranſibit, [e] eritq; ad DE, perpendicularis. Cum igitur duo anguli DAC, DCA, duobus angulis EAC, ECA, æquales ſint, & latus adiacēs AC, commune; [f] erunt latera AD, AE, æqualia; proptereaq; & reliquæ DL, EB, æquales erunt, cum tangentes AL, AB, æquales ſint) erunt AL, AB, maiores tribus LD, DE, EB. Sit ergo exceſſus H. Rurſus quia arcus BL, maior eſt rectis BG, GC, CF, FL, ſit exceſſus I, qui minor ſit exceſſu H. Si namq; minor non eſt, diuidemus arcus LF, FC, CG, GB, bifariam, & hos rurſus bifariam, &c. connectemuſq; rectas, donec fiat exceſſus minor exceſſu H, per ſuperi⁹ principiū Cardani. Quoniam igitur arcus LB, prima quantitas ſuperat ſecundam, videlicet rectas LF, FC, CG, GB, ſimul exceſſu I; Et tertia quantitas, nimirum ſumma rectarum AL, AB, ſuperat quartam, id eſt, ſummam rectarum LD, DE, EB, exceſſu H: Eſtque exceſſus I, minor exceſſu H; Et prima quantitas, hoc eſt, arc⁹ BL, ponitur non minor, quam tertia ex AB, AL, conflata, item tertia AB, AL, maior, quam quarta LD, DE, EB: erit per 1. Lemma, minor proportio arcus BL, primę quantitatis ad ſecundam LF, FC, CG, GB, quam tertię quantitatis AL, AB, ad quartam LD, DE, EB; [g] Et permutando minor erit proportio arcus LB, ad AL, AB, ſimul, quam rectarum LF, FC, CG, GB, ſimul ad rectas LD, DE, EB, ſimul. Sit ergo vt compoſita ex LF, FC, CG, GB, ad compoſitam ex LD, DE, EB, ita arcus BK, ad rectas AL, AB, ſimul: Eritq; propterea minor etiam proportio arcus BL, ad AL, AB, ſimul, quam arcus BL, ad arcum BK, [h] ideoque arcus BK, maior erit arcu BL. Cum ergo eadem ſit proportio rectarum LF, FC, CG, GB, ſimul ad LD, DE, EB, ſimul, quæ arcus BK, ad AL, AB, ſimul: ſintq; per 3. Lemma, rectæ LF, FC, CG, GB, ſimul minores, quam LD, DE, EB, ſimul; erit quoque arcus BK, minor, quam AL, AB, ſimul. Multo ergo minor erit arcus BL, duabus AL, AB, ſimul. Quare rectæ tangentes AL, AB, ſimul maiores ſunt arcu BL, quod erat oſtendendum.



Demōſtratio Card.

b 20. primi.

c 8. primi.
d 26. tertij
e 18. tertij.
f 26. primi.

g ſchol. 17. quinti.

h 10. quin.

EST autem hæc demonſtratio Cardani admirabilis, & non abſimilis illi, qua Euclid. in propoſ. 12. lib. 9. vtitur. In vtraque enim infertur concluſio demonſtratione affirmatiua ex eius oppoſito, vt patet.

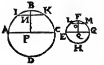
ATTVLI hanc demonſtrationem Cardani, non quod vere Geometrica ſit, niſi principium illud ſuum admittatur, ſed quod ingenioſa ſit & acuta. Sine tamen hac demonſtratione concedendum erit, ambitum figurę circumſcriptæ eſſe maiorem peripheria circuli propter demonſtrationem Archimedis, cum nihil vnquam in contrarium à quoquam ſit allatum, vt ſupra diximus.

THEOR. 2. PROPOS. 2.

CIRCVLORVM diametri inter ſe ſunt, vt circumferentiæ.

HOC demonſtrauimus nos in lib. 4. cap. 7. num. 3. propoſ. 1. idem autem hic aliter demonſtrabimus ex Pappo, hoc modo. Sint duo circuli ABCD, EFGH, quorum diametri AC, EG. Dico eſſe circumferentiam ad circumferentiam, vt eſt diameter ad diametrum [a] Quoniam enim eſt circulus ad circulum, vt quadratum dia-

a 2. duod.



b 15.quin. metri ad quadratum diametri. [b] Vt autem circulus ABCD, ad circulum EFGH, ita eſt quadruplum circuli ad quadruplum circuli. Igitur erit quoque quadruplum circuli ABCD, ad quadruplum circuli EFGH, vt quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EG. Sed rectangulum ſub diametro AC, & recta, quæ circumferentiæ ABCD, ſit æqualis, comprehenſum, quadruplum eſt circuli ABCD; & rectangulum ſub diametro EG, & circumferentia EFGH, quadruplum circuli EFGH, ex coroll. propoſ. 2. cap. 5. Num. 1. lib. 5. Igitur erit rectangulum ſub diametro AC, & circumferentia ABCD, contentum, ad rectangulum ſub diametro EG, & circumferentia EFGH, comprehenſum, vt quadratum ex AC, ad quadratum ex EG; Et permutando erit rectangulum ſub diametro AC, & circumferentia ABCD, ad
c 1.ſexti. quadratum ex AC, vt rectangulum ſub diametro EG, & circumferentia EFGH, ad quadratum ex EG. [c] Eſt aũt rectangulum ſub AC, & recta, quæ circumferentiæ ABCD, ſit æqualis, ad quadratum ex AC, vt recta circumferentiæ æqualis ad AC: propterea quod rectangulum, & quadratum eandem habent altitudinem AC. Eodemq; modo eſt rectangulum ſub EG, & recta, quæ circumferentiæ EFGH, ſit æqualis, ad quadratum ex EG, vt recta circumferentiæ æqualis ad EG. Igitur erit, vt circumferentia ABCD, ad diametrum AC, ita circumferentia EFGH, ad diametrum EG: Et permutando circumferentia ad circumferentiam, vt diameter ad diametrum. quod demonſtrandum erat.

S C H O L I V M.

SVNT qui putent, fruſtra à Pappo hoc theorema demonſtrari, cum videatur eſſe per ſe notum, ita eſſe circumferentiam cuiuſuis circuli ad ſuam diametrum, vt eſt circumferentia alterius circuli ad ſuam diametrum: ac proinde permutando eſſe circumferentiam ad circumferentiam, vt eſt diameter ad diametrum. Qua in re mirum in modum decipiuntur. Cum enim à Ptolemeo (quod & à nobis propoſ. 10. Sinuum factum eſt) demonſtretur, maiorem eſſe proportionem maioris arcus ad minorem eiuſdem circuli, quam chordæ ad chordam, (quod etiam de arcubus, & chordis in circulis inæqualibus verum eſt, niſi arcus illi ſimiles ſint, vt in ſequenti Theoremate oſtendemus) quis ſine demonſtratione concederet, eandem eſſe proportionem circumferentiæ ad circumferentiam, quæ eſt diametri ad diametrum? Quod ſi demonſtratum eſſet, ita eſſe arcum cuiuſuis circuli ad ſimilem arcum alterius circuli, vt eſt chorda ad chordam, tum demum conſtaret, ita
a 15. quin. eſſe circumferentiam ad circumferentiam, [a] ac proinde & ſemicircumferentiam ad ſemicircumferentiam, vt eſt diameter ad diametrum: propterea quod arcus ſemicirculorum ſimiles ſunt, quorum chordæ ſunt diametri. Verum hoc demonſtrari non poteſt, niſi prius demonſtretur, ita eſſe circumferentiam ad circumferentiam, vt eſt diameter ad diametrum, vt in Theoremate ſequenti conſtabit. Merito ergo, & non ſine cauſa, theorema præcedens à Pappo fuit demonſtratum.

THEOR. 3. PROPOS. 3.

ARCVS cuiuſuis circuli ad arcum ſimilem alterius circuli eandem habet proportionem, quam chorda ad chordam. Et contra arcus eandem habentes proportionem, quam chordæ, quando quadrans eſt ad quadrantem, vt ſemiſſis arcus ad ſemiſſem arcus, ſimiles ſunt.

IN figura præcedentis propoſ. ducantur ad diametros perpendiculares PB, QF, ex centris P, Q, diuidentes ſemicirculos in binos quadrantes: ſintque arcus BI, BK, æquales, quibus ſimiles capiantur FL, FM; adeo vt toti arcus IK, LM, ſimiles ſint, quorum chordæ IK, LM, biſariam ſectæ ſint à ſemidiametris in N, O. Dico
a 2 huius. eandem eſſe proportionem arcus IBK, ad arcum LFM, quæ eſt chordæ IK, ad chordam LM, &c. [a] Quoniam e-
b 15. quin. nim eſt circumferentia ABD, ad circumferentiam EFH, [b] hoc eſt, quadrans AB, ad quadrantem EF, vt diameter AC, ad diametrum EG; hoc eſt, vt ſemidiameter PB, ad ſemidiametrum QF. [c] Eſt autem, vt Quadrans AB, ad quadrantem EF, ita arcus IB, ad arcum LF, cum ſimiles ponantur. Igitur erit quoque arcus IB, ad arcum LF,
c 15. quin. vt ſemidiameter PB, ad ſemidiametrum QF. Cum ergo ex Lemmate propoſ. 1. lib. 1. noſtræ Gnomonicæ, vel ex Lemmate 5. lib. 1. noſtri Aſtrolabij, ita ſe habeat PB, ſinus totus ad QF, ſinum totum, quemadmodum ſinus IN,
d 15. quin ad ſinum LO. erit quoque arcus IB, ad arcum LF, vt ſinus IN, ad ſinum LO, [d] id eſt, duplus arcus IK, ad duplum arcum LM, vt chorda IK, ipſius IN, dupla, ad chordam LM, ipſius LO, duplam. quod eſt propoſitum.

VERVM ſit iam arcus IK, ad arcum LM, vt chorda IK, ad chordam LM. Dico arcus ſimiles eſſe. Fa-
e 15. quin. cta enim eadem conſtructione, [e] erit quoque arcus IB, ad arcum LF, ſemiſſis ad ſemiſſem, vt IN, ad LO, ſemiſſis
f ſchol. 33. ſexti. ad ſemiſſem. [f] Vt autem IB, ad LF, ita eſt quadrans AB, ad quadrantem EF, ex hypotheſi; [g] Et vt quadrans ad quadrantem, ita eſt ſemidiameter PB, ad ſemidiametrum QF. Igitur erit quoque ſinus IN, ad ſinum LO, vt ſinus
g 2. huius. totus PB, ad ſinum totum QF. Atque idcirco ex Lemmate propoſ. 1. lib. 1. noſtræ Gnomonicæ, vel ex Lemmate 5. lib. 1. noſtri Aſtrolabij, arcus IB, LF, ſimiles erunt; ac proinde & eorum dupli IBK, LFM, ſimiles erunt. quod erat demonſtrandum.

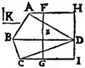
COROL-

C O R O L L A R I V M.

SEQVITVR hinc, ſi arcus IBK, LFM, non ſint ſimiles, eos non habere eandem cum chordis proportionem. Si namque eandem haberent, ipſi ſimiles eſſent, vt in ſecunda parte huius propoſ. fuit oſtenſum, quod eſt abſurdum, çum ponantur non ſimiles.

PROBL. I. PROPOS. 4.

DATO quadrilatero æquale parallelogrammum in dato angulo facilius, quam per propoſ. 45. lib. 1. Euclid. conſtituere.



SIT quadrilaterum quodcunque ABCD, & datus angulus K. Ducta diametro BD, eaque diuiſa bifariam in E, ducatur per E, recta FG, faciens in E, angulum FED, dato angulo K, æqualem. Deinde ducta per D, ipſi FG, parallela HI, & per A, C, duabus AH, CI, ipſi BD, parallelis ſecantibus FG, HI, in F, H, G, I, conſtitutum erit parallelogrammum FI, in dato angulo G, [a] qui æqualis eſt angulo, FED, internus externo, hoc eſt, angulo K. Dico idem parallelogrammum quadrilatero dato ABCD, æquale eſſe. [b] Quia enim parallelogrammum FD, triangulo ABD, & parallelogrammum EI, triangulo CBD, æquale eſt; erit totum parallelogrammum FI, toti quadrilatero ABCD, æquale, quod eſt propoſitum.

a 29 prim.
b ſchol. 41. prim.

PROBL. 2. PROPOS. 5.

DATO rectangulo ſupra datam rectam æquale rectangulum facilius, quam per propoſ. 45. lib. 1. Euclid. conſtituere.



SIT rectangulum ABCD, cui ſupra datam rectam conſtituendum eſt rectangulum æquale. Producto quolibet latere, nimirum AB, capiatur BE, æqualis datæ rectæ, ſiue ea ſit maior latere AB, ſiue minor: atque ex E, per C, recta ducatur ſecans AD, productam in F, compleaturque rectangulum AH, & rectę BC, DC, producantur vſque ad G, I. [a] Erit igitur complementum CH, complemento CA, æquale, Cum igitur latus CI, ſit lateri BE, id eſt, datæ rectæ æquale factum erit, quod proponitur.

a 43 prim.

A L I T E R.

DATÆ rectæ BE, & duobus lateribus AB, BC, dati rectanguli, [a] inueniatur quarta proportionalis CG. [b] Nam rectangulum ſub BE, prima, & CG, quarta comprehenſum, rectangulum videlicet CH, æquale erit dato rectangulo AC, ſub ſecunda AB, & tertia BC, comprehenſo, quod eſt propoſitum.

a 12. ſexti.
b 16 ſexti.

PROBL. 3. PROPOS. 6.

DATO rectilineo æquale rectangulum facilius, quam per propoſ. 45. lib. 1. Euclid. conſtituere.

HOC per duas præcedentes propoſ. facile expedietur. Nam ſi figura rectilinea in triangula reſoluatur, conſtituent quælibet duo commune latus habentia trapezium, cuius latus commune eſt diameter. [a] Igitur ſi ſingulis trapezijs ſingula rectangula fiant æqualia, atque etiam vltimo triangulo, ſi forte numerus triangulorum eſt impar. Deinde, ſi, vt in præcedenti propoſ. dictum eſt, vni lateri primi rectanguli, & duobus lateribus ſecundi, [b] inueniatur quarta proportionalis; [c] erit rectangulum ſub aſſumpto latere in primo rectangulo, & quarta proportionali, ſecundo rectangulo æquale. Quocirca ſi alterum latus prope aſſumptum in primo rectangulo producatur, & ex producto abſcindatur recta æqualis quartæ proportionali, compleaturque totum rectangulum; habebitur rectangulum ex duob[us] compoſitum æquale duobus primis trapezijs. Et ſi eidem lateri, ac duobus tertij rectanguli reperiatur rurſum quarta proportionalis, & huic quartæ ſumatur in priori latere producto recta æqualis, conficietur eodem pacto rectangulum ex tribus conflatum æquale tribus trapezijs, &c.

a 4. huius.
b 12. ſexti.
c 16 ſexti.

[d] VLTIMO porro triangulo, ſi quod fuerit, conſtituetur rectangulum æquale ſupra ſemiſſem baſis, in eadem altitudine cum triangulo.

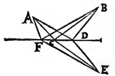
d ſchol. 41. prim.

THEOR. 4. PROPOS. 7.

SI ex duobus punctis ad vnum punctum cuiuſuis lineæ rectę, quæ communis ſectio ſit plani per duo illa puncta ducti cum alio quopiam plano, duæ rectæ ducantur, facientes cum illa duos angulos æquales: Erunt duæ hæ rectę breuiores quibuſcunque aliis duabus rectis, quæ ex eiſdem duobus punctis ad aliud punctum eiuſdem lineę rectæ ducuntur.

EX duobus punctis A,B,ad C,punctum in recta CD,ita vt planum per CD,ductum tranſeat reuolutum per A,B,ducantur duæ rectæ A C, B C, facientes angulos ACF, BCD, æquales: & ex eiſdem punctis A, B, ducantur primum ad aliud punctum D,ad dextram ipſius C,aliæ duæ rectæ AD, BD. Dico AC,BC, eſſe breuiores,quam AD,BD. Producta enim A C, verſus C, fiat CE, ipſi C B, æqualis, iungaturque DE. Et quia angulus A C F, angulo B C D, ponitur æqualis, [a] eſtque angulus ACF, angulo ECD, ad verticem æqualis, erit quoque angulus BCD,angulo ECD, æqualis. Cum ergo & duo latera BC, CD,duobus lateribus E C, CD, æqualia ſint: [b] erit baſis DB, baſi DE,æqualis; ac proinde AD,DB,ſimul ipſis AD,DE,ſimul æquales erunt. [c] Sunt autem A D, D E, maiores quam AE,hoc eſt,quam AC, CB; quod C B, CE, poſitæ ſint æquales. Igitur & AD,BD, maiores erunt, quam A C, B C. quod eſt propoſitum.

a 15 prim.
b 4. prim.
c 20. prim.



DVCANTVR deinde ex punctis A, B, ad aliud punctum F,ad ſiniſtram ipſius C, aliæ duæ rectæ AF,BF. Dico rurſus AC,BC, breuiores eſſe, quam AF, BF. Producta enim rurſum AC,ſumptaque CE, ipſi CB, æquali, iungatur EF. Et quoniam anguli ACF,BCD,æquales ponuntur; [d] eſtque ACF, angulo ECD, ad verticem æqualis;erunt quoque anguli BCD,ECD, æquales: ac proinde & ex duobus rectis reliqui BCF, ECF, æquales erunt,Cum ergo & duo latera BC,CF, duobus lateribus EC,CF, æqualia ſint; [e] erit quoque baſis BF, baſi EF, æqualis: Ac proinde AF,FE,ipſis AF,BF, æquales erunt. [f] Sunt autem AF,FE,maiores, quam AE, hoc eſt, quam AC, BC,ꝗ BC,CE,poſitæ ſint æquales. Igitur & AF,BF,maiores erũt, quã AC, CB. quod eſt propoſitũ.

d 15. prim.
e 4. prim.
f 20. prim.

S C H O L I V M.

QVIA ergo Natura non impedita agit per lineas breuiſſimas; fit, vt radius Solis, vel viſualis cadens ex A,in planum terſum D F, ita vt reflectatur ad punctum B, cadat neceſſario in punctum C,vbi angulus A CF, (quem Perſpectiui angulum incidentiæ dicunt.) æqualis efficitur angulo B C D, quem reflexionis appellant. Nam ſi radius caderet in D, vel F, reflecteretur que ad B, non ageret Natura per lineas breuiſſimas; cum tam AD,BD,quam AF, BF, longiores ſint, quam AC,BC,vt demonſtrauimus. quod eſt abſurdum. Atque ita demonſtratum eſt,quod Perſpectiui aſſumunt,angulum ſcilicet incidentiæ æqualem eſſe angulo reflexionis.

PROBL. 4. PROPOS. 8.

SI quis numerum mente conceperit, quot ei vnitates poſt tres operationes imperatas reliquæ ſint, coniicere.

IVBE conceptum numerum per quemcunque numerum,vt per 2. vel 3. vel 4. vel 10. &c. multiplicari, & producto adde tu quemlibet numerum à numero multiplicante numeratum. Deinde iube ex parte aliquota ſummæ totius à multiplicante numero denominata auferri ſimilem partem aliquotam numeri producti ex multiplicante in numerum conceptum, hoc eſt, ipſum numerum conceptum. Ita enim reliquus numerus erit ſimilis pars aliquota numeri,quem adiunxiſti. Cum ergo numerus adiunctus tibi notus ſit,habeatque partem aliquotam à numero multiplicante denominatam, ac proinde tibi cognitam: dices reliquas vnitates illam partem aliquotam conficere.Exempli gratia. Concipiat aliquis numerum 4.iube multiplicari per 6. fiunt 24. iube addi numerum 30.à multiplicante 6.numeratum, fiunt 54. Ex ſexta parte huius ſummæ denominata à multiplicante numero 6. id eſt, ex 9. fac detrahi partem quoque ſextam prioris numeri producti 24. nimirum 4. videlicet ipſum numerum conceptum. Ita namque remanet ſexta pars numeri adiuncti 30.nimirum 5. quod in hunc modum demonſtratur.

A	B	C	F
4	24	54	30
	D	E	G
	4.	9.	5.

SIT conceptus numerus A, quo ducto verbi gratia in 6. gignatur B, & addito F,fiat ſumma C. Ex E,parte aliquota ſummæ C, denominata à 6. detrahatur D, pars aliquota prioris producti B,denominata quoque à 6 hoc eſt,ipſemet numerus conceptus A, reliquuſque fiat numerus G, quem dico partem eſſe aliquotam numeri adiuncti F, à numero quoque 6. denominatam. Quoniam enim ita eſt multiplex totus C, totius E, vt ablatus B,ex C, ipſius D, ex E, ablati, quippe cum ponatur E, talis pars ipſius C, qualis D, ipſius B,denominata videlicet à 6.[a] Igitur erit quoque reliquus FC,detracto nimirum producto B,ex ſumma C,)ita multiplex reliqui G,(dempto ſcilicet D,ex E,)vt totus C,totius E. quod erat demonſtrandum.

a ſchol. 7. ſeptimi.

EST autem iucundum, hoc idem coniici poſſe inter plures. Nam ſi plures concipiant mente numeros, ſinguli videlicet ſingulos, nullo eorum conſcio, quem quiſque numerum conceperit; & iubeas quemlibet ſuum numerum multiplicare per quemuis numerum à te electum; deinde addere numerum à tuo electo numeratum, quicunq; ille ſit; ac poſtremo ex parte aliquota ſummæ, cuius denominator eſt numerus à te electus, auferre ſimilem partem ex productis ſingulorum, hoc eſt, ipſos conceptos numeros: reliquus numerus cuiuſq; erit ſimilis pars numeri adiecti,

QVOD ſi malueris diuerſos numeros, dic vt ſecundus ſuum reſiduum duplicet, & tertius triplicet, &c. Ita enim coniicies, primi reſiduum eſſe illam partem aliquotam numeri adiecti: ſecundum vero habere duplum illius, & tertium triplum, &c. Vbi vides eos reſiduum illud per quoſcunque numeros poſſe multiplicare, dummodo memor ſis in coniiciendis numeris, per quos factæ ſint multiplicationes.

PROBL. 5. PROPOS. 9.

DATVM numerum quadratum in quotuis quadratos numeros partiri.

QVAMVIS problema hoc videatur fere impoſſibile: (qui enim fieri poteſt, dicet aliquis, vt quilibet numerus quadratus diuidi poſſit in quotlibet numeros, qui omnes ſint quadrati?) ſolutio tamen eius non eſt difficilis. Sit igitur quadratus numerus datus 36. diuidendus in 5. numeros quadratos. Per ea, quæ ad propoſ. 47. lib. 1. Euclid. ſcripſimus, reperiantur tres numeri, quorum maioris quadratus reliquorum quadratis ſit æqualis, nimirum 5. 4. 3. Deinde dic: ſi 5. dant 4. quid dabunt 6. quadrata videlicet radix dati quadrati? Item ſi 5. dant 3. quid dabunt 6? Inueniesque $\frac{24}{5}$. & $\frac{18}{5}$. hoc eſt, $4\frac{4}{5}$. & $3\frac{3}{5}$. radices duorum quadratorum quadrato 36. dato æqualium. Nam cum ita ſe habeat radix 6. ad inuentos duos numeros, vt 5. ad 4. & 3. ex conſtructione: fiet ex lateribus 6. $4\frac{4}{5}$. $3\frac{3}{5}$. triangulum rectangulum, ſimile nimirum triangulo rectangulo ex lateribus 5. 4. 3. conſtructo. [a] Igitur quadrati ex $4\frac{4}{5}$. & $\frac{3}{5}$. æquales erunt quadrato radicis 6. dato. Rurſus ſi fiat, vt 5. ad 4. & ad 3. ita $3\frac{3}{5}$. ad aliud; (ſumendo minorem radicem inuentam, ne coincidamus cum aliqua præcedente radice iam inuenta) inuenientur alij duo numeri, quorum quadrati æquales ſint quadrato radicis $3\frac{3}{5}$. nimirum $2\frac{22}{25}$. & $2\frac{4}{25}$. Atque ita iam (relicta radice $3\frac{3}{5}$.) inuentæ erunt tres radices $4\frac{4}{5}$. $2\frac{22}{25}$. $2\frac{4}{25}$. quarum quadrati æquales erunt quadrato 36. propoſito. Eodem modo ſi fiat, vt 5. ad 4. & ad 3. ita $2\frac{4}{25}$. ad aliud, reperientur duæ aliæ radices $1\frac{91}{125}$. & $1\frac{37}{125}$. Quare (relicta radice $2\frac{4}{25}$. cuius loco duas inuenimus) inuentæ iam erunt quatuor radices $4\frac{4}{5}$. $2\frac{22}{25}$. $1\frac{91}{125}$. & $1\frac{37}{125}$. quarum numeri quadrati quadrato 36. æquales erunt. Denique ſi rurſus fiat vt 5. ad 4. & ad 3. ita $1\frac{37}{125}$. minor radix inuenta ad aliud, reperientur duæ aliæ radices $1\frac{23}{625}$. & $\frac{486}{625}$. Quocirca (relicta radice $1\frac{37}{125}$. pro qua duas proximas inuenimus) inuentæ erunt quinque radices $4\frac{4}{5}$. $2\frac{22}{25}$. $1\frac{91}{125}$. $1\frac{23}{625}$. & $\frac{486}{625}$. quarum quadrati numeri $23\frac{1}{25}$. $8\frac{184}{625}$. $2\frac{15406}{15625}$. $1\frac{29279}{390625}$. & $\frac{236196}{390625}$. conficiunt datum quadratum 36. Atque in hunc modum plures quadrati inueniri poterunt æquales numero 36. ſi nimirum fiat, vt 5. ad 4. & ad 3. ita vltima radix inuenta $\frac{486}{625}$. quæ minima eſt, ad aliud, &c. [a] 47. pri.

THEOR. 5. PROPOS. 10.

PROPOSITIS duabus minutijs inæqualibus; minutia, cuius numerator ex illarum numeratoribus, denominator autem ex denominatoribus conflatur, maior quidem eſt minore, minor vero maiore.

SINT duæ minutiæ inæquales, maior $\frac{3}{5}$. & minor $\frac{4}{7}$. Iungantur tam numeratores, quam denominatores, vt fiat minutia $\frac{7}{12}$. Dico hanc maiorem eſſe, quam $\frac{4}{7}$. & minorem quam $\frac{3}{5}$. Quoniã enim maior eſt minutia $\frac{3}{5}$. quam $\frac{4}{7}$. erit per propoſ. 8. Minutiarum lib. 9. Euclid. maior proportio 3. ad 5. quam 4. ad 7. [a] Et permutando, maior 3. ad 4. quam 5. ad 7. [b] Igitur & componendo, maior 3. 4. ſimul, hoc eſt, 7. ad 4. quam 5. 7. ſimul, id eſt, quam 12. ad 7. [c] Et permutando, maior 7. ad 12 quam 4. ad 7. Ac proinde per propoſ. 8. Minutiarum lib. 9. Euclid. maior erit minutia $\frac{7}{12}$. quam $\frac{4}{7}$. quod eſt primum.

$\frac{3}{5}$. $\frac{4}{7}$. $\frac{7}{12}$.

a 27. quin.
b 28. quin.
c 27. quin.

DEINDE quia minor eſt $\frac{4}{7}$. quam $\frac{3}{5}$. erit per propoſ. 8. Minutiarum lib. 9. Euclid. minor proportio 4. ad 7. quam 3. ad 5. [d] & permutando, minor 4. ad 3. quam 7. ad 5. [e] Igitur & componendo minor 4. 3. ſimul, id eſt, 7. ad 3. quam 7. 5. ſimul, hoc eſt, quam 12. ad 5. [f] Et permutando, minor 7. ad 12. quam 3. ad 5. Ac proinde per propoſ. 8. Minutiarum lib. 9. Euclid. minor erit minutia $\frac{7}{12}$. quam $\frac{3}{5}$. quod eſt ſecundum.

d 27. quin.
e 28. quin.
f 27. quin.

THEOR. 6. PROPOS. 11.

SI duo numeri inter ſe primi non ſint ambo quadrati, aut cubi; neque eorum æque multiplices vlli, quadrati erunt, aut cubi. Et ſi eorum æque multiplices aliqui ſint ambo quadrati, aut cubi, etiam ipſi erunt quadrati, aut cubi.

SINT enim A, B, numeri inter ſe primi, & non ambo quadrati, vel cubi, quamuis vnus eorum quadratus ſit, vel cubus, ſintque eorum æque multiplices C, D. Dico neq; hos eſſe ambos quadratos, aut cubos. Sint enim, ſi fieri poteſt, ambo quadrati, vel cubi. Et quoniam idem numerus multiplicans A, & B, fecit C, & D, quod hi illorum ſint æque multiplices: [a] erit A, ad B, vt C, ad D. [b] Cadit autem inter C, & D, vnus medius proportionalis, aut duo. [c] Igitur & inter A, B, vnus cadet medius proportionalis, aut duo:

A	B
4.	11.
C	D
12.	33.

a 17. ſept.
b 11. & 12. octaui.
c 8. octa.

Cum

d 1. octaui. Cum ergo extremi A, B, ponantur inter ſe primi; [d] erunt omnes tres, vel quatuor proportionales, minimi in ſua proportione: [e] Ac proinde A, B, ambo quadrati erunt, vel cubi, quod eſt contra hypotheſim. Non ergo C, D, ambo quadrati ſunt, aut cubi. quod erat oſtendendum.

e coroll. 2. octaui.

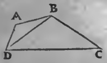
SED ſint iam C, D, ipſorum A, B, inter ſe primorum æque multiplices, & ambo quadrati, vel cubi. Dico etiam A, B, ambos eſſe quadratos, vel cubos. Si enim non ſunt; neque ipſi C, D, erunt ambo quadrati, vel cubi, vt demonſtratum eſt. quod cum hypotheſi pugnat.

COROLLARIVM.

HINC fit, ſi tam Numerator, quam Denominator alicuius minutiæ fuerit quadratus, aut cubus: tam Numeratorem quoque, quam Denominatorem eiuſdem minutiæ ad minimos reductæ terminos, eſſe quadratum, vel cubum. cum minimi termini ſint numeri inter ſe primi, habeantq; eandem proportionem, quam Numerator, ac Denominator prioris minutiæ: quippe cum minutiæ ſint æquales. Item ſi vterq; numerus [illegible] nutiæ cuiuſpiam in minimis terminis non ſit quadratus, aut cubus, neque vtrumq; numerum alterius minutiæ æquiualentis eſſe quadratum, aut cubum.

THEOR. 7. PROPOS. 12.

IN omni quadrilatera figura rectilinea, tria latera, vt libet, aſſumpta, maiora ſunt reliquo latere.



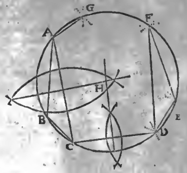
SIT quadrilaterum ABCD. Dico quælibet tria latera, [illegible] mirum DA, AB, BC, ſimul ſumpta eſſe maiora reliquo latere DC. Ducta enim diametro BD; [a] erunt rectæ BD, BC, maiores [illegible] DC; Sed eadem ratione AB, AD, maiores ſunt quam BD. Maiores erunt ergo tres AD, AB, BC, quam duæ BD, BC; ac pro[illegible] multo maiores, quam DC. Idemque demonſtrabitur ſimili m[illegible] de quibuſcunque alijs tribus lateribus, vt conſtat. In omni [illegible] quadrilatera figura rectilinea, tria latera, vt libet, aſſumpta, maiora ſunt reliquo latere. quod erat demonſtrandum.

a 20. pri.

PROBL. 6. PROPOS. 13.

DATIS tribus punctis, per quæ circulus deſcribendus ſit, inuenire alia puncta, per quæ idem circulus tranſire debeat.

SOLENT interdum tria data puncta tam parum inter ſe diſtare, aut fere in recta linea iacere, vt non facile eorum centrum inueniri poſſit, propterea quod rectæ ſecantes lineas illa puncta connectentes biſariam, & ad angulos rectos, nimis oblique ſe in centro interſecant. Vt igitur magis exquiſite centrũ reperiatur, inueſtiganda erunt alia duo puncta, vel plura, per quæ idem circulus incedere debeat, hoc modo. Sint data tria puncta A, B, C. Iunctis rectis AB, AC, BC, conſtituatur ſupra baſem BC triangulum BCD, triangulo ABC, æquilaterum, ita vt angulus D, vergat in eam partem, verſus quam circumferentia deſcribenda tranſire debet: lateraque æqualia non ab eodem puncto exeant, hoc eſt, latus CD, lateri BA, & latus BD, lateri CA, ſit æquale. Quod quidem fiet, ſi ex C, arcus delineetur ad interuallum BA, quem alius arcus ex B, ad interuallum CA, delineatus ſecet in D. [a] Erit enim angulus D, angulo A, æqualis: [b] ac proinde circulus per tria puncta A, B, C, deſcriptus tranſibit quoque per quartũ punctum D. Eadem ratione, ſi ſuper baſem CD, triangulum conſtruatur CDE, triangulo BCD, æquilaterum, ordine prædicto, ita vt latus DE, lateri CB, & latus CE, lateri BD, æquale ſit, inuentum erit aliud punctum E, per quod circumferentia incedat. Atque eadem arte reperietur aliud punctum F, per triangulum DEF, triangulo EDC, æquilaterum, &c. Eodem modo ex altera parte reperietur aliud punctum G, per triangulum ABG, triangulo ABC, æquilaterum, & ſic deinceps. Si igitur eligantur tria puncta, ita vt rectæ ea connectentes conſtituant quaſi angulũ rectum, qualia ſunt tria puncta A, C, D, & ex proximis A, C, ad quodcunq; idem interuallum bini arcus deſcribantur, & ex proximis C, D, bini alij; ac per interſectiones horum arcuum rectæ lineæ emittantur, ſecabunt ſeſe in centro H, &c. Aptiſſima quoq; eſſent tria puncta G, B, D, quamuis angulus DBG, acutus ſit. Item tria puncta G, B, E, & C, E, F, &c.



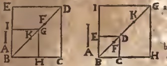
a 8. primi.
b ſchol. 21. tertij.

PROBL. 7. PROPOS. 14.

DATO exceſſu diametri Quadrati ſupra latus: Item dato exceſſu diametri Rhombi ſupra latus, vel lateris ſupra diametrum (quando illud maius eſt) vna cum vno Rhombi angulo: Dato præterea exceſſu diametri Rectanguli ſupra vtrumlibet laterũ inæqualium, vna cum

cum angulo, quem diameter cum eo latere facit, vel vna cum proportione eorundem inæqualium laterum: Dato denique exceſſu diametri Rhomboidis ſupra vtrumuis laterum inæqualium, vel vtriuſuis inæqualium laterum ſupra diametrum (quando illud maius eſt) vna cum vno angulo Rhomboidis, & inſuper cum angulo, quem diameter cum eo latere facit, vel inſuper cum proportione duorum laterum inæqualium; Quadratum ipſum, Rhombum, Rectangulum, & Rhomboides conſtituere.

HOC próblema, quod ad quadratum attinet, alio modo ad finem lib. 2. Euclid. abſoluimus. Sit A, datus exceſſus diametri quadrati cuiuſpiam ſupra latus. Fiat quodcunque quadratum BCDE, cuius diameter BD, excedat latus exceſſu DF; qui ſi æqualis fuerit dato exceſſui A; factum erit, quod iubetur: Si vero inæqualis, [a] fiat vt DF, ad datum exceſſum A, ita diameter BD, ad BG, perficiaturq; quadratum HI; quod dico eſſe id, quod quæritur. Sumpta enim recta GK, ipſi A, æquali, quoniam eſt per conſtructionem, vt tota BD ad totam BG, ita DF, ablata ad A, hoc eſt, ad GK, ablatam; [b] erit quoque vt tota BD, ad totam BG, ita reliqua BF, ad reliquam BK. Et permutando, vt BD, ad BF, ita BG, ad BK. [c] Eſt autem vt BD, ad BF, ita BD, ad BC, (quod BF, BC, æquales ſint; cum DF, ponatur exceſſus diametri BD, ſupra latus BC) [d] Et vt BD, ad BC, ita BG, ad BH. Igitur erit quoque vt BG, ad BK, ita BG, ad BH. Igitur erit quoque vt BG, ad BK, ita BG, ad BH; [e] Ac proinde BK, BH, æquales erunt. Diameter ergo BG, ſuperat latus BH, hoc eſt, BK, recta GK, quæ dato exceſſui A, æqualis eſt. Quod eſt propoſitum.



a 12. ſexti.
b 19. quint.
c 7. quint.
d 4. ſexti.
e 9. quint.

SIT deinde A exceſſus diametri in Rhombo aliquo ſupra latus, vna cum angulo L, datus. Fiat Rhombus quicunque BCDE, habens angulum C, æqualem dato angulo L, vt in primo Rhombo, vel angulum B, vt in ſecundo. Siue ergo diameter opponi debeat dato angulo C, vt in primo Rhombo, ſiue datum angulum B, ſecare, vt in ſecundo, ducatur diameter BD. excedens latus BC, recta DF, quæ ſi æqualis fuerit dato exceſſui A, factum erit, quod iubetur: Si vero inæqualis, [f] fiat vt DF ad exceſſum datum A, ita diameter BD, ad BG, compleaturque Rhombus HI, quem dico eſſe eum, qui quæritur. Abſciſſa enim recta GK, exceſſui dato A, æquali, adhibenda eſt eadem omnino demonſtratio, quæ in quadrato facta eſt

f 12. ſexti.



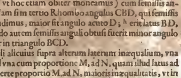
QVOD ſi diameter latere Rhombi minor fuerit, ſit datus exceſſus A. lateris in aliquo Rhombo ſupra diametrum, vna cũ angulo L. Construatur Rhombus quantuſcunque BDCE, habens angulum D, æqualem dato angulo L, vt in tertio Rhombo. Et quia vt latus ſuperet diametrum, ducenda eſt diameter per angulos obtuſos, [g] (quod diameter per acutos angulos ducta ſemper maior eſt Rhombi latere) ducatur diameter BC, quam latus BD, excedat recta DF, quæ ſi æqualis fuerit exceſſui dato A, factũ erit, quod iubetur: Si vero inæqualis: fiat vt DF, ad exceſſum A, ita BD, latus ad BG, cõpleaturq; Rhombus GI, circa eandem diametrum, quem dico eſſe quæſitum. Abſciſſa namq; recta GK, æquali exceſſui A: fiet demõſtratio, vt in quadrato, vt perſpicuum eſt, ſi loco diametrorum BD, BG, in quadrato ſumantur hic latera BD, BG.

g 19. pri.

TVNC autem latus Rhombi maius erit diametro (vt hoc etiam obiter moneamus) cum ſemiſſis anguli obtuſi maior fuerit angulo acuto eiuſdem Rhombi. Nam ſi in tertio Rhombo angulus CBD, qui ſemiſſis eſt anguli obtuſi B, vt in ſchol. propoſ. 34. lib. 1. Euclid. oſtendimus, maior ſit angulo acuto D; [h] erit latus BD, hoc eſt, CD, maius diametro BC, in triangulo BCD. Quando autem ſemiſſis anguli obtuſi fuerit minor angulo acuto, vt in Rhombo ſecundo; [i] erit diameter latere maior in triangulo BCD.

h 19. pri.
i 19. pri.

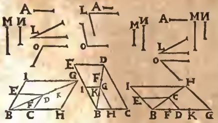
TERTIO ſit datus exceſſus A, diametri rectanguli alicuius ſupra alterum laterum inæqualium, vna cum angulo L quem diameter cum eo latere conſtituit, vel vna cum proportione M, ad N, quam illud latus ad alterum habet. Si ergo angulus L, eſt ſemirecto minor, vel certe proportio M, ad N, maioris inæqualitatis, vt in priori rectangulo, erit A, exceſſus diametri ſupra maius latus: Si vero angulus L, eſt maior ſemirecto, vel proportio M, ad N, minoris inæqualitatis, erit A, exceſſus diametri ſupra minus latus. Conſtituatur ergo angulus CBD, angulo L, æqualis, fiatque rectangulum BCDE, circa aſſumptam diametrum BD. Vel fiat BC, quantacunque ad CD, perpendicularem, vt M, ad N: completoque rectangulo CE, ducatur diameter BD, excedens latus BC, recta DF, quæ ſi fuerit æqualis dato exceſſui A, conſtructum erit rectangulum CE, quod quæritur: Si vero inæqualis, fiat vt DF, ad exceſſum datum A, ita BD, ad BG, compleaturque rectangulum HI, quod erit quæſitum. Abſciſſa enim recta GK, æquali exceſſui A, demonſtrabitur propoſitum, vt in quadrato.



QVARTO & vltimo ſit in aliquo Rhomboide datus exceſſus A, diametri ſupra vtrumuis inæqualium laterum, vna cum angulo Rhomboidis O, & inſuper cũ angulo L, quem diameter cũ latere, cuius exceſſus ſumptus eſt, efficit, vel inſuper cũ proportione M, ad N, quam latus illud ad alterũ latus habet. Conſtituatur angulus BCD, in prima figura, vel CBE, in ſecunda, dato angulo O, æqualis. Deinde ſiue diameter dato angulo C, opponi debeat, vt in prima figura, ſiue datũ angulum CBE, ſecare, vt in ſecũda, fiat ad B, angulus CBD, angulo L, dato æqualis, ſecetq; CD, rectã BD, in D: vel fiat vt M, ad N, ita BC, ad CD; ac Rhõboides compleatur CE, cuius diame-

diameter latus B C, excedat recta DF, quæ ſi æqualis fuerit dato exceſſui A, factum erit, quod iubetur. Si vero inæqualis, fiat vt D F, ad exceſſum A, ita B D, ad B G, compleaturque Rhomboides H I, circa eandem diametrum B D, quod dico eſſe quæſitum. Nam ſi reſecetur G K, exceſſui A, æqualis, adhibenda eſt eadem demonſtratio, quæ in præcedentibus.

QVOD ſi diameter Rhomboidis cuiuſpiam minor fuerit latere maiore, vt in tertia figura. Sit datus exceſſus A, lateris maioris in aliquo Rhomboide ſupra diametrum, vna cum angulo O, Rhomboidis, & inſuper cum angulo L, quem diameter cum illo latere maiore efficere debet, vel inſuper cum proportione M, ad N, quam maius latus ad minus habet. Conſtituatur angulus BDC, dato angulo O, æqualis: Et ſi eſt acutus, fiat in B, angulus D B C, angulo L, æqualis, (ſi datus angulus Rhomboidis foret obtuſus, nimirum DBE, conſtituendus eſſet angulus D B C, in ipſo angulo dato) ſecetque recta BC, rectam DC, in C; vel fiat vt M, ad N, ita B D, ad D C; ac Rhomboides compleatur D E, cuius latus BD, diametrū B C, ſuperet recta DF, quæ ſi æqualis fuerit dato exceſſui A, factū erit, quod iubetur: Si vero inæqualis, fiat vt DF, ad A, ita BD, ad B G, perficiaturque Rhomboides GI, quod dico eſſe quæſitum. Nam ſi capiatur GK, æqualis ipſi A, demonſtrabitur propoſitum, vt ſupra in quadrato, ſi loco diametrorum BD, BG, quadrati, accipiantur hic latera BD, BG, vt perſpicuum eſt.

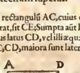


TVNC autem latus maius diametrum excedet, quando angulus, quem diameter cum minore latere efficit, maior eſt acuto angulo Rhomboidis. Nam ſi in tertia figura angulus BCD, maior eſt angulo D: [c] erit
c 29. prim. recta B D, maior, quam B C.

THEOR. 8. PROPOS. 15.

IN rectangulo parallelogrammo, ſumptis exceſſibus, quibus diameter duo latera ſuperat; Rectangulum ſub differentia exceſſuum, & minore exceſſu bis ſumptum, vna cum quadrato minoris exceſſus bis ſumpto, æquale eſt quadrato rectæ, qua minus latus minorem exceſſum ſuperat.

SIT rectangulū AC, cuius diametro BD, æqualis ſit recta BE, vt exceſſus minor, quo diameter maius latus BC, ſuperat, ſit CE; Sumpta aūt BF, æquali minori lateri CD, vt EF, exceſſus ſit, quo diameter BD, vel illi æqualis
a 20. prim. BE, minus latus CD, vel illi æqualem BF, ſuperat: ac proinde CF, ſit differentia exceſſuum EC, EF. [a] Et quia latera BC, CD, maiora ſunt latere BD, hoc eſt, recta BE, dempta communi BC, erit reliqua CD, maior quam reliqua CE; ideoq; & BF, æqualis ipſi CD, maior erit, quam CE. Abſciſſa ergo FG, ipſi CE, æquali, erit BG, exceſſus, quo minus latus BF, minorem exceſſum FG, ſuperat. Dico rectangulum bis ſumptum ſub FC, differentia exceſſuum, & CE, minore exceſſu, vna cum quadrato minoris exceſſus CE, bis ſumpto, æquale eſſe quadrato rectæ BG, qua
b 4. ſecun. minus latus BF, minorem exceſſum FG, ſuperat. [b] Quoniam enim quadratum rectæ BE, æquale eſt quadratis rectarum BC, CE, vna cum
c 1. ſecund. rectangulo bis ſub BC, CE, hoc eſt, rectangulo ſemel ſumpto ſub BC, & recta ipſius CE, dupla. [c] Eſt autem rectangulum ſub BC, & dupla ipſius CE, æquale rectangulis ſub BF, & dupla ipſius CE, æquale rectāgulis ſub BF, & dupla ipſius CE, & ſub FC, & dupla ipſius CE; hoc eſt rectangulo ſub BF, & CE, bis vna cum rectangulo ſub FC, & CE, bis; Erit quadratum rectæ BE, ſiue rectæ BD, æquale quoque quadratis rectarum BC, CE, vna cum
d 47 prim rectangulis ſub B F, C E, bis & ſub F C, C E, bis; Ac proinde & quadrata rectarum B C, C D, [d] quæ quadrato rectæ BD, æqualia ſunt, æqualia erunt quadratis rectarum BC, CE, vna cū rectangulis ſub B F, C E, bis & ſub F C, C E, bis. Ablato ergo communi quadrato rectæ BC, erit reliquum quadratum rectæ CD, hoc eſt, rectæ BF, æquale reliquis rectangulis ſub BF, CE, bis, & ſub FC, CE, bis, vna cum quadrato rectæ CE. Addito igitur communi quadrato rectæ FG, erunt quadrata rectarum BF, FG, æqualia rectangulis ſub BF, CE, bis, & ſub FC, CE, bis, vna cum quadratis rectarum CE, FG. [e] Sed quadrata rectarum BF, FG, æqualia ſunt rectangu-
e 7. ſecun. lo ſub BF, FG, bis, vna cum quadrato rectæ BG. Igitur rectangulū quoq; ſub BF, FG, hoc eſt, ſub BF, CE, bis, vna cum quadrato rectæ BG, æquale erit rectangulis ſub BF, CE, bis, & ſub FC, CE, bis, vna cum quadratis rectarum CE, FG. Ablato ergo communi rectangulo ſub BF, CE, bis ſumpto; erit reliquum quadratum BG, æquale reliquo rectangulo ſub FC, CE, bis, vna cum quadratis rectarū CE, FG: hoc eſt, rectangulū ſub FC, differentia exceſſuum, & CE, minore exceſſu bis ſumptum, vna cum quadrato minoris exceſſus CE, bis ſumpto, æquale eſt quadrato rectæ BG, qua minus latus BF, minorem exceſſum FG, ſuperat. quod erat demonſtrandum.

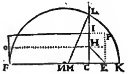


PROBL. 8. PROPOS. 16.

DATIS duobus exceſsibus, quibus diameter rectanguli vtrumque latus ſuperat, vtrumque latus, & diametrum inuenire.

SIT

SIT datus exceſſus FE, diametri ſupra latus minus, & CE, ſupra maius, ita vt differentia exceſſuum ſit FC. Ex C, educatur ad FE, perpendicularis CL, capianturque CH, HI, EK, minori exceſſui CE, æquales, ita vt totæ CI, CK, æquales ſint, vtpote ipſius CE, duplæ, perſiciaturque parallelogrammum FI. Diuiſa deinde FK, bifariam in N, deſcribatur ex N, per F, & K, ſemicirculus FLK, ſecans CL, in L. Ducta denique HE, ſumatur illi æqualis CM, iungaturque recta LM. Dico LM, differentiam eſſe inter minus latus quæſitum, & minorem exceſſum datum CE, ita vt CE, addita ad LM efficiat minus latus; cui ſi addatur FC, differentia datorũ exceſſuum, fiat maius latus. (Eſt enim differentia exceſſuum diametri ſupra vtrũq; latus rectanguli æqualis exceſſui maioris lateris ſupra minus: Vt in figura præcedentis propoſ. patet; vbi diameter eſt BD, vel BE; exceſſus maior FE, quo diameter minus latus BF, ſuperat; exceſſus minor CE; quo eadem diameter maius latus BC, ſuperat: eſtq; FC, differentia exceſſuum, exceſſus, quo maius latus BC, ſuperat minus BF,) Ac tandem maiori lateri inuento adijciatur minor exceſſus CE, vt diameter habeatur, quę omnia ita demonſtrabuntur.



Per præcedentem, rectangulum ſub FC. differentia exceſſuum, & CE, minori exceſſu bis ſumptum, hoc eſt, rectangulum FI, vna cum quadrato rectæ CE, bis etiam ſumpto, hoc eſt, vna cum quadrato rectæ HE, vel CM, æquale eſt quadrato rectæ, qua minus latus quæſitũ, minorem exceſſum CE, ſuperat. Cum ergo quadratum rectæ CL, æquale ſit rectangulo FI, vt ex demonſtratione vltimæ propoſ. lib. 2. Eucl. conſtat; erunt quoque quadrata rectarum CL, CM, æqualia quadrato eiuſdem rectæ, qua minus latus quæſitum ſuperat minorẽ exceſſum CE,[a] Ac proinde cum quadratis rectarũ CL, CM, ſit æquale quadratũ rectæ LM: erit quoq; quadratum rectæ LM, æquale quadrato rectæ, qua minus latus quæſitum minorẽ exceſſum CE, ſuperat. Eſt ergo LM, exceſſus minoris lateris quæſiti ſupra minorẽ exceſſum CE. Ideoque recta ex LM, CE, conflata erit minus latus quæſitũ: cui ſi addatur FC, differentia exceſſuũ, fiet maius latus quæſitum: cui ſi tandẽ minor exceſſus CE, adijciatur, conflabitur diameter quæſita, quę omnia demonſtranda erant. a 47. prim

COROLLARIVM.

ITAQVE recta LM, cuius quadratum æquale eſt rectangulo FI, ſub FC, differentia exceſſuum, & dupla minoris exceſſus CE, comprehenſo, vna cum duplo quadrati exceſſus minoris CE, addita minori exceſſui CE, efficit minus latus quæſitum, &c.

IMMO quia quadratũ rectæ, CL, rectangulo FI, ſub FC, differentia exceſſuum, & CK, duplo minoris exceſſus CE, comprehẽſo æquale eſt, vt in demõſtratione dictum eſt, & rectangulum CP, duplũ eſt quadrati exceſſus minoris CE, hoc eſt, quadrato rectæ CM, æquale: erit quadratũ rectæ LM, toti rectangulo FP, ſub maiori exceſſu FE, & EP, dupla minoris exceſſus CE, contento æquale; [a] ideoque LM, media proportionalis erit inter maiorem exceſſum, ac duplum minoris exceſſus. Quocirca ſi inter maiorem exceſſum, & duplum minoris exceſſus ſumatur media proportionalis LM, habebitur rurſus differentia inter minus lat⁹, & minorẽ exceſſum, &c. a 13. ſexti.

SCHOLIVM.

HOC problema, vna cum antecedente Theoremate in Gallia, vnde mihi tranſmiſſum eſt, ab ingenioſo quodam Geometra demonſtratũ fuit, cuius nomen, ſi mihi eſſet cognitũ, hic libenter aſcriberẽ. Idẽ tamen problema ad finẽ lib. 2. Eucl. ex Marino Ghetaldo Patritio Raguſino aliter quoq; demonſtrauim⁹ non infeliciter.

PROBL. 9. PROPOS. 17.

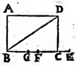
DATO exceſſu diametri rectanguli ſupra maius latus, &, exceſſu maioris lateris ſupra minus: vtrumq; latus, ac diametrum inuenire.

QVONIAM, vt in pręcedenti problem. dictum eſt, exceſſus maioris lateris ſupra minus, ęqualis eſt differentiæ inter exceſſus diametri ſupra vtrumq; latus: ſit vt exceſſus diametri ſupra maius lat⁹, addit⁹ ad exceſſum maioris lateris ſupra minus, conficiat exceſſum diametri ſupra minus latus. Quare cum cogniti ſint exceſſus diametri ſupra vtrumq; latus, reliqua cognoſcentur, vt in præmiſſo problemate traditum eſt.

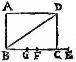
PROBL. 10. PROPOS. 18.

SECTA linea recta vtcunque, adiungere ei verſus vtramuis partem lineam rectam, ita vt quadratum totius rectæ compoſitæ æquale ſit quadrato rectę adiunctę; vna cum quadrato rectæ, quæ ex adiuncta, & proximo ſegmento prioris lineæ conflatur.

IN figura propoſ. 15. ſit recta EF, ſecta in C, vtcunq;, oporteatq; ei verſus F. adiungere rectam, ita vt quadratum totius compoſitę ſit ęquale quadrato adiunctæ, vna cum quadrato rectæ ex ſegmento FC, & adiuncta compoſitæ. Statuantur FE, EC, exceſſus, quibus diameter alicuius rectanguli vtrumq; latus ſuperat. Atque ex propoſ. 16. inueniatur minus latus BF. Dico rectam BF, ipſi EF, adiunctam efficere, quod proponitur: Fiat enim rectangulum AC, ſub BC,



S & CD,



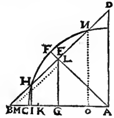
& CD, ipſi B F, æquali comprehenſum. Et quia FC, differentia exceſſuum addita minori lateri inuento B F, facit maius latus, vt propoſ. 16. dictum eſt, erit B E, diametro B D, æqualis, quandoquidem excedit minus latus BF, vel C D, recta E F, & maius recta E C. a 47.pri. [a] Quoniam vero quadratum rectæ BE, hoc eſt, diametri BD, æquale eſt quadrato rectæ CD, id eſt, adiunctæ BF, vna cum quadrato rectæ BC, compoſitæ ex adiuncta B F, & proximo ſegmento FC, liquido conſtat id, quod proponitur.

PROBL. 11. PROPOS. 19.

DATIS duabus rectis inæqualibus, quarum maior diametrum quadrati ex minore deſcripti non ſuperet: maiorem ita ſecare in duas partes inæquales, vt earum quadrata ſimul ſumpta quadrato minoris lineæ ſint æqualia.

SINT datæ duæ rectæ AB, maior, & AC, minor, ita vt AB, non ſit maior diametro quadrati ex A C, deſcripti. Erigatur perpendicularis AD, maiori AB, æqualis: Et ducta recta BD, ſecetur bifariam in E, iungaturque recta AE, [a] quæ ad BD, perpendicularis erit: diuidetque angulum rectum A, bifariam in duos ſemirectos: [b] Sunt autem & B, D, ſemirecti. [c] Igitur latera E A, E B, æqualia ſunt; ac proinde A B, diameter erit quadrati rectæ AE Et quoniam AB, ponitur non maior diametro quadrati minoris AC, non erit AC, minor quam AE, ſed vel maior, vel æqualis. Si namque minor eſſet AC, quam AE, ſumpta ipſi æquali AL, ductaque LM, ipſi EB, parallela, eſſet A M, diameter quadrati minoris A L, ideoque maior A B, ſuperaret diametrum quadrati ex minore deſcripti. quod non ponitur. Sit ergo primum AC, maior quam AE, productaque A E, vt A F, ipſi A C, ſit æqualis, deſcribatur ex A, per C, F, circulus ſecans BD, in H, N, demittaturque HI, ad AB, perpendicularis. Dico maiorem A B, ita eſſe ſectam in I, vt quadrata rectarum A I, I B, æqualia ſint quadrato minoris A C. Quoniam enim angulus I, rectus eſt, & B, ſemirectus: erit quoque H, in triangulo BHI, ſemirectus; [d] ideoque latera BI, HI, æqualia erunt. [e] Cum ergo ducta recta A H, quadrata rectarum A I, I H, quadrato rectæ A H, æqualia ſint: erunt quoque quadrata ſegmentorum A I, I B, æqualia quadrato rectæ AH, hoc eſt, quadrato rectæ A C. quod eſt propoſitum.

a ſchol. 26. primi.
b 2. coroll. 32. primi.
c 6. primi.



d 6. primi.
e 47. pri.

SIT deinde minor linea data A K, æqualis ipſi AE, ita vt maior AB, diametro quadrati ex minore A E, deſcripti æqualis ſit. Demittatur perpendicularis EG, [f] quæ & baſem AB, & angulum rectum E, diuidet bifariam in ſemirectos. Dico A B, ita eſſe ſectam in G, vt quadrata ſegmentorum æqualium AG, GB, æqualia ſint quadrato minoris A K, vel AE. [g] Erunt enim rurſus latera E G, GB, æqualia, ob ſemirectos angulos æquales B, & E, in triangulo BEG. [h] Cum ergo quadrata rectarum A G, GE, æqualia ſint quadrato rectæ A E, erunt quoque quadrata ſegmentorum A G, G B, æqualia quadrato AE, vel minoris lineæ A K. quod eſt propoſitum.

f ſchol. 26. primi.
g 6. primi.
h 47. pri.

SI ex altera ſectione N, demittatur perpendicularis NO, erit AB, ſecta in O, vt in I, ita vt etiam quadrata ſegmentorum BO, OA, æqualia ſint quadrato minoris AC, vel AH. [i] Cum enim rectæ BD, BA, ſectæ ſint proportionaliter in H, I, & N, O, ſintque æquales BH, ND; [k] (propterea quod perpendicularis A E, ſecat H N, bifariam. Ablatis ergo æqualibus E H, E N, ex æqualibus E B, ED, reliquæ BH, DN, æquales erunt) erunt quoque BI, AO, æquales; nec non BO, AC, &c.

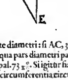
i 2. ſexti.
k 3. tertij.

PROBL. 12. PROPOS. 20.

DATA chorda alicuius arcus, vna cum perpendiculari, quæ ex medio puncto chordæ ad arcum vſque educitur: quot gradus, vel palmos tam arcus, quam ſemidiameter circuli complectitur, inuenire.

SIT data chorda AB, palmorum 74. & perpendicularis CD, ex medio puncto C, educta palmorum 10. Iuncta recta AD; quoniam in triangulo rectangulo ACD, latera AC, CD, nota ſunt, quod CD, ſit 10. & AC, 37. ſemiſſis nimirum chordæ A B, 74. [a] Si fiat, vt CD, 10. ad ſinum totum 100000. ita A C, 37. ad aliud; inuenietur A C, 370000. tangens anguli ADC; ac proinde ipſe angulus erit grad. 74. min. 53. fere. Et ſi concipiatur duci AE, ad centrum E, erit quoque angulus DAE, grad. 74. min. 53. fere; [b] quippe cum anguli ADE, DAE, æquales ſint. Quod ſi vtriuſque ſumma grad 149. min. 46 fere, detrahatur ex duobus rectis, hoc eſt, ex grad. 180. reliquus fiet tertius angulus E, in centro grad. 30. min. 14. fere, ac totidem grad. erit arcus AD; ideoque eius duplus ADB, grad. 60. min. 28. ferme.

a 8. triãg. rectil.



b 5. primi.

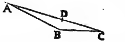
c 35. tert.

[c] QVIA vero quadratum ex A C, æquale eſt rectangulo ſub CD, & reliqua parte diametri: ſi AC, 37. palm. ducatur in ſe, & productus numerus 1369. diuidatur per CD, palm. 10. prodibit reliqua pars diametri palm. 136 $\frac{9}{10}$. ac proinde addita CD, palm. 10. tota diameter erit pal. 146 $\frac{9}{10}$. & ſemidiameter pal. 73 $\frac{9}{20}$. Si igitur fiat vt 7. ad 22. ita 146 $\frac{9}{10}$. palmi ad aliud; reperietur per 1. regulam Num. 2. cap. 7. lib. 4. huius, circumferentia circuli palm. 430 [illegible]. Ergo ſi rurſus fiat, vt tota circumferentia grad, 360 ad palmos 430 [illegible], ita arcus ADB, grad. 60. min. 28. ad aliud, inuenietur hic arcus pal. 72 [illegible]. hoc eſt, 72 $\frac{9}{10}$. paulo amplius.

THEOR.

THEOR. 9. PROPOS. 21.

IN omni triangulo quadratum maximi lateris minus eſt; quam duplum ſummæ quadratorum ex reliquis duobus lateribus deſcriptorum.



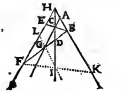
IN triangulo ABC, maximum latus ſit A C, & angulus oppoſitus B, obtuſus. Si namque rectus eſſet, vel acutus; [a] eſſet quadratum rectæ A C, vel æquale duobus quadratis a 47. pri.
rectarũ AB, BC; [b] vel minus: ac proinde multo minus duplo, ſummæ quadratorum AB, BC. Ex maiore latere AC, dematur AD, recta æqualis lateri AB. [c] Et quia duo latera AB, BC, maiora ſunt latere AC; erit reliqua CD, minor latere B C; ac proinde duo quadrata AD, DC, minora duobus quadratis AB, BC. Eſt autem quadratum AC, minus duplo quadratorũ AD, DC: [d] propterea quod æquale eſt duobus quadratis AD, DC, vna cum rectangulo bis ſub A D, D C, quod quidem rectangulum bis, minus eſt duobus quadratis AD, DC, ex Lemmate propoſ. 39. lib. 10. Euclid. Multo ergo minus erit quadratum AC, duplo quadratorum AB, BC. quod erat demonſtrandum.

b 13 ſecun.
c 20. pri.
d 4. ſecun.

PROBL. 13. PROPOS. 22.

DATIS tribus rectis vtcunque in plano non parallelis, niſi quando extremæ à media æqualiter diſtant, rectam lineam ducere, & quidem per datum punctum in media, ſi omnes tres in vno puncto conueniant; ita vt eius ſegmenta inter mediam, & extremas ſint inter ſe æqualia, vel datam habeant proportionem.

SINT tres rectæ AB, CD, EF. Ducatur vtcunque recta BF, ſecans omnes tres, qua ſecta bifariam in G; ſi quidem punctum G, cadet in mediam, factum erit, quod iubetur. Si vero G, cadet extra lineam mediam CD, agatur per G, alteri extremarum, nimirum ipſi E F, (dummodo ei non æquidiſtet media CD) parallela AG, ſecans mediam in C. Cum enim CD, ponatur non æquidiſtare ipſi EF, ſecabit vtique productam EF, & proinde eius quoque parallelam A G. Quod ſi C D, ipſi EF, æquidiſtaret; ducenda eſſet per G, ipſi AB, parallela. Poſtremo ex B, puncto ductæ rectæ B F, ſumpto in extrema A B, cui non æquidiſtat A G, ducatur per C, vbi parallela AG, mediam CD, ſecat, recta B C, ſecans E F, in E. Dico rectas BC, CE, æquales eſſe. Cum enim in triangulo BEF, recta CG, ſit baſi EF, parallela: [a] erit vt BG, ad GF, ita BC, ad CE; Sed BG, ipſi GF, per conſtructionem, æqualis eſt. Igitur & BC, ipſi CE, æqualis erit. a 2. ſexti.



QVOD ſi per G, agatur ipſi AB, parallela G I, ſecans mediam CD, in I; erit ducta FIK, ſecta quoque bifariam in I: propterea quod in triangulo FBK, recta GI, baſi BK, æquidiſtat; [b] ideoque ſicut BF, in G, diuiſa eſt bifariam, ita quoque FK, in I, bifariam ſecabitur. b 2. ſexti.

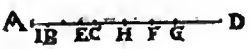
EX his patet, cur media linea non debeat vtrique extremæ æquidiſtare; ſed vel neutri, vel alteri tantum. Nam ſi vtrique æquidiſtaret; [c] recta per G, ducta parallela alterutri extremarum, æquidiſtaret quoque mediæ; c 30. pri.
ac proinde eam non ſecaret. Quod ſi neutri æquidiſtet, duci poterit per G, parallela vtrilibet extremarum. Si vero vni extremarum æquidiſtet, ducenda erit per G, alteri parallela.

IAM vero ſi tres datæ rectæ coeant in eodem puncto productæ, vt in H, facilius erit problema, etiamſi in media linea detur punctum C, per quod duci debeat linea. Ducta enim per datum punctum C, in media, alterutri extremarum, vt ipſi HF, parallela C A, ſecante alteram extremam in A; & ipſi H A, æqualis capiatur AB, ſecabitur ducta BCE, in C, bifariam: [d] quippe cum ſit BC, ad CE, vt recta BA, ad rectam AH, &c. Sic etiam ſi de- d 2. ſexti.
tur punctum I, in media; ducta per I, alterutri extremarum, vt ipſi H B, parallela LI, ſumptaque ipſi HL, æquali LF, ſecabitur ducta FIK, in I, bifariam; [e] propterea quod eſt FI, ad IK, vt FL, ad LH, &c. e 2. ſexti.

EADEM ratione ducemus lineam, quæ à media ſecetur in duas partes habentes proportionem. Si namque ducta B F, vtcunque ſecetur in datam proportionem in G, & reliqua fiant, vt ſupra; [f] erit rurſus vt f 2. ſexti.
FG, ad GB, ita EC, ad CB; vel vt BG, ad GF, ita BC, ad CE, prout videlicet proportio data eſt FG, ad GB, vel BG, ad GF. Sic etiam ſi tres rectæ datæ coeant in H; ducta GA, ipſi EF, parallela, fiatq; HA, ad AB, vt antecedens datæ proportionis ad conſequẽs: ſi ducatur BCE, [g] erit EC, ad CB, vt HA, ad AB. Et ſi fiat HA, ad AB, vt con- g 2. ſexti.
ſequens datæ proportionis ad antecedens, erit rurſus BC, ad CE, vt BA, antecedens ad conſequens AH.

PROBL. 14. PROPOS. 23.

CVIVSLIBET lineæ, quantumuis minimæ, exhibere multiplicem quamcunque, etiamſi circino ipſa non accipiatur.



SIT ſumenda verbi gratia lineolę AB, tripla. Extẽſo circino quantumlibet ex A, ad C, ſumãtur ipſi AC, duæ æquales C F, F D, vt tota AD, ipſius AC, ſit tripla. Item ipſi C B, ſumantur tres æquales DG, GH, HE. Dico AE, eſſe ipſius AB, triplam. Quoniam enim tam multiplex eſt tota A D, totius A C, quam multiplex eſt ablata DE, ablatæ CB, nimirum tripla: erit quoque ita multiplex reliqua E A, reliquæ AB, vt tota totius, videlicet tripla. quod eſt propoſitum.

PROBL. 15. PROPOS. 24.

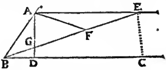
EX qualibet lineola, quamuis minima, auferre partem, vel partes imperatas.

IN figura præcedentis propoſ. ſit ex lineola AB, detrahenda tertia pars. Per præcedentem ſumatur ipſius AB, tripla AE, quæ ſi videbitur nimis exigua, multiplicetur, vt libet. In exemplo quadruplicata eſt vſque ad D; ita vt AD, ſit ipſius AB, duodecupla: (quod ſcietur, ſi numerus partium AE, nimirum 3. ducatur in numerum partium ipſius AD, ipſi AE, æqualium, nimirum in 4.) ac proinde ſi AB, diuiſa eſſe intelligatur in 3. partes, tota AD, continebit tales partes 36. Quocirca ſi in inſtrumento partium lib. 1. cap. 1. conſtructo, interuallum AD, ſtatuatur inter partes 36. 36 Deinde interuallum inter 35. 35. (nimirum tota AD, vna parte minus) transferatur ex D, ad I, erit AI, tertia pars ipſius AB, hoc eſt, pars trigeſima ſexta totius AD. Cum ergo AB, contineat tres trigeſimas ſextas partes totius AD, erit AI, ipſius AB, pars tertia. quod eſt propoſitum.

PROBL. 16. PROPOS. 25.

ANGVLVM datum rectilineum in tres æquales partes partiri.

PROBLEMA hoc veteres Geometras, diu, multumque exagitauit, neque ab vllo ad hanc vſque diem Geometrice eſt ſolutum. Pappus Alexandrinus inter alios illud ſoluere conatus eſt per deſcriptionem hyperboles. Nos idem abſoluemus per lineam Conchoideos, quam lib. 6. propoſ. 15. huius ex Nicomede deſcripſimus, hoc modo. Sit datus angulus acutus ABC: Demiſſa autem ex quouis puncto A, ad BC, perpendiculari AD, ſumatur ipſius AB, dupla DC; Et polo B, interuallo autem DC, deſcribatur linea Conchoideos CE, ſecans rectam AE, ipſi BC, ductam parallelam in E. ducaturque



recta BE. Dico angulum CBE, eſſe tertiam partem dati anguli ABC; hoc eſt, angulum ABE, duplum eſſe anguli CBE, adeo vt diuiſio anguli ABE, bifariam, totus angulus ABC, ſectus ſit in tres partes æquales. Quoniam enim ex deſcriptione Conchoideos, recta GE, ipſi DC, æqualis eſt; ac proinde ipſius AB, dupla: ſi ſe-
a ſchol. 31. tertij. cetur bifariam in E, erit vtraq; ſemiſſis ipſi AB, æqualis. [a] Quia vero circulus ex F, circa GE, deſcriptus tranſit per angulum rectum GAE, erit quoque ducta FA, vtrique ſemiſſi FE, FG, ideoq; & ipſi AB, æqualis. [b] Igitur
b 5. primi. tam anguli FAE, FEA, quam AFB, ABF, æquales erunt. [c] Eſt autem externus AFB, duobus internis FAE,
c 32. primi. FEA, æqualis: ideoque ipſius FEA, duplus. Igitur & ABF, & eiuſdem FEA, [d] hoc eſt, alterni CBE, duplus erit.
d 29. pri.

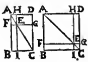
SI angulus datus rectus eſt, diuidetur in tres æquales angulos, vt in ſcholio propoſ. 32. lib 1. Euclid. tradidimus.

SI vero eſt obtuſus, ſecabimus eum bifariam, & ſemiſſem alterutram in tres partes æquales, vt docuimus hoc loco. Nam duæ partes tertiæ illius ſemiſſis efficient propoſiti anguli obtuſi tertiam partem, vt perſpicuum eſt.

PROBL. 17. PROPOS. 26.

SI per idem punctum diametri in rectangulo duæ lineæ ducantur lateribus parallelæ: Erit rectangulum ſub ſegmentis diametri comprehenſum æquale duobus rectangulis ſub ſegmentis duorum laterum comprehenſis.

IN rectangulo BD, per E, punctum diametri AC, ductæ ſint FG, HI, lateribus parallelæ. Dico rectan-
a 4. ſecun. gulum ſub AE, EC, æquale eſſe rectangulis ſub AF, FB, & ſub BI, IC. [a] Quoniam enim quadratum ex AC, æ-
b 47. pri. quale eſt quadratis ex AE, EC, vna cum rectangulo bis ſub AE, EC. [b] Sunt autem quadrata ex AB, BC, quadrato ex AC, æqualia; erunt quoque duo quadrata ex AE, EC, vna cum rectangulo bis ſub AE, EC, æqualia
c 4. ſecun. quadratis ex AB, BC. [c] Sed quadratum ex AB, æquale eſt quadratis duobus ex AF, FB, vna cum rectangulo bis ſub AF, FB; Et quadratum ex BC, æquale eſt duobus quadratis ex BI, IC, vna cum rectangulo bis ſub BI, IC. Igitur duo quadrata ex AE, EC, æqualia erunt quatuor quadratis ex AF, FB, BI, IC, vna cum rectangulis bis ſub AF, FB, & ſub BI, IC. [d] Cum ergo quadratum ex AE, quadratis ex AF, FE, hoc eſt, ex AF,
d 47. pri. BI: & quadratum ex EC, quadratis ex EI, IC, hoc eſt, ex FB, IC: æquale ſit; Erunt quatuor quadrata ex AF, FB, BI, IC, vna cum rectangulo bis ſub AE, EC, æqualia quatuor quadratis ex AF, FB, BI, IC, vna cum rectangulis bis ſub AF, FB, & ſub BI, IC; Ablatiſque vtrobique prædictis quatuor quadratis communibus, erit reliquum rectangulum bis ſub AE, EC, reliquis rectangulis bis ſub AF, FB, & ſub BI, IC, æquale. Ideoque rectangulum ſemel ſub AE, EC, rectangulis ſemel ſub AF, FB, & ſub BI, IC, erit æquale. quod erat demonſtrandum.



COROL-

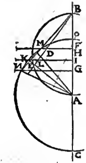
COROLLARIVM.

ITAQVE in quadrato, vt in poſteriori figura, rectangulum ſub ſegmentis diametri AE, EC, comprehenſum, æquale eſt duobus complementis DE, BE, quippe cum complementa ſub ſegmentis laterum comprehendantur.

PROBL. 18. PROPOS. 27.

DATO centro Ellipſis in linea in infinitum producta, vna cum duobus punctis ad eaſdem partes axis, vel centri, per quæ tranſire dicatur Ellipſis: vtrumque axis maioris extremum inuenire.

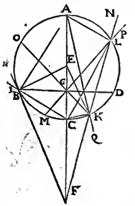
HOC problema conicum eſt, & acutum. Sit A, centrum, id eſt, punctum medium alicuius Ellipſis in linea axis maioris BC, quantacunque: Et duo puncta in eadem Ellipſi D, E, verſus eandem partem, hoc eſt, ſiue ſupra centrum A, ſiue infra; è quibus ad BC, perpendiculares ducantur DF, EG: Eritque DF, minor quam EG, quod perpendicularis remotior à centro minor ſemper ſit, quam propinquior. Ducta igitur recta ED, ſecabit lineam axis in B. Secta autem AB, bifariam in H, deſcribatur ex H, circa AB, ſemicirculus AKB. Diuiſa quoque FG, inter ductas perpendiculares bifariam in I, ducatur IK, ad AB, perpendicularis ſecans circumferentiam in K, & rectam BE, in L. Ducta quoque recta BK, ſecante perpendiculares DF, EG, in M, N, iungantur rectæ AM, AK, AN. [a] Et quoniam eſt, vt FI, ad IG, æqualem, ita MK, ad KN, erit quoque MK, ipſi KN, æqualis. Igitur duo latera AK, KM, duobus lateribus AK, KN, æqualia erunt. Cum ergo & angulos æquales comprehendant, vtpote rectos, [b] quod angulus AKB, in ſemirculo rectus ſit; [c] erũt baſes AM, AN, æquales. Circulus igitur ex A, per N, deſcriptus tranſibit per M, ſecabitq; BC, in O, & C. Dico OC, eſſe axem Ellipſis maiorem. [d] Cum enim ſit, vt MD, ad DF, ita NE, ad EG, tranſibit neceſſario Ellipſis, quæ per O, D, C, deſcribitur; (poſſe autem Ellipſim deſcribi circa OC, tamquam axem maiorem, per punctum D, conſtat ex ijs, quæ ad finem ſcholij propoſ. 8. lib. 1. Gnomonices, & in ſcholio Lemmatis 50. lib. 1. Aſtrolabij ſcripſimus) per punctum E, ex ſcholio Lemmatis 51. Aſtrolabij: Ac proinde Ellipſis per data puncta D, E, circa centrum A, deſcripta tranſibit per O, C: ita vt ab Ellipſi per O, D, C, deſcripta non differat. Alioquin Ellipſis Ellipſim in 8. punctis ſecaret, nimirum in D, E, & alijs duobus reſpondentibus ex altera parte axis: deinde in alijs 4. infra centrum reſpondentibus. quod eſt abſurdum, [e] quippe cum Ellipſis Ellipſim in 4. tantum punctis ſecet.



a 2. *ſexti.*
b 31. *tert.*
c 4. *primi.*
d *ſchol.* 4.
e 25 *quar. Apollonij.*

THEOR. 10. PROPOS. 28.

SI in circuli diametro producta punctum ſumatur, ab eoque recta circulum tangens ducatur; à puncto autem contactus chorda ducatur ad diametrum perpendicularis: Recta ex eodem contactus puncto ad vtrumlibet extremum diametri ducta diuidet angulum à tangente, & prædicta chorda perpendiculari comprehenſum bifariam. Item ſi ab eodẽ puncto in diametro producta aſſumpto recta ducatur circulum ſecans, & ab alterutro ſectionis puncto ad interſectionem diametri cum prædicta chorda perpẽdiculati recta iungatur, Recta ex eodem ſectionis puncto ad vtrumlibet diametri extremũ ducta ſecabit quoq; angulum à linea ſecante, & illa alia, quæ per interſectionem diametri cum prędicta chorda perpendiculari ducitur, bifariam.



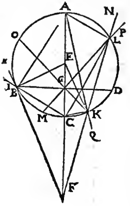
IN circulo ABCD, cuius centrũ E, producta ſit diameter AC, ad F, & ex F, ducatur primum recta FH, tangens circulum in B, atque ex B, ducatur chorda BD, ſecans diametrum in G, ad rectos angulos, iunganturq; ad extrema diametri rectæ BC, BA. Dico tam angulos CBF, CBG, quam (producta FB, ad H,) angulos ABH, ABG, eſſe æquales. [a] Quoniam enim angulus CBF, angulo BAC, in alterno ſegmento æqualis eſt. [b] & angulus CBD, eidem angulo BAC, æqualis, ob arcus æquales CB, CD; [c] (vel etiam angulus CBG, angulo BAC, æqualis eſt; quod BG, in triangulo rectangulo ABC, ad baſem AC, perpendicularis ſit) erunt anguli CBF, CBG, inter ſe quoque æquales. Producta autem CB, ad I, ſi ex rectis angulis ABC, ABI, tollantur æquales CBG, HBI,) [d] cũ enim CBF, æqualis ſit angulo HBI, ad verticem: & angulus CBG, angulo CBF, oſtenſus æqualis; erit quoque

a 32. *tert.*
b 27 *tert.*
c 8. *ſexti.*
d 15 *pri.*

angulus CB G, angulo HBI, æqualis.) erunt quoque reliqui anguli A B G, A B H, inter ſe æquales. quod eſt primum.

DEINDE ducatur recta FN, ſecans circulum in K, L, ductiſque rectis KGO, LGM, per G, iungantur tam rectæ KC, K A, quã LC, LA, ad extrema diametri. Dico rurſus tam angulos CLF, CLG, quã ALG, ALN: Item tam CKF, CKG, quã AKG, AKL, eſſe æquales. Ductis n. ex centro rectis EB, EK; [e] erit angulus EBF, rectus: [f] Igitur erit FB, media proportionalis inter EF, FG: [g] Ideoque rectangulum ſub E F, F G, quadrato ex FB, æquale erit: [h] Eſt autem eidem quadrato æquale quoque rectangulum ſub L F, FK. Igitur rectangulum ſub EF, FG, rectangulo ſub LF, FK, æquale erit: [i] Ac proinde erit vt EF, prima ad FK, ſecundam, ita LF, tertia ad FG, quartam. Quare cum triangula E F K, L F G, habeant latera circa communem angulum F, proportionalia; [k] erunt anguli FEK, FLG, homologis lateribus FK, FG, oppoſiti æquales. [l] Eſt autem angulus FEK, in centro anguli C L K, ad circumferentiam, (cum habeant eandem baſem CK,) duplus. Igitur & angulus F L G, eiuſdem anguli CLK, duplus erit; Ac proinde angulus FLG, ſectus erit bifariam à recta LC, hoc eſt anguli CLF, CLG, æquales erunt. Producta autem C L, ad P, ſi ex rectis angulis A L C, A L P, demantur æquales anguli C L G, PLN, (Cum enim C L F, oſtenſus ſit æqualis angulo CLG, [m] & CLF, æqualis ſit angulo PLN, ad verticem, erit quoque CLG, eidem angulo PLN, æqualis.) erunt quoque reliqui anguli ALG, ALN, æquales. Rurſus quia anguli CLK, CLM, oſtẽſi ſunt æquales; [n] erunt arcus CK, CM, æquales. [o] Igitur anguli CGK, CGM: [p] Ideoque & anguli AGO, AGL, ad verticem æquales erunt; [q] Ac proinde arcus etiam A O, A L, æquales erunt: [r] ideoque & anguli A K O, A K L, erunt æquales. Producta autem A K, ad Q, ſi ex rectis angulis C K A, C K Q, auferantur æquales AKG, FKQ, (Cum enim angulus AKG, angulo AKL, oſtenſus ſit æqualis: [s] hic autem angulo F K Q, ad verticem ſit æqualis; erit quoque angulus A K G, angulo FKQ, æqualis.) erunt etiam reliqui anguli CKG, CKF, inter ſe æquales. Quæ omnia demonſtranda erunt.

e 18. tert. f corell. 8. ſexti. g 17. ſexti. h 36. tert. i 16. ſexti. k 6. ſexti. l 20. tertij. m 15. pri. n 26. tert. o ſchol. 29. tertij. p 15. pri. q ſchol. 29. tertij. r 27. tert. s 15. primi.



S C H O L I V M.

HOC Theorema valde vtile eſt ad deſcriptionem paralleli cuiuſuis circuli maximi per datum punctum in Aſtrolabio, vt ex propoſ. 18. lib. 2. Aſtrolabij perſpicuum eſt: cum multa ibi demonſtrari poſſint per hoc Theorema, ſine ijs, quæ ex Aſtrolabij deſcriptione pendeat.

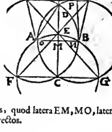
THEOR. 11. PROPOS. 29.

DESCRIPTIONEM Pentagoni æquilateri, & æquianguli ſupra datam rectam ab Alberto Durero traditam, & quam omnes fere Architecti, atque artifices approbant, falſam eſſe, demonſtrare.

PRAXIS hæc eſt. Sit data recta AB. Ex centris A, B, & interuallo eodem AB deſcribantur duo circuli ſeſe interſecantes in C, D. Ducta autem CD, quantacunque, deſcribatur eodem interuallo AB, ex C, per A, B, circulus rectam C D, in E, & priores circulos ſecans in F, G. Item ducantur ex F, G, per E, rectæ ſecantes priores circulos in H, I. Denique eodem interuallo ex H, I, duo arcus deſcripti ſeſe interſecent in K, iunganturque rectæ AI, IK, KH, HB. Putat ergo Durerus, pentagonum ABHKI, eſſe æquilaterum, & æquiangulum. quod falſum eſt. Nam æquilaterum quidem eſt, ex deſcriptione, non autem æquiangulum. quod vt manifeſtum fiat, demonſtranda ſunt prius nonnulla.

1. ARCVS tres FA, AB, BG, ſextæ partes circuli ſunt, quod rectæ eos ſubtendentes ſemidiametri ſint circuli FABG, ex conſtructione. Igitur FABG, ſemicirculus eſt, cuius diameter FG; [a] ideoq; angulus FEG, in ſemicirculo rectus: [b] Et diameter FG, rectæ AB, parallela, ob arcus AF, BG, æquales. Et quoniam, vt conſtat ex demonſtratione praxis ſcholij propoſ. 10. & 11. lib. 1. Euclid. recta CD, ſecat rectam AB, bifariam in M, & ad angulos rectos; [c] ſecabit eadem parallelam quoque FG, ad angulos rectos in C. [d] Eadem quoque CD, ſecabit arcum AB, bifariam in E, ac propterea toti arcus EF, EG, æquales erunt, videlicet quadrantes; [e] ideoque rectæ EF, EG, latera ſunt quadrati in circulo FABG, deſcripti, eiuſque diameter FG. [f] Igitur anguli F, G, ſemirecti erunt: ac proinde cum anguli ad C, recti ſint, [g] erunt quoque OEM, NEM, ſemirecti; ideoque & EOM, ENM, ſemirecti. [h] Ac proinde tam latera EM, MO, quam EM, MN, æqualia: atque idcirco & O M, N M, inter ſe æqualia erunt; nec non & totæ O B, N A, æquales erunt. [i] Immo & E O, E N, erunt æquales, quod latera E M, M O, lateribus E M, M N, æqualia ſint, comprehendantque angulos æquales, vtpote rectos.

a 31. tertij. b ſchol. 27 tertij. c 29. pri. d ſchol. 27 tertij. e 6. quar. f ſchol. 34. primi. g 32. pri. h 6. pri. i 4. primi.



2. DEIN-

2 DEINDE quia latera AN,AI,lateribus BO,BH,æqualia ſunt;ſuntq; anguli N,O,ſemirecti ęquales, & vterque reliquorum angulorum I,H,minor recto; [k] quod vterq; minor ſit ſemirecto ad O,& N;propterea quod tam latus AN,minus eſt latere AI, quam latus BO,latere BH: erunt per ea, quæ ad finem lib. 1. Euclid. demonſtrauimus, tam baſes NI,OH,quam anguli A, B,& I,H,æquales. Igitur duo anguli AB, in pentagono æquales inter ſe ſunt.

k 19 prim.

3 RVRSVS demptis OE,NE,æqualibus ex æqualibus OH,NI,reliquæ rectæ EH, EI, æquales ſunt: [l] erunt anguli EIH,EHI,æquales,ac proinde ſemirecti,cum HEI,ſit rectus: [m] Sunt autem & anguli H,I,in Iſoſcele KIH,æquales.Igitur toti anguli H,I,in pentagono æquales ſunt.

l 5. prim. m 5. prim.

4 POSTREMO cum latera EL,EI,lateribus EL,EH,ſint æqualia,contineantq; angulos æquales ſemirectos;[n] erunt & baſes LI,LH,æquales,& anguli ad L,ideoque recti. Ex quo efficitur,[o] rectas AB,HI,eſſe parallelas:[p] quod etiam conſtat ex eo,quod alterni anguli INA,NIH,ęquales ſint;nimirum ſemirecti. Hinc etiam ſequitur,rectam CDL,productam cadere in angulũ K,diuidereq; eum bifariam. Si enim dicatur non cadere in K,[q] diuidet perpendicularis ex K,ad HI,demiſſa baſem Iſoſcelis KIH,bifariam in alio puncto quã in L,quod eſt abſurdum Quia ergo latera KI,KL,lateribus KH,KL,æqualia ſunt,& baſis IL,baſi HL, oſtenſa æqualis: [r] erunt anguli ad K,æquales.

n 4. prim. o 28 pri. p 27 pri. q ſchol. 26. primi. r 8. primi.

HIS ita præmiſſis,demonſtrabimus iam pentagonum ABHKI,non eſſe æquiangulum, hoc modo.[s] Omnes 5. anguli in pentagono quolibet,ſiue ſit ęquilaterum,& ęquiangulum,ſiue non æquales ſunt 6. rectis.hoc eſt,gr.540.quibus diuiſis per 5.efficitur vnus angulus pentagoni æquilateri,& æquianguli grad.108 At vterlibet duorum angulorum A,B,in pentagono Dureri maior eſt, quam grad.108 & vterlibet duorum H, I,minor, & angul[9] K,maior quolibet reliquorum 4.vt oſtendemus.Igitur pentagonum Dureri non eſt æquiangulum.Hoc autem ita fiet perſpicuum.

s ſchol 32. primi.

QVONIAM poſito ſinu toto AB,10000000.eius ſemiſſis BM,ſinus videlicet grad. 30. eſt 5000000. cui ſi addatur MO,id eſt,ME,ſinus verſus grad.30.nimirum 1339746.fiet tota BO,6339746.Quia ergo in triangulo BHO,duo latera dantur BH 10000000.& BO,6339746.vna cum angulo O.grad.45.nec non cum ſpecie anguli H,qui ſupra oſtenſus fuit recto minor:[t] Si fiat,

t 1. triang. rectil.

Vt latus BH, 10000000.	*ad 7071068. ſinum anguli O,grad. 45.*	*Ita latus BO, 6339746.*	*ad aliud,*

inuenietur ſinus anguli BHO.4482877½.ferme, qui in tabula ſinuum offeret ipſum angulum grad.26.min.38. cui ſi addatur angulus BOH.grad.45.fiet ſumma angulorum H.O,grad.71.min.38.quę ſumma dempta ex duobus rectis,id eſt,ex grad.180.relinquet angulum OBH grad.108 min.22. Igitur vterque angulus A,B,in pentagono maior eſt vero angulo pentagoni grad.108.

DEINDE ducta BP,ad HI, perpendiculari, ſi iterum ſtatuatur BH, ſinus totus 10000000. erit HP, 3150970.anguli HBP,grad.18.min.22.qui relinquitur,ſi rectus angulus ABP,grad.90. detrahatur ex angulo ABH,inuento grad.108. min.22.Si igitur addatur PL,5000000.[u] cum ſit æqualis ipſi BM,ſemiſſi ſinus totius,fiet tota HL, ſinus anguli HKL,8150970. Ac propterea angulus ipſe erit grad.54.min.36. qui duplicatus dabit totum angulum HKI, grad.109. min.12. maiorem vero angulo pentagoni grad.108.

u 34. prim

Angulus	A	Grad.	108.	min.	22
	B	Grad.	108	min.	22
	H	Grad.	107	min.	2
	I	Grad.	107	min.	2
	K	Grad.	109	min.	12
Summa			540	min.	0

IAM vero ſi ſumma trium angulorum A,B,K,inuentorum,nimirum gr. 325.min.56. auferatur ex grad.540.ſumma omnium 5. angulorum pentagoni, reliqua fiet ſumma angulorum H,I, gra. 214.min.4.Ac proinde vterquer erit grad.107.min.2.minor vero angulo pentagoni grad.108. Non ergo æquiangulum eſt Dureri pentagonum,ſed ſolum æquilaterum. Omnes tamen 5. anguli conficiunt ſummam grad. 540.ſicut in pentagono æquilatero,atque æquiangulo, vt hæc formula indicat.

SCHOLIVM.

SVNT alij nonnulli,qui ad interuallum cuiuſuis rectæ AB, deſcriptis ex centris A, B,duobus circulis ſe interſecantibus in C,D,vt in ſuperiori figura,ducunt rectam AD,affirmantq; AD, latus eſſe pentagoni in circulo,cuius ſemidiameter DM,inſcripti,ſed toto cœlo aberrant. Eſt enim AD, minus latere pentagoni circuli prædicti.[a] Nam quia latus pentagoni poteſt & latus hexagoni,& latus decagoni circuli eiuſdem: [b] Poteſt autem AD,rectas DM, MA; [c] & DM,latus eſt hexagoni in circulo, cuius ſemidiameter DM,eſſet AM,latus decagoni in eodem circulo.quod falſum eſt. Quoniam enim latus decagoni mai[9] eſt ſemiſſe lateris pentagoni,quod duo latera decagoni ſupra latus Pentagoni conſtituant Iſoſceles,[d] in quo duo latera maiora ſunt latere pentagoni:Erit AM, ſemiſſis ipſius AB, vel AD, minor latere decagoni. Igitur AD, minor eſt latere peotagoni;[e] quando, quidem latus pentagoni poteſt & latus hexagoni DM, & latus decagoni,quod maius eſt, quam AM, ſemiſſis ipſius AD,vt diximus.

a 10. tertij-decimi. b 47. primi. c coroll. 15. quarti. d 20. prim. e 10. tertij-decimi.

THEOR. 12. *PROPOS.* 30.

INVENTIONEM lateris heptagoni in dato circulo non rectè à quibuſdam tradi, demonſtrare.

CAROLVS Marianus Cremonenſis totum vnum libellum edidit de inuentione lateris heptagoni in circulo dato, in quo probare conatur, latus heptagoni reperiri hac ratione. Sit circulus ABC, cuius centrum D, diameter CA, in qua producta capiatur AE æqualis quartæ parti ſemidiametri AD, ita vt AE, quinta pars ſit rectæ DE. Deſcripto autem ex E, ad interuallum ſemidiametri AD, circulo ſecante datum circulum in B, iungatur recta AB, quam dicit eſſe latus heptagoni, quod falſum eſſe, ita oſtendemus. Si AB, eſſet verum latus heptagoni, & ducta BE, æquali ſemidiametro DB, (quod fiet, ſi ex B, ad interuallum ſemidiametri recta DE, ſecetur in E,) ſecante arcum AB, in F, diuideretur arcus AB, in F, vel angulus ADB, biſariam, quod tamen in eius deſcriptione non contingit, vt demonſtrabitur. Non ergo eius linea AB, verum latus eſt heptagoni. Ductis enim rectis DB, DF, ſi AB, eſt ſeptima pars circumferentiæ, continebit tam angulus ADB, quam DEB, ([a] qui ęquales ſunt) $\frac{2}{7}$. vel $\frac{4}{14}$. duorum rectorum. [b] Ergo reliqui DAB, DBA, ſimul continebunt $\frac{5}{7}$. vel $\frac{10}{14}$. duorum rectorum. Ac proinde vterq; ipſorum continebit $\frac{5}{14}$. duorum rectorum. [c] Cum ergo DAB, æqualis ſit duobus E, & ABE, continebunt etiam hi ſimul $\frac{5}{14}$. duorum rectorum. Continet autem E, ſolus $\frac{4}{14}$. duorum rectorum. Igitur ABE, continebit $\frac{1}{14}$. duorum rectorum. [d] Et quia ADF, duplus eſt ipſius ABE, propter eandem baſem AF, continebit angulus ADF, $\frac{2}{14}$. id eſt, $\frac{1}{7}$. duorum rectorum. Cum ergo totus ADB, complectatur $\frac{2}{7}$. vt dictum eſt, continebit quoque BDF, $\frac{1}{7}$, duorum rectorum; ideoque æquales erunt ADF, BDF.



a 5. primi.
b 32. prim.
c 32. prim.
d 20. tertij.

SED iam AB, ſit inuenta per conſtructionem prædicti auctoris; eritque EB, æqualis ipſi DB. Si ergo AB, eſſet verum latus heptagoni, caderet DI, perpendicularis, diuidens nimirum angulum ADB, biſariam, in F, quod verum non eſt. Poſita enim BE, 4. erit tota CE, 9. & DE, 5. [e] Cum ergo ſit, vt BD, ad DE, ita BF, ad FE; (quod angulus ADB, ſectus ſit biſariam) erit componendo, ſumma ex BD, DE, nimirum 9. ad DE, 5. vt BE, ad FE. Si igitur fiat, vt 9. ad 5. ita BE, 4. ad aliud, inuenietur FE, 2$\frac{2}{9}$. ac propterea rectangulum ſub BE, 4. & EF, 2$\frac{2}{9}$. erit 8$\frac{8}{9}$. & rectangulum ſub CE, 9. & EA, 1. erit 9. quod eſt abſurdum; [f] cum hæc rectangula ſint æqualia. Non ergo recta DI, cadit in punctum F, interſectionis rectæ BE, cum arcu AB, quandoquidem rectangulum ſub BE, EF, æquale non eſt rectangulo ſub CE, EA, ſed minus: Ac proinde non rectè illa ratione latus heptagoni inuenitur.

e 3. ſexti.
f 1. corol 36. tertij.

ALBERTVS Durerus ad KL, latus trianguli æquilateri (ſumptis videlicet arcubus AK, AL, quorum vterque ſextam partem circumferentiæ contineat) perpendicularem ducit AH, dicitque KH, ſemiſſem illius lateris eſſe latus heptagoni. quod ſimiliter falſum eſt. Nam KH, omnino æqualis eſt rectę AB, quam proxime demonſtrauimus non eſſe latus heptagoni. Si enim iungeretur recta AK, fieret triangulum æquilaterum AKD. [g] Igitur perpendicularis KH, diuidet AD, biſariam: Ac proinde poſita DK, vel DA. 4. erit DH. 2. Quocirca ſi detrahemus 4. quadratum DH, ex 16. quadrato DK, [h] reliquum erit quadratum KH, 12. At tantum etiam deprehendemus eſſe quadratum AB. Quoniam enim quadratum BE, eſt 16. hoc eſt, $\frac{64}{4}$. & quadratum EG, $\frac{25}{4}$. (Nam perpendicularis BG, ſecat in Iſoſcele EBD, baſem ED, biſariã. Cum ergo ED, ſit 5. erit DG, 2$\frac{1}{2}$. cuius quadratum eſt $\frac{25}{4}$.) [i] erit quadratum BG, $\frac{39}{4}$. Sed quadratum AG, eſt $\frac{9}{4}$. quod recta AG, ſit 1$\frac{1}{2}$. [k] Igitur quadratum AB; erit $\frac{48}{4}$. id eſt, 12. quod eſt propoſitum.

g ſchol. 26. primi.
h 47. pri.
i 47. prim.
k 47. prim

FRANCISCVS Fluſſas Candalla vir nobiliſſimus, ac doctiſſimus conatus eſt conſtruere triangulum Iſoſceles habens vtrumuis angulorum æqualium ad baſem triplum reliqui anguli, vt beneficio ipſi[o] in dato circulo heptagonum inſcribatur, vt in ſcholio propoſ. 16. lib. 4. Euclid. tradidimus. Ita ergo ſcribit. Sit triangulum æquilaterũ DMN, in quo perpendicularis DO, ad baſem ſecetur biſariam in P. Deſcripto deinde ex M. per N, D, circulo, quem ſecet perpendicularis PQ, in Q. iungãtur rectæ QN, MQ. Dicit igitur, in Iſoſcele MNQ, vtrũlibet angulorum N, Q, triplum eſſe anguli M. quod falſum eſſe, hinc intelligi poteſt. Demiſſa perpẽdiculari QR, pro ſinũ arcus QN, vel anguli M, poſito ſinu toto MQ, vel MN, 10000000. [l] Quoniam latus DN, potentia ſeſquitertium eſt perpendicularis DO, ſi fiat vt 4. ad 3. ita 100000000000000. quadratum lateris DN, ad aliud reperietur quadratum DO, 75000000000000. [m] quod cum ſit quadruplum quadrati PO, vel QR, erit quadratum QR, 18750000000000. ipſumque latus QR, erit 4330127. vero minus, vel 4330128. vero maius, cui in tabula ſinuum (adhibita parte proportionali) reſpondent grad. 25 min. 39. ſec. 32 pro arcu QN, vel angulo NMQ. quo ablato ex duobus rectis, ſiue ex grad. 180. reliqua erit ſumma angulorum æqualium ad baſem QN, grad. 154. min. 20. ſec. 28. atque idcirco vterque complectetur grad. 77. min. 10. ſec. 14. qui maior eſt, quam triplus anguli NMQ. grad. 25. min. 39. ſec. 32. cum hic angulus triplicatus efficiat tantummodo grad. 76. min. 58. ſec. 36. Falſum ergo eſt, quod Candalla nititur probare. Paralogiſmos tum Caroli Mariani, tum Candallæ, quos committunt, non eſt huius loci manifeſtare: ſatis nobis eſt, indicaſſe eos non rectè deſcripſiſſe heptagonum æquilaterum, & æquiangulum.

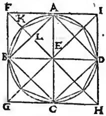
l 12. quarti decimi.
m ſchol 4. ſecundi.

THEOR. 13. PROPOS. 31.

OCTOGONVM æquilaterum & æquiangulum circulo inſcriptum medio loco proportio-

portionale eſt inter quadratum eidem circulo circumſcriptum, & quadratum inſcriptum.

HOC Theorema eſt Orontij, quod facile ita demooſtrabitur. Sit circulus ABCD, cuius centrum E; duę diametri AC, BD, ſecantes ſeſe in E, ad angulos rectos. Iunctis ergo rectis AB, BC, CD, DA, erit quadratum circulo inſcriptum ABCD, vt ex demonſtratione propoſ. 6 lib. 4. Euclid. conſtat. Ducatur quoque per A, B, C, D, perpendiculares ad diametros coeuntes in F, G, H, I, eritque quadratum circulo circumſcriptum FGHI, vt patet ex demonſtratione propoſ. 7. lib. 4. Euclid. Ductis autem diametris FH, GI, [a] ſecabuntur quadrantes AB, BC, CD, DA, bifariam; propterea quod anguli in centro ſunt omnes æquales, [b] nimirum ſemirecti: [c] ac proinde & latera quadrati inſcripti diuiſa erunt bifariam, & ad angulos rectos. Et ſi iungantur rectæ, AK, KB, &c. deſcriptum erit octogonum intra circulum. Dico ita eſſe quadratum exterius ad octogonum, vt octogonum ad quadratum interius. Quoniã enim triangula AEF. EAI, æquiangula ſunt, quod rectos habeant angulos, & ſemirectos: [d] Erit EF, ad FA, hoc eſt, ad EK, (eſt nãq; EK, ipſi EA, hoc eſt, ipſi AF, æqualis) vt EA, hoc eſt, vt EK, ad AL; hoc eſt, ad EL, [e] quod AL, EL, ſint æquales, ꝓpter angulos ſemirectos AE, in triangulo AEL. Sunt ergo tres rectæ EF, EK, EL, cõtinue proportionales. Igitur & triangula AEF, AEK, AEL, cõtinue erũt proportionalia: [f] cum baſibus EF, EK, EL, ſint proportionalia; [g] Ac proinde & eorum octupla continue erunt proportionalia, quadratum videlicet FGHI, octogonum AKBCDA, & quadratum ABCD; quippe cum prædicta triangula ſint harum figurarum octauæ partes, vt liquet. Octogonum igitur medio loco proportionale eſt inter quadrata FGHI, ABCD, quod demonſtrandum erat.

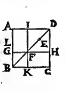


a 17 tertij.
b ſchol. 34. primi.
c ſchol. 27. tertij.
d 4. ſexti.
e 6. primi.
f 1. ſexti.
g 15. quin.

THEOR. 14. PROPOS. 32.

SI ex diametro quadrati detrahatur ipſius latus: Reliqua linea erit latus alterius quadrati, cuius diameter eſt linea, quæ relinquitur, ſi latus inuentum bis ex diametro prioris quadrati auferatur; vel ſi idem latus inuentum ex prioris quadrati latere tollatur.

EX diametro BD, quadrati ABCD, abſcindatur recta BE, lateri AB, æqualis, & ex eadem diametro dematur reliqua DE, bis vſque ad F, ita vt EF, ſit ipſi DE, æqualis: vel (quod idem eſt) reliqua DE, ſiue EF, illi æqualis ex latere AB, hoc eſt, ex BE auferatur. Dico DE, vel EF, latus eſſe quadrati, cuius diameter BF. Ductis enim per F, rectis GH, IK, parallelis ipſis AD, AB, [a] erunt GK, HI, circa diametrũ quadrata. Dico rectam EF, vel DE, ęqualem eſſe lateri BG, quadrati GK, cuius diamerer BF, reliqua fuit poſt detractionem DE, bis ex diametro BD. [b] Quoniam enim quadratum ex DF, duplum eſt quadrati ex IF, ſiue ex AG, [c] & quadruplum quadrati ex EF; ſi quadratum ex DF, ponatur 4. erit quadratum ex AG, 2. & quadratum ex EF, 1. Ac proinde quadratum ex AG, duplum erit quadrati ex EF. [d] Eſt autem & quadratum ex BF, quadrati ex BG, duplum. [e] Igitur erit recta AG, ad rectam EF, ita recta BF, ad rectam BG; quandoquidem quadrata earum proportionalia ſunt, habentia nimirum proportionem duplam. Capiatur BL, ipſi BF, æqualis, ita vt reliqua LA, reliquæ FE, æqualis ſit. Erit igitur quoque AG, ad AL, vt BF, ſiue BL, ad BG; Et diuidendo GL, ad LA, vt GL, ad BG. [f] Quocirca AL, ſiue EF, & BG, æquales ſunt, quod erat oſtendendum.



a coroll. 4. ſecundi.
b ſchol. 47. primi.
c ſchol. 4. ſecundi.
d ſchol. 48 primi.
e 22. ſext.
f 9. quint.

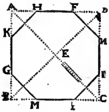
PROBL. 19. PROPOS. 33.

OCTOGONVM æquilaterum, & æquiangulum ad datam altitudinem, latitudinemve conſtituere.

SIT ad altitudinem datam AB, conſtruendum octogonum æquilaterum, & æquiangulum. Deſcripto ex AB, quadrato ABCD, ductiſque diametris AC, BD, ſe in E, ſecantibus bifariam, & ad angulos rectos; abſcindantur ad interuallum EA, ex quatuor angulis quadrati rectæ æquales AF, AG; DH, DI; BK, BL, CM, CN, iunganturque rectæ HK, GM, LI, NF. Dico octogonum FHKGMLIN, eſſe æquilaterum, & æquiangulum. Quoniam enim rectæ AH, AK; BG, BM; CL, CI; DF, DN, relinquuntur poſt detractionem rectæ AE, ex lateribus æqualibus quadrati ABCD, ipſæ inter ſe æquales erunt; ideoque & earum quadrata erunt æqualia. [a] Cum ergo quadratum ex KH, æquale ſit quadratis ex AH, AK; ipſum duplum erit tam quadrati ex AH, quam quadrati ex AK. Quia vero AB, diameter eſt quadrati ex AE, deſcripti, abſciſſaq; eſt recta BK, lateri AE, æqualis; [b] erit reliqua AK,

a 47 prim.
b 32 huius

Digitized by Google



AK, latus quadrati, cuius diameter GK, quæ relinquitur poſt detractionem ipſius AK, bis ex diametro AB, vel ex latere AG, ſemel. c Igitur & quadratum ex GK, duplum erit quadrati ex KA: ac proinde quadrata ex KH, KG, æqualia inter ſe erunt; ideoque & rectæ KH; KG, æquales erunt. Eadem ratione oſtẽdemus, eandem GK, æqualem eſſe rectæ GM; & GM, æqualem rectæ ML; & ſic de cæteris. Æquilaterum ergo eſt octogonum. d Quoniam autem bini anguli ad H, K, G, M, L, I, N, F, æquales ſunt duobus rectis; e ſuntque anguli acuti verſus angulos quadrati omnes inter ſe æquales: f immo ſemirecti, quod KH, GM, &c. ſint diametri quadratorum ex lateribus AH, GB, &c. deſcriptorum: Erunt reliqui anguli obtuſi in octogono æquales; ideoq; octogonum æquiangulum etiam eſt, quod eſt propoſitum.

c ſchol 47. primi.

d 33. prim.
e 4. prim.
f ſchol. 34. primi.

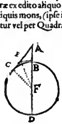
S C H O L I V M.

HÆC praxis, quã ante aliquot annos à quodam architecto ſine demonſtratione tamen accepi, pulcherrima eſt: quippe quæ non requirat diuiſionem circuli in octo partes æquales, & deſcribat octogonum ad datam altitudinem, latitudinemuè, vt patet. Quam praxem vt demonſtrarem, oportuit prius demonſtrare præcedens theorema. Ex eo enim facile problema propoſitum conficitur, vt patuit.

PROBL. 20. PROPOS. 34.

AMBITVM terræ ex edito aliquo monte metiri.

CIRCA finem cap. 1. ſphæræ Ioan. de Sacro boſco propoſui rationem, qua Franciſcus Maurolycus ambitum terræ ex edito aliquo monte iouestigare docuit, quæ talis eſt. Sit circulus terræ BCD, in quo eligatur editiſſimus aliquis mons, (ipſe in Sicilia montem Ætnam ad hoc negotium cenſuit eligendum) cuius altitudo AB, inquiratur vel per Quadrantem, vt lib. 2. problem. 2. 3. & 4. docuimus, vel per Quadratum Geometricum, vt lib. 3. problem. 6. 7. 8. & 9. Vel potius vt in ſcholio problem. 7. ac 9 tradidimus. Deinde ex A, vertice montis menſuretur totum illud ſpacium pelagi, ſeu terræ, (vbi tamen montes non ſint) quod inde conſpicitur, ita vt radius AC, maris vel terræ ſuperficiem contingat in C. Hoc autem fiet per ea, quæ in problematibus citatis tradita ſunt. Ex his poſtea explorat magnitudinem lineæ tangentis AC; a propterea quod eius quadrato æqualia ſunt quadrata AB BC, (ſumpto ſpacio BC, pro linea recta) b cuius quadratum æquale eſt rectangulo ſub AD, AB, quo diuiſo per AB, altitudinem montis, prodibit in Quotiente recta AD; ex qua ſi dematur altitudo montis AB, nota relinquetur diameter terræ BD. c Ac proinde circumferentia BCD, cognita fiet.



a 47. prim.
b 36. tertij.

c corol. 2. de Dimẽſ. circuli lib. 4. huius.

SED quia in hac ratione metiendi ambitus terreſtris aſſumitur, arcum BC, à linea recta non differre. quod verum non eſt, quando mons tam altus eſt, vt ſpacium 200. vel 300. milliariorum cerni poſſit, quod tunc arcus BC, iuxta ambitum à Ptolemæo poſitum contineat grad. 3. min. 11. vel grad. 4. min. 48. Ac proinde non recte linea tangens AC ex lateribus AB, BC, colligitur. Adde quod per problemata lib. 2. & 3. citata inuenitur perpendicularis BE, in plano, ad quod mons eſt ad angulos rectos. Redigemus rationem hanc ad meliorẽ formam multis vijs, hoc modo. Deprehenſo angulo A, per Quadrantem, vel Quadratum, quando radi[illegible] viſualis per dioptram circulum terræ tangit. Quod tum denique certiſſime fiet, cum per dioptram conſpicitur Sol, aut alia ſtella, quando oritur, vel occidit. Deprehenſo, inquam, angulo A, inuenienda erit perpendicularis BE, per problemata paulo ante citata d Et recta AE, ex duabus AB BE. Si enim ad AE, adijcietur BE, hoc eſt, EC, e quæ ipſi BE, æqualis eſt, nota fiet tota tangens AC, ex qua, vt ſupra dictum eſt, & diameter terræ BD, & circumferentia inueſtigabitur. Quin etiam cognito angulo A, ac proinde & eius complemento E, f reperietur tam latus BE, quam baſis AE, ſine problematibus ex lib. 2. & 3. citatis &c.

d 47. prim.
e 2. coroll. 36. tertij
f 4. triang. rectil.

VEL ſic agemus. Cognito per dioptram angulo A, cognitus etiam erit (ducta recta FC, g quæ ad AC, perpendicularis erit) angulus F, eius complementum in centro. Quia vero ducta recta FE, duo latera EC, CF, duobus lateribus EB, BF, æqualia ſunt, comprehenduntq; angulos æquales, nempe rectos: h erunt anguli ad F, æquales. Cum ergo totus angulus BFC, cognitus ſit, vt proxime diximus; cognitus etiam erit BFE, tanquam ſemiſſis ipſius: ac proinde & eius complementum BEF, notum erit. Igitur in triangulo ABE, ex angulis A, E, & latere AB, k reperietur BE, in partibus altitudinis montis AB, notæ. Atq; eodem modo in triangulo BEF, ex angulis E, F, & latere BE, cognoſcetur ſemidiameter BF, in partibus lateris BE, hoc eſt, in partibus altitudinis montis AB; ideoq; & tota diameter BD, nota fiet, & ex hac ambitus terræ. quod eſt propoſitum.

g 5. triang. rectil.
h 18. tertij.
i 4. prim.

k 4. triãg. rectil.

DENIQVE hoc etiam modo idẽ aſſequemur. Cognito per dioptram angulo A, quando radius viſualis terram contingit, cognitus etiam erit angulus AFC, eius complementũ. Ergò huius anguli ſecans AF, cognita erit in partibus ſinus totius FC. Ex qua ſecante, ſi dematur ſinus totus BF, nota relinquetur altitudo montis AB, in partibus ſinus totius BF. Si igitur fiat vt altitudo montis AB, nota in partib' ſinus toti' ad eandẽ AB, notam in data menſura, ita ſinus totus BF, ad aliud; proueniet ſemidiameter BF, nota in partib' altitudinis mõtis, &c.

PROBLE-

PROBL. 21. PROPOS. 35.

PRISMATI cuicunque Cylindrum æqualem, & Pyramidi Conum æqualem: Ac viciſsim Cylindro Priſma æquale, & Cono æqualem Pyramidem conſtituere.

SI baſi priſmatis, vel pyramidis conſtruatur circulus æqualis, per ea quæ ad finem lib. 7. ſcripſimus: Et ſuper hunc circulum extruatur cylindrus vel conus eiuſdem altitudinis cum priſmate, vel pyramide; erit cylindrus priſmati, & conus pyramidi æqualis. Cum enim tam baſes, quam altitudines æquales ſint: producatur autem priſma, & Cylindrus ex baſe in altitudinem multiplicata, & pyramis, atque conus ex tertia parte baſis in altitudinem multiplicata, vt lib. 5. cap. 1. declarauimus; manifeſtum eſt, cylindrum priſmati, & conum pyramidi eſſe æqualem.

SI viciſſim baſi cylindri, vel coni conſtituatur quadratum, aut alia quæuis rectilinea figura æqualis, per ea, quæ ad finem lib. 7. diximus, & ſuper hoc quadratum, aut figuram rectilineam fiat priſma, vel pyramis eiuſdem altitudinis cum cylindro, vel cono, erit priſma cylindro, & pyramis cono æqualis, quod eſt propoſitum.

PROBL. 22. PROPOS. 36.

DATO Cylindro, aut priſmati æqualem conum, vel pyramidem ſub eadem altitudine. Et viciſsim dato cono vel pyramidi æqualem cylindrum, aut priſma eiuſdem altitudinis conſtituere.

[a] SI tam baſis cylindri, quam priſmatis tripletur, & ſuper triplicatam extruatur conus, vel pyramis eiuſdem altitudinis, factum erit, quod in prima parte proponitur. [b] Cum enim cylindrus triplus ſit coni eandem cum illo baſem & altitudinem habentis: [c] Item priſma triplum pyramidis eandem cum illo baſem, atque altitudinem habentis: [d] Sit autem & conus extructus eiuſdem illius coni triplus; nec non & pyramis conſtructa eiuſdem illius pyramidis tripla. [e] Erit tam conus extructus cylindro æqualis, quam pyramis conſtructa priſmati, quod eſt propoſitum.

a 16. ſexti. huius. b 10. duodecimi. c coroll. 7. duodec. d 11. & 6. duodec.

[f] SI viciſſim baſes coni, & pyramidis in tripla proportione minuantur, & ſuper tertias has partes cylindrus erigatur, & priſma: Erit tam cylindrus dato cono, quam priſma datæ pyramidi æquale. [g] Quoniam n. tam conus datus, quam cylindrus extructus, triplus eſt coni eandem baſem, altitudinemque habentis cum cylindro extructo. [h] Item tam data pyramis, quam priſma extructum, triplum eſt pyramidis eandem habentis baſem, atque altitudinem cum priſmate extructo. [i] Erit tam cylindrus extructus dato cono æqualis, quam priſma conſtructum datæ pyramidis æquale, quod eſt propoſitum.

e 9. quint. f 16. ſexti huius. g 11. & 10. duodec. h 6. & 7. duodec. i 9. quint.

COROLLARIVM I.

QVIA igitur [a] omne priſma in cylindrum, & pyramis in conum conuertitur: Et contra cylindrus in priſma, & conus in pyramidem: [b] Item cylindrus in conum, & priſma in pyramidem: Et contra conus in cylindrum, & pyramis in priſma conuerti poteſt; fit vt indifferenter tam cylindrus, quam priſma transmutari poſſit in pyramidem, aut conum, ac pyramis in cylindrum, aut priſma æquale.

a 35. huius b 36. huius

COROLLARIVM II.

Ex his etiam manifeſte colligitur, omnem cylindrum, ac priſma; ſimiliter & conum, ac pyramidem conuerti poſſe in parallelepipedum rectangulum, cuius baſis ſit quadrata. [a] Nam conuerſo cylindro, aut cono, vel pyramide in priſma qualecunque, ſi baſi priſmatis fiat quadratum æquale, & ſupra illud erigatur parallelepipedum eiuſdem altitudinis; [b] erit hoc parallelepipedum priori æquale, ac proinde & propoſito cylindro, vel cono, aut pyramidi.

a 35. & 36. huius. b 2. corol 7. duod.

PROBL. 23. PROPOS. 37.

DATVM cylindrum, vel priſma: Similiter datum conum, vel pyramidem cuiuſcunque altitudinis, in æqualem ſub data qualibet alia altitudine, & ſupra baſem quotcunque angulorum, reuocare.

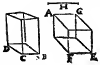
IN proportione, quam data altitudo ad altitudinem propoſiti ſolidi habet, [a] augeatur vel minuatur baſis eiuſdem ſolidi dati. Nam ſolidum ſupra hanc baſem auctam, vel diminutam ſecundum datam altitudinem conſtructum, erit id, quod quæritur. [b] Erit enim æquale dato ſolido: quippe cum altitudines cum baſibus reciprocæ ſint. Quod ſi baſi conſtructi ſolidi fiat æqualis baſis quotcunque angulorum & ſupra eam conſtituatur ſolidum ſub data altitudine; erit hoc etiam ſolidum ſolido propoſito æquale.

a 16. ſexti. huius. b 15. & 9. duodec.

PROBL. 24. PROPOS. 38.

DATO parallelepipedo rectangulo cubum æqualem deſcribere.

SI pa-



a 14. ſecun. SI parallelepipedum non habet baſem quadratam,[a] fiat eius baſi quadratum æquale BCD, ſupra quod erigatur parallelepipedum rectangulum eiuſdem altitudinis A. B, cum parallelepipedo dato, [b] quod æquale erit dato parallelepipedo. Huic ergo cubum æqualem conſtruemus hac arte. Inter BC, latus quadrati BD, & AB, altitudinem parallelepipedi, inueniantur duæ mediæ proportionales EF, H: ita vt ſit BC, ad EF, quemadmodum EF, ad H, & H, ad AB. Et ſuper EF, propinquiorem lateri BC, conſtruatur cubus EFG, [c] qui parallelepipedo ABCD æqualis erit.

b 2. corol. 7. duod.

c lemma 18 ſexti huius. Quod ſi forte accidat, tres dimenſiones parallelepipedi dati, cuius baſis quadrata non ſit, eſſe continue proportionales; [d] erit cubus ex media deſcriptus parallelepipedo æqualis.

d 36. vnd.

COROLLARIVM.

a 2. coroll. 36. huius. [a] CVM igitur omnis cylindrus, omne priſma, conus, ac pyramis in rectangulum parallelepipedum poſſit commutari, liquido conſtat, cuilibet ſolido eiuſmodi, cubum poſſe conſtrui æqualem.

PROBL. 25. PROPOS. 39.

DATO cubo æquale parallelepipedum rectangulum ſub data altitudine, vel ſupra datam baſem conſtruere.

SIT in præcedenti figura datus cubus EFG, & primum data altitudo AB, ſub qua conſtruendum ſit parallelepipedum rectangulum cubo æquale.[a] Altitudini AB, & lateri cubi EF, reperiatur tertia proportionalis BC. Et fiat rectangulum BD, comprehenſum ſub tertia proportionali BC, & recta CD, lateri cubi EF, æquali; erigaturque ſupra BD, parallelepipedum rectangulum ſub data altitudine AB. quod dico cubo eſſe æquale. Quoniam enim parallelepipedum rectangulum ABD, continetur ſub tribus rectis AB, CD, BC, hoc eſt, ſub AB, EF, BC, continue proportionalibus; [b] erit parallelepipedum æquale cubo ex media EF, deſcripto. quod eſt propoſitum.

a 11. ſexti. *b 36. vnd.*

SIT deinde data baſis BD, quæ ſi non eſt parallelogrammũ, [c] reuocetur ad parallelogrammum æquale. Et quam proportionẽ habet baſis data BD, ad baſem cubi dati, eam habeat latus cubi EF, ad rectam AB. (quod fiet, ſi ſupra latus cubi EF, fiat rectangulũ ęquale baſi BD, & ſuper alterum latus huius rectanguli aliud rectangulum ęquale quadrato lateris cubi EF, [d] Nam tunc erit, vt primum rectangulum, id eſt, baſis BD, ad ſecundum rectangulum, id eſt, ad quadratum; vel baſem cubi. ita primi rectanguli baſis, videlicet EF, ad baſem ſecundi rectãguli.) Nam ſi ſupra baſem BD, erigatur parallelepipedum in altitudine inuenta AB, [e] erunt parallelepipedum, & cubus æqualia: quippe cum baſes, & altitudines ſint reciprocæ, ex conſtructione, quod eſt propoſitum.

c 45. prim. *d 1. ſexti.* *e 34. vnde.*

COROLLARIVM.

a corol. 38. huius. *b 38 huius* *c 39. huius* [a] QVONIAM igitur cuilibet cylindro, priſmati, cono, ac pyramidi parallelepipedum rectangulũ cõſtrui poteſt ęquale: [b] ſi huic parallelepipedo fiat cubus ęqualis; [b] & huic cubo parallelepipedum rectangulum ſub data altitudine, vel baſe data æquale: commutatus erit cylindrus, priſma, conus, ac pyramis in parallelepipedum rectangulum æquale datæ altitudinis, vel baſis.

PROBL. 26. PROPOS. 40.

SPHÆRÆ datæ cubum æqualem: Et dato cubo æqualem ſphæram conſtituere.

QVONIAM per propoſ. 32. lib. 1. Archimedis de ſphæra, & cylindro. Cylindrus rectus cuius baſis eſt maximus ſphæræ circulus, & altitudo diametro eiuſdem ſphæræ æqualis, ſeſquialteram habet proportionem ad ſphæram:[a] Habet autẽ idem cylindrus ad cylindrum eiuſdem baſis, cuius altitudo contineat $\frac{2}{3}$. diametri ſphærę, proportionem quoque ſeſquialteram; [b] erit poſterior hic cylindrus ſphæræ æqualis. Si igitur huic cylindro [c] fiat cubus æqualis; erit idem hic cubus datæ ſphæræ æqualis, quod eſt propoſitum.

a 14. vnd. *b 9. quint.* *c corol. 38. huius.*

VEL quia per eandem propoſ. 32. Archimedis, ſphæra quadrupla eſt coni, cuiꝰ baſis eſt maximus ſphæræ circulus, & altitudo ſemidiametro ſphæræ æqualis: [d] Eſt autem eiuſdem coni quadruplus etiam conus eiuſdem altitudinis, baſem habẽs circuli maximi in ſphæra quadruplam, hoc eſt, baſem habens circulum, cuius ſemidiameter æqualis diametro maximi circuli; [e] erit poſterior hic conus ſphæræ æqualis.[f] Si igitur huic cono fiat cubus æqualis, erit hic idem cubus ſphæræ datæ æqualis, quod eſt propoſitum.

d 11. duod. *e 9. quint.* *f corol. 38. huius.*



g 40. huius SIT viciſſim cubo lateris A, conſtruenda ſphęra æqualis:[g] Sphæræ diametri A, fiat æqualis cubus lateris B, atq; duabus rectis B, A, inueniatur tertia proportionalis C. Dico ſphæram diametri C, æqualem eſſe dato cubo lateris A.[h] Nam vt cubus lateris B, ad cubum lateris A; ita eſt cubus lateris A, ad cubum lateris C. Vt autem cubꝰ lateris A, ad cubum lateris C; ita eſt ſphæra diametri A, ad ſphæram diametri C; [i] quod vtraq; proportio triplicata ſit proportionis A, ad C. Igitur erit quoq;, vt cubus lateris B, ad cubũ lateris A, ita ſphæra diametri A, ad ſphæram diametri C, Eſt autem cubus lateris B, per conſtructionem, æqualis ſphærę diametri A. [k] Igitur & cubus lateris A, æqualis eſt ſphærę diametri C, quod eſt propoſitum.

h ſchol. 37 vndec. *i 33 vnd. & 18. duo.* *k 14. quin.*

COROL-

COROLLARIVM. I.

QVIA vero [a] ſi baſi cubi fiat æqualis figura quotcunque laterum, ſiue ea regularis ſit, ſiue non; & ſupra a 25 ſexti.
hanc figuram erigatur ſolidum rectangulum ad altitudinem cubi, [b] ſolidum hoc cubo eſt æquale, ſit vt ſphæræ b 2. coroll.
datæ conſtrui poſſit æquale ſolidum rectangulum ſupra baſem quotlibet angulorum; [c] ſi nimirũ prius conſtrua- 7. duodec.
tur cubus æqualis; deinde huic cubo ſolidum rectangulũ æquale, vt proxime dictum eſt. [d] Item quia cuicunque c 40. huius
priſmati pyramis conſtrui poteſt æqualis; ſi cubo, qui ſphæræ eſt æqualis, tanquam priſmati, fiat pyramis æqualis; d 36. huius
erit quoq; eadem pyramis ſphæræ æqualis [e] Immo quoniam cuilibet cylindro conus fieri poteſt æqualis: ſi cy- e 36. huius
lindrus extruatur ſphæræ æqualis, ſupra baſem videlicet maximo circulo in ſphæra æqualem, & cuius altitudo
contineat $\frac{2}{3}$. diametri, vt ad initium huius propoſ. oſtendimus: Deinde huic cylindro conus æqualis; conſtitutus
erit conus quoque datæ ſphæræ æqualis.

VICISSIM [f] quia cuilibet priſmati conſtrui poteſt cubus æqualis: [g] Si huic cubo fiat æqualis ſphæra, e- f 37. huius
rit eadem hæc ſphæra conſtituta æqualis dato priſmati ſupra baſem quotcunq; angulorum. g 40. huius

COROLLARIVM. II.

QVIN etiam colligitur, poſſe ſphæram conſtrui æqualem cuilibet corpori regulari. Nam de cubo qui-
dem oſtenſum eſt hac propoſ. 40. De Tetraedro vero, ſiue Pyramide regulari patet. Nam ſi Pyramidi [a] fiat Paral- a 2. coroll.
lelepipedum æquale: [b] Et huic parallelepipedo cubus æqualis; Ac tandem huic cubo fabricetur ſphæra æqualis; 36. huius.
erit eadem hæc ſphæra Tetraedro, ſiue pyramidi regulari æqualis. De Octaedro autem, Icoſaedro & Dodecae- b 38. huius
dro ita res peragetur. Si omnibus baſibus corporis regularis fiat quadratum æquale, per ea, quæ ad finem lib. 2.
Eucl. vel potius per ea, quæ lib. 4. huius Geometriæ cap. 4. Num. 4. tradidimus; & ſuper hoc quadratum fiat py-
ramis habens altitudinem æqualem perpendiculari è centro corporis ad quamlibet baſem ductæ, hoc eſt, altitu-
dini vnius pyramidis ex ijs, in quas corpus diuiditur è centro: [c] Erit hæc pyramis corpori regulari æqualis; [d] quip- c 9. quin.
pe cum ita ſe habeat tam pyramis hæc quadrilatera ad vnam pyramidẽ corporis regularis, quam omnes pyrami- d 6. duod.
des corporis regularis ad vnam pyramidẽ, vt baſis illius, vel baſes omnium pyramidũ corporis, ad vnam baſem;
propterea quod in Octaedro proportio eſt vtrobiq, octupla: In Icoſaedro, vigecupla: Et in Dodecaedro, duode-
cupla. Quare ſi toti illi pyramidi cubus conſtruatur æqualis, vt paulo ante de Tetraedro dictum eſt: atque huic
tandem cubo ſphæra æqualis fabricetur; erit eadem ſphæra illi pyramidi, hoc eſt, corpori regulari æqualis.

PROBL. 27. PROPOS. 41.

DVOBVS aut pluribus cubis vnum cubum æqualem efficere.

SI ſupra baſem ſuperiorem primi cubi, [a] conſtruatur parallelepipedum rectangulũ ſecundo cubo æqua- a 39. huius
le, vt fiat vnum parallelepipedum duobus cubis æquale: Et ſupra huius parallelepipedi baſem ſuperiorem aliud
parallelepipedum æquale tertio cubo, & ſic deinceps, ſi plures adſint cubi; conſtructum erit parallelepipedum
propoſitis cubis æquale. Huic ergo [b] ſi fiat cubus æqualis, factum erit, quod proponitur. b 38. huius

SCHOLIVM.

EADEM arte quotlibet figuris ſolidis non cubis, conſtruetur cubus æqualis: [a] ſi nimirum reuocentur a 37. huius
ad vnum parallelepipedum, &c.

PROBL. 28. PROPOS. 42.

DATO cubo, corpus regulare, quod ex quinq; elegeris, æquale conſtruere.

SIT datus cubus, cuius latus A, cui verbi gratia conſtruendum ſit æquale Dodecaedrum. [a] Fiat quotcun- a 17. tertij decimi.
que Dodecaedrum, cuius latus B: cui per ea, quæ in 2. coroll. præcedentis pro-
poſ. dicta ſunt, fiat æqualis cubus, cuius latus C. [b] Et tribus lateribus C, A, B, re- C. A. B. D.
periatur quarta proportionalis D. Dico Dodecaedrum ſupra latus D, conſtru- b 12. ſexti.
ctum, æquale eſſe dato cubo lateris A. Quoniam enim, vt ex demonſtratione propoſ. 37. lib. 11. Euclid. patet, ita
eſt cubus lateris C, ad cubum lateris A, vt Dodecaedrum lateris B, ad Dodecaedrum lateris D: Eſt autem per cõ-
ſtructionem, cubus lateris C, æqualis Dodecaedro lateris B; [c] erit quoque cubus lateris A, Dodecaedro lateris
D, æqualis, quod eſt propoſitum. c 14. quin.

PROBL. 29. PROPOS. 43.

EX maiori cubo detrahere minorem, reſiduoque cubum æqualem exhibere.

SVPRA baſem maioris cubi [a] conſtruatur parallelepipedum cubo minori æquale. Et ex latere cubi ma- a 39 huius
ioris abſcindatur recta æqualis altitudini conſtructi parallelepipedi. Si n. per punctũ abſciſſionis ducatur planũ

baſibus cubi parallelum, detractum erit parallelepipedum parallelepipedo conſtructo æquale, cum habeat eandem baſem & altitudinem cum illo hoc eſt, minori cubo æquale. [a] Si igitur reliquo parallelepipedo fiat cubus æqualis, factum erit, quod proponitur.

a 38. huius

SCHOLIVM.

a 1. & 2. coroll. 36. huius. b 36. huius

IDEM fieri poteſt in alijs figuris ſolidis; [a] ſi prius reducantur ad parallelepipeda rectangula, quando non ſunt parallelepipeda. [b] & deinde parallelepipeda ad cubos, &c.

PROBL. 30. PROPOS. 44.

DATIS duabus, aut pluribus ſphæris, ſphæram vnam æqualem conſtituere.

a 40. huius b 41. huius c 40. huius

SPHÆRIS propoſitis [a] conſtruantur cubi æquales: [b] His deinde vnus cubus æqualis fiat, qui etiam ſphæris datis erit æqualis. [c] Si igitur huic cubo extruatur ſphæra æqualis; factum erit, quod iubetur.

PROBL. 31. PROPOS. 45.

EX maiori ſphæta minorem ſphæram detrahere, reſiduoq; ſphæram æqualem exhibere.

a 40. huius b 43. huius c 40. huius

[a] VTRAQVE ſphæra in cubum reuocetur. [b] Detracto deinde minore ex maiore, [c] ſi reſiduo ſphæra fiat æqualis; factum erit, quod proponitur.

PROBL. 32. PROPOS. 46.

DATVM cubum, aut parallelepipedum, ſecundum proportionem datam ſecare.

a 32. vnde b 1. ſexti.

SI namque vnum latus in baſe cubi, aut parallelepipedi ſecetur ſecundum datam proportionem, & per punctum ſectionis ducatur planum duabus baſibus erecti ſolidi parallelum, diuidẽs ipſum ſolidum in duo parallelepipeda: habebuot hæc parallelepipeda datam proportiooem. [a] Habent enim proportionem inter ſe eandem, quam baſes, [b] Cum ergo baſes habeant eandem proportionem, quam ſegmenta lateris ſecundam datam proportiooem diuiſi; conſtat id, quod propoſitum eſt.

SCHOLIVM.

a ſchol. 14. duodec. b 14. duod.

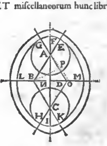
NON aliter priſma quodlibet, aut cylindrus ſecundum datam proportionem ſecabitur, ſi altitudo in datam ſecetur proportionem, & per punctum ſectionis planum ducatur baſibus parallelum. Hoc enim ſecabit [a] tam priſma, [b] quam cylindrum in datam proportionem.

PROBL. 33. PROPOS. 47.

FIGVRAM Ellipſi ſimilem, quam ouatam dicunt, circino deſcribere.

a 15 primi. b ſchol. 13. tertij.

LIBET miſcellaneorum hunc librum peruulgato illo problemate concludere, quo artifices ope circini deſcribere ſolent figuram ouatam Ellipſi ſimilem, ita vt nullibi aoguli appareant: cum oon raro eiuſmodi figura à Geometris in ſuis delineationibus adhibeatur. Docui quidem in lib. 1. noſtræ Gnomonicæ io ſcholio propoſ. 8. qua ratiooe vera Ellipſis, quæ conica ſectio eſt, deſcribenda ſit: Sed hic ſimilem figuram ex ſegmentis circulorum conſtantem deſcribendam propoſuimus. Ita ergo, vt ex varijs ſcriptoribus colligitur, agemus. Conſtruantur duo triangula æquilatera, vel Iſoſcelia ſupra baſem communem AC, in diuerſas partes ABC, ADC. (Æquilatera venuſtiorem faciunt figuram, vt experientia te docebit) productiſque lateribus, deſcribantur ex A, C, duo arcus EFG, HIK, vſque ad latera producta. Si namque ex B, D, per E, K, G, H, alij arcus deſcribantur, [b] tangent hi priores arcus in punctis E, K, G, H: ac proinde illos non ſecabunt, conſtitutaq; erit figura ouata.



BENE autem vides, ex eiſdem centris A, B, C, D, deſcribi poſſe varias figuras, prout arcus EFG, HIK, maiores fuerint, aut minores, vt in figura apparet.

QVOD ſi triangula conſtituta ſint Iſoſcelia, poterunt latera AB, CB, &c. vel maiora fieri baſe AC, vel minora. In figura noſtra ſunt minora.

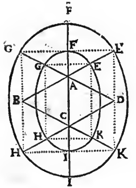
POTES etiam, ſi placet, primo loco ex centris B, D, deſcribere arcus EMK, GLH, ad quodcunque interuallum, pro latitudine figuræ deſcribendæ: deinde ex centris A, C, minores arcus delineare EFG, HIK.

QVIN etiam ſine conſtructione triangulorum idem efficiemus hoc modo. Ductis duabus rectis AC, BD, ad angulos rectos ſe ſecantibus in N; ſumptiſq; æqualibus NA, NC, quantiſcunq; pro longitudine figuræ, deſcribantur ex A, C, arcus circulorum EFG, HIK, parui, aut magni, prout deſideras extremitates figuræ ſecundum longitudinem babere anguſtiores, latioreſue. Deinde acceptis alijs duabus rectis ęqualib' NB, ND, quantiſcunque, (quo autem puncta B, D, remotiora fuerint ab N, eo anguſtior figura euadet: & quo minus remota, eo latior. Sed vſus magiſter optimus facile docebit, quantæ debeant eſſe rectæ NB, ND,) ducantur ex B, D, per centra A, C, rectæ ſecantes priores arcus in E, K, &c. Nam ſi ex B, D, per puncta EK, &c. alij duo arcus deſcribantur, perfecta erit figura Ellipſi ſimilis.

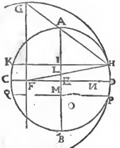
VT autem videas, venuſtiores figuras deſcribi, ſi triangula ABC, ADC; ſint æquilatera, quæ fere ratio ab artificibus ſeruari ſolet, deſcripſimus hic duas figuras. In minori eſt latus BA, rectæ AE, duplum, in maiori vero æquale, &c.

Area figuræ ouatæ hic deſcripta.

IAM vero area figurę ouatę, beneficio trianguli æquilateri deſcriptæ, quam artifices non raro expetűt, facile inuenietur, hoc modo. Sector BEK, eſt ſexta pars circuli, cuius ſemidiameter BE, nota, nimirum latus trianguli ęquilateri BEK, quod eſt in maiori figura duplum lateris AB, aſſumpti ad libitum: in minori vero ſeſquialterum eſt eiuſdem lateris AB. Inuenta ergo area illius circuli, vt lib 4. cap. 7. docuimus, ſi ex eius ſexta parte dematur triangulum æquilaterum BEK, cuius area reperietur per ea, quæ in eodem lib. 4. cap. 2. Num. 5. tradita ſunt: reliquum fiet ſegmentum EK, ac proinde & GH, notű. Item ſector AGE, eſt pars tertia circuli, cuius ſemidiameter AG, nota, nimirum vel æqualis lateri aſſumpto AB, vel ſemiſſis ipſius. Si igitur ex tertia parte areæ illius circuli auferatur area Iſoſcelis AGE, quæ reperietur per ea, quæ lib. 4. cap. 2. Num. 4. ſcripſimus: remanebit ſegmentum GFE, notum, ideoque & ſegmentum HIK. Quocirca ſi quatuor ſegmentis cognitis adijciatur area rectanguli EGHK, cognita erit area totius figuræ. Cognoſcetur autem area huius rectanguli ex doctrina cap. 1. lib. 4. cum latus EK, chorda ſit ſextæ partis circuli, hoc eſt, ſemidiametro æquale: at EF, ſit ſinus grad. 60. id eſt, ſemiſſis chordæ grad. 120.



VERVM quia hac ratione deſcribi nequit figura ad datam longitudinem, latitudinemque; (quoniam ſi longitudo eligatur FI, ignotum erit, quanta ſit futura latitudo: propterea quod arcus ex B, D, deſcripti raro tranſeunt per electa puncta latitudinis: Si vero eligatur latitudo LM, in prima figura, ignorabitur futura longitudo: quippe cum arcus ex A, C, deſcripti raro etiam per electa puncta longitudinis tranſeãt: vt perſpicuum eſt.) docebimus cum Ioan. Baptiſta Benedicto, quo pacto, data tam longitudine, quam latitudine figura Ellipſi ſimilis deſcribenda ſit. Sit ergo data longitudo AB, & latitudo CD, quæ ſe bifariam, & ad rectos angulos ſecent in E. Ex latitudine CD, abſcindatur recta DF, quantacunque vltra E, maior tamen interuallo inter punctum F, & A, extremum longitudinis. Hoc enim niſi fiat, deſcribi non poterit figura ouata. Deinde centro F, & interuallo FD, deſcribatur circulus DG, qui neceſſario vltra punctum A, tranſibit, quippe cum ſemidiameter FD, maior poſita ſit interuallo FA. Ducta autem FG, longitudini AB, parallela ſecante circulum deſcriptum in G; ducatur ex G, per A, recta ſecans eundem circulum in H, puncto, è quo ducatur HIK, latitudini CD, parallela, iungaturque HF, ſecans AB, longitudinem in L; eruntque FG, FH, æquales è centro F, ad circumferentiam. [a] Et quia triangula HGF, HAL, ſimilia ſunt; [b] erit vt GF, ad FH, ita AL, ad LH. Cum ergo GF, ipſi FH, ſit æqualis; erit quoque AL, ipſi LH, æqualis. Circulus ergo AH, ex L, per A. deſcriptus tranſibit per H, [c] ibique priorem circulum DG, tanget. Si igitur capiatur EO, æqualis ipſi EI, & EM. ipſi EL, ducaturque POQ. per O rectæ CD, parallela, atque ex M, centro, interuallo autem LH, vel MP, circulus PBQ, deſcribatur, tanget hic quoque priorem circulum in P. Si denique ſumpta EN, ipſi EF, æquali, deſcribatur ex N, ad interuallum FD, prioris circuli circulus KCQ, tanget hic circulos HAK, PBQ, in K, Q. perfectaque erit figura ouata.



a coroll. 4. ſexti.
b 4. ſexti.
c ſchol. 13. tertij.

SED quia, vt dictum eſt, conſtatq; ex deſcriptione, niſi latitudo CD, tanta ſit, vt ex ea abſcindi poſſit recta DF, maior interuallo FA, figura hac ratione deſcribi nequit: adeo vt longitudo, ac latitudo ad libitum aſſumi non poſſint; inſtituetur operatio alio modo, ſumpta quacunque longitudine AB, & latitudine CD. Secent ſe in prima figura longitudo, latitudoq; FI, LM, datæ mutuo bifariam in N, & ad angulos rectos, & ſumantur rectæ FA, IC, æquales, & minores ſemiſſe latitudinis LN; deſcribanturque ex A, & C, per F, & I, circuli EFG, HIK.

Sumpta deinde MO, ſemidiametro AF, æquali, iungatur OA, ex O, ad centrum A, quam bifariam, & ad angulos rectos in P, ſecet recta PB, ſecans LM, etiam productam, ſi opus eſt, in B. ducaturque BA, vſque ad circulum GFE. Et quoniam duo latera OP, PB, duobus lateribus AP, PB æqualia ſunt, anguloſq; continent rectos, id eſt, æquales:[a] erunt baſes OB, AB, æquales; additiſque æqualibus OM, AE, (ſumpta namq; fuit MO, æqualis ſemidiametro FA, vel IC,) totæ BE, BM, æquales erunt. Deſcriptus ergo circulus ex B, per M, tranſibit per E, [b]ibique circellum GFE tanget. Eodemque modo circellum HIK, tanget Si igitur ſumpta ND, ipſi NB, æquali, deſcribatur ex D, per L, circulus tangens eoſdem priores circellos in G, H, abſoluta erit figura.

a 4. prim.

b ſchol. 13. tertij.

QVO autem ſemidiameter FA, ſumpta fuerit minor, quam MN, eo certius centrũ B, reperietur, vt liquet.

S C H O L I V M.

ROGATV multorum placet Epilogi loco apponere tabulam quadratorum, & cuborum, qui ex numeris ab 1. vſq; ad 1000. producuntur: propterea quod huiuſce tabulæ multiplex, & inſignis eſt vſus cum in alijs rebus Mathematicis, tum vero maxime in radicibus quadratis, & cubicis ex magnis numeris extrahendis, vt poſt tabulam paucis exponam. Non extendi autem tabulam vltra radicem 1000. contentus radicibus tres figuras nõ ſuperantibus: propterea quod ſi extenderetur vſque ad radicem 10000. vt radices haberentur quatuor figurarum, decies maior tabula conficienda eſſet. Si quis tamen eam extendere volet, inueniet ad finem tabulæ regulas, quibus id facile poſſit exequi. Quamuis quadratorum tabulam Doctiſſimus Maginus in ſua tabula Tetragonica vſque ad radicem. 10000. promouerit.

SEQVITVR TABVLA QVADRATORVM, & Cuborum, quorum radices maiores non ſunt, quam 1000.

TABVLA

Tabula Quadratorum, & Cuborum.

Radices	Quadrati.	Cubi	Radices	Quadrati.	Cubi	Radices	Quadrati.	Cubi
1	1	1	61	3721	226981	121	14641	1771561
2	4	8	62	3844	238328	122	14884	1815848
3	9	27	63	3969	250047	123	15129	1860867
4	16	64	64	4096	262144	124	15376	1906624
5	25	125	65	4225	274625	125	15625	1953125
6	36	216	66	4356	287496	126	15876	2000376
7	49	343	67	4489	300763	127	16129	2048383
8	64	512	68	4624	314432	128	16384	2097152
9	81	729	69	4761	328509	129	16641	2146689
10	100	1000	70	4900	343000	130	16900	2197000
11	121	1331	71	5041	357911	131	17161	2248091
12	144	1728	72	5184	373248	132	17424	2299968
13	169	2197	73	5329	389017	133	17689	2352637
14	196	2744	74	5476	405224	134	17956	2406104
15	225	3375	75	5625	421875	135	18225	2460375
16	256	4096	76	5776	438976	136	18496	2515456
17	289	4913	77	5929	456533	137	18769	2571353
18	324	5832	78	6084	474552	138	19044	2628072
19	361	6859	79	6241	493039	139	19321	2685619
20	400	8000	80	6400	512000	140	19600	2744000
21	441	9261	81	6561	531441	141	19881	2803221
22	484	10648	82	6724	551368	142	20164	2863288
23	529	12167	83	6889	571787	143	20449	2924207
24	576	13824	84	7056	592704	144	20736	2985984
25	625	15625	85	7225	614125	145	21025	3048625
26	676	17576	86	7396	636056	146	21316	3112136
27	729	19683	87	7569	658503	147	21609	3176523
28	784	21952	88	7744	681472	148	21904	3241792
29	841	24389	89	7921	704969	149	22201	3307949
30	900	27000	90	8100	729000	150	22500	3375000
31	961	29791	91	8281	753571	151	22801	3442951
32	1024	32768	92	8464	778688	152	23104	3511808
33	1089	35937	93	8649	804357	153	23409	3581577
34	1156	39304	94	8836	830584	154	23716	3652264
35	1225	42875	95	9025	857375	155	24025	3723875
36	1296	46656	96	9216	884736	156	24336	3796416
37	1369	50653	97	9409	912673	157	24649	3869893
38	1444	54872	98	9604	941192	158	24964	3944312
39	1521	59319	99	9801	970299	159	25281	4019679
40	1600	64000	100	10000	1000000	160	25600	4096000
41	1681	68921	101	10201	1030301	161	25921	4173281
42	1764	74088	102	10404	1061208	162	26244	4251528
43	1849	79507	103	10609	1092727	163	26569	4330747
44	1936	85184	104	10816	1124864	164	26896	4410944
45	2025	91125	105	11025	1157625	165	27225	4492125
46	2116	97336	106	11236	1191016	166	27556	4574296
47	2209	103823	107	11449	1225043	167	27889	4657463
48	2304	110592	108	11664	1259712	168	28224	4741632
49	2401	117649	109	11881	1295029	169	28561	4826809
50	2500	125000	110	12100	1331000	170	28900	4913000
51	2601	132651	111	12321	1367631	171	29241	5000211
52	2704	140608	112	12544	1404928	172	29584	5088448
53	2809	148877	113	12769	1442897	173	29929	5177717
54	2916	157464	114	12996	1481544	174	30276	5268024
55	3025	166375	115	13225	1520875	175	30625	5359375
56	3136	175616	116	13456	1560896	176	30976	5451776
57	3249	185193	117	13689	1601613	177	31329	5545233
58	3364	195112	118	13924	1643032	178	31684	5639752
59	3481	205379	119	14161	1685159	179	32041	5735339
60	3600	216000	120	14400	1728000	180	32400	5832000

Tabula Quadratorum, & Cuborum.

Radices	Quadrati.	Cubi	Radices	Quadrati.	Cubi	Radices	Quadrati.	Cubi
181	32761	5929741	241	58081	13997521	301	90601	27270901
182	33124	6028568	242	58564	14172488	302	91204	27543608
183	33489	6128487	243	59049	14348907	303	91809	27818127
184	33856	6229504	244	59536	14526784	304	92416	28094464
185	34225	6331625	245	60025	14706125	305	93025	28372625
186	34596	6434856	246	60516	14886936	306	93636	28652616
187	34969	6539203	247	61009	15069223	307	94249	28934443
188	35344	6644672	248	61504	15252992	308	94864	29218112
189	35721	6751269	249	62001	15438249	309	95481	29503629
190	36100	6859000	250	62500	15625000	310	96100	29791000
191	36481	6967871	251	63001	15813251	311	96721	30080231
192	36864	7077888	252	63504	16003008	312	97344	30371328
193	37249	7189057	253	64009	16194277	313	97969	30664297
194	37636	7301384	254	64516	16387064	314	98596	30959144
195	38025	7414875	255	65025	16581375	315	99225	31255875
196	38416	7529536	256	65536	16777216	316	99856	31554496
197	38809	7645373	257	66049	16974593	317	100489	32855013
198	39204	7762392	258	66564	17173512	318	101124	32157432
199	39601	7880599	259	67081	17373979	319	101761	32461759
200	40000	8000000	260	67600	17576000	320	102400	32768000
201	40401	8120601	261	68121	17779581	321	103041	33076161
202	40804	8242408	262	68644	17984728	322	103684	33386248
203	41209	8365427	263	69169	18191447	323	104329	33698267
204	41616	8489664	264	69696	18399744	324	104976	34012224
205	42025	8615125	265	70225	18609625	325	105625	34328125
206	42436	8741816	266	70756	18821096	326	106276	34645976
207	42849	8869743	267	71289	19034163	327	106929	34965783
208	43264	8998912	268	71824	19248832	328	107584	35287552
209	43681	9129329	269	72361	19465109	329	108241	35611289
210	44100	9261000	270	72900	19683000	330	108900	35937000
211	44521	9393931	271	73441	19902511	331	106561	36264691
212	44944	9528128	272	73984	20123648	332	110224	36594368
213	45369	9663597	273	74529	20346417	333	110889	36926037
214	45796	9800344	274	75076	20570824	334	111556	37259704
215	46225	9938375	275	75625	20796875	335	112225	37595375
216	46656	10077696	276	76176	21024576	336	112896	37933056
217	47089	10218313	277	76729	21253933	337	113569	38272753
218	47524	10360232	278	77284	21484952	338	114244	38614472
219	47961	10503459	279	77841	21717639	339	114921	38958219
220	48400	10648000	280	78400	21952000	340	115600	39304000
221	48841	10793861	281	78961	22188041	341	116281	39651821
222	49284	10941048	282	79524	22425768	342	116964	40001688
223	49729	11089567	283	80089	22665187	343	117649	40353607
224	50176	11239424	284	80656	22906304	344	118336	40707584
225	50625	11390625	285	81225	23149125	345	119025	41063625
226	51076	11543176	286	81796	23393656	346	119716	41421736
227	51529	11697083	287	82369	23639903	347	120409	41781923
228	51984	11852352	288	82944	23887872	348	121104	42144192
229	52441	12008989	289	83521	24137569	349	121801	42508549
230	52900	12167000	290	84100	24389000	350	122500	42875000
231	53361	12326391	291	84681	24642171	351	123201	43243551
232	53824	12487168	292	85264	24897088	352	123904	43614208
233	54289	12649337	293	85849	25153757	353	124609	43986977
234	54756	12812904	294	86436	25412184	354	125316	44361864
235	55225	12977875	295	87025	25672375	355	126025	44738875
236	55696	13144256	296	87616	25934336	356	126736	45118016
237	56169	13312053	297	88209	26198073	357	127449	45499293
238	56644	13481272	298	88804	26463592	358	128164	45882712
239	57121	13651919	299	89401	26730899	359	128881	46268279
240	57600	13824000	300	90000	27000000	360	129600	46656000

Tabula Quadratorum, & Cuborum.

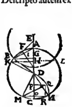
Radices	Quadrati.	Cubi	Radices	Quadrati.	Cubi	Radices	Quadrati.	Cubi
361	130321	47045881	421	177241	74618461	481	231361	111284641
362	131044	47437928	422	178084	75151448	482	232324	111980168
363	131769	47832147	423	178929	75686967	483	233289	112678587
364	132496	48228544	424	179776	76225024	484	234256	113379904
365	133225	48627125	425	180625	76765625	485	235225	114084125
366	133956	49027896	426	181476	77308776	486	236196	114791256
367	134689	49430863	427	182329	77854483	487	237169	115501303
368	135424	49836032	428	183184	78402752	488	238144	116214272
369	136161	50243409	429	184041	78953589	489	239121	116930169
370	136900	50653000	430	184900	79507000	490	240100	117649000
371	137641	51064811	431	185761	80062991	491	241081	118370771
372	138384	51478848	432	186624	80621568	492	242064	119095488
373	139129	51895117	433	187489	81182737	493	243049	119823157
374	139876	52313624	434	188356	81746504	494	244036	120553784
375	140625	52734375	435	189225	82312875	495	245025	121287375
376	141376	53157376	436	190096	82881856	496	247016	122023936
377	142129	53582633	437	190969	83453453	497	247009	122763473
378	142884	54010152	438	191844	84027672	498	248004	123505992
379	143641	54439939	439	192721	84604519	499	249001	124251499
380	144400	54872000	440	193600	85184000	500	250000	125000000
381	145161	55306341	441	194481	85766121	501	251001	125751501
382	145924	55742968	442	195364	86350888	502	252004	126506008
383	146689	56181887	443	196249	86938307	503	253009	127263527
384	147456	56623104	444	197136	87528384	504	254016	128024064
385	148225	57066625	445	198025	88121125	505	255025	128787625
386	148996	57512456	446	198916	88716536	506	256036	129554216
387	149769	57960603	447	199809	89314623	507	257049	130323843
388	1[illegible]0544	58411072	448	200704	89915392	508	258064	131096512
389	151321	58863869	449	201601	90518849	509	259081	131872229
390	152100	59319000	450	202500	91125000	510	260100	132651000
391	152881	59776471	451	203401	91733851	511	261121	133432831
392	153664	60236288	452	204304	92345408	512	262144	134217728
393	154449	60698457	453	205209	92959677	513	263169	135005697
394	155236	61162984	454	206116	93576664	514	264196	135796744
395	156025	61629875	455	207025	94196375	515	265225	136590875
396	156816	62099136	456	207936	94818816	516	266256	137388096
397	157609	62570773	457	208849	95443993	517	267289	138188413
398	158404	63044792	458	209764	96071912	518	268324	138991832
399	159201	63521199	459	210681	96702579	519	269361	139798359
400	160000	64000000	460	211600	97336000	520	270400	140608000
401	160801	64481201	461	212521	97972181	521	271441	141420761
402	161604	64964808	462	213444	98611128	522	272484	142236648
403	162409	65450827	463	214369	99252847	523	273529	143055667
404	163216	65939264	464	215296	99897344	524	274576	143877824
405	164025	66430125	465	216225	100544625	525	275625	144703125
406	164836	66923416	466	217156	101194696	526	276676	145531576
407	165649	67419143	467	218089	101847563	527	277729	146363183
408	166464	67917312	468	219024	102503232	528	278784	147197952
409	167281	68417929	469	219961	103161709	529	279841	148035889
410	168100	68921000	470	220900	103823000	530	280900	148877000
411	168921	69426531	471	221841	104487111	531	281961	149721291
412	169744	69934528	472	222783	105154048	532	283024	150568768
413	170569	70444997	473	223729	105823817	533	284089	151419437
414	171396	70957944	474	224676	106496424	534	285156	152273304
415	172225	71473375	475	225625	107171875	535	286225	153130375
416	173056	71991296	476	226576	107850176	536	287296	153990656
417	173889	72511713	477	227529	108531333	537	288369	154854153
418	174724	73034632	478	228484	109215352	538	289444	155720872
419	175561	73560059	479	229441	109902239	539	290521	156590819
420	176400	74088000	480	230400	110592000	540	291600	157464000

THEOR. 12. PROPOS. 30.

INVENTIONEM lateris heptagoni in dato circulo non rectè à quibuſdam tradi, demonſtrare.

CAROLVS Marianus Cremonenſis totum vnum libellum edidit de inuentione lateris heptagoni in circulo dato, in quo probare conatur, latus heptagoni reperiri hac ratione. Sit circulus ABC, cuius centrum D, diameter CA, in qua producta capiatur AE æqualis quartæ parti ſemidiametri AD, ita vt AE, quinta pars ſit rectæ DE. Deſcripto autem ex E, ad interuallum ſemidiametri AD, circulo ſecante datum circulum in B, iungatur recta AB, quam dicit eſſe latus heptagoni, quod falſum eſſe, ita oſtendemus. Si AB, eſſet verum latus heptagoni, & ducta BE, æquali ſemidiametro DB, (quod fiet, ſi ex B, ad interuallum ſemidiametri recta DE, ſecetur in E,) ſecante arcum AB, in F, diuideretur arcus AB, in F, vel angulus ADB, bifariam, quod tamen in eius deſcriptione non contingit, vt demonſtrabitur. Non ergo eius linea AB, verum latus eſt heptagoni. Ductis enim rectis DB. DF, ſi AB, eſt ſeptima pars circumferentiæ, continebit tam angulus ADB, quam DEB, (a qui ęquales ſunt) $\frac{2}{7}$. vel $\frac{4}{14}$. duorum rectorum. b Ergo reliqui DAB, DBA, ſimul continebunt $\frac{5}{7}$. vel $\frac{10}{14}$. duorum rectotum. Ac proinde vterq; ipſorum continebit $\frac{5}{14}$. duorum rectorum. c Cum ergo DAB, æqualis ſit duobus E. & ABE, continebunt etiam hi ſimul $\frac{5}{14}$. duorum rectorum. Continet autem E, ſolus $\frac{4}{14}$. duorum rectotum. Igitur ABE, continebit $\frac{1}{14}$. duorum rectorum. d Et quia ADF, duplus eſt ipſius ABE, propter eandem baſem AF, continebit angulus ADF, $\frac{2}{14}$. id eſt, $\frac{1}{7}$. duorum rectorum. Cum ergo totus ADB, complectatur $\frac{2}{7}$. vt dictum eſt, continebit quoque BDF, $\frac{1}{7}$, duorum rectorum; ideoque æquales erunt ADF, BDF.

a 5. primi.
b 32. prim.
c 32. prim.
d 20. tertij.



SED iam AB, ſit inuenta per conſtructionem prædicti auctoris; eritque EB, æqualis ipſi DB. Si ergo AB, eſſet verum latus heptagoni, caderet DI, perpendicularis, diuidens nimirum angulum ADB, bifariam, in F,
e 3. ſexti. quod verum non eſt. Poſita enim BE, 4. erit tota CE, 9. & DE, 5. e Cum ergo ſit, vt BD, ad DE, ita BF, ad FE; (quod angulus ADB, ſectus ſit bifariam) erit componendo, ſumma ex BD, DE, nimirum 9. ad DE, 5. vt BE, ad FE. Si igitur fiat, vt 9. ad 5. ita BE, 4. ad aliud, inuenietur FE, $2\frac{2}{9}$. ac propterea rectangulum ſub BE, 4. & EF, $2\frac{2}{9}$. e-
f 1. corol 36. tertij. rit $8\frac{8}{9}$. & rectangulum ſub CE, 9 & EA, 1. erit 9. quod eſt abſurdum; f cum hæc rectangula ſint æqualia. Non ergo recta DI, cadit in punctum F, interſectionis rectæ BE, cum arcu AB, quandoquidem rectangulum ſub BE, EF, æquale non eſt rectangulo ſub CE, EA, ſed minus: Ac proinde non recte illa ratione latus heptagoni inuenitur.

ALBERTVS Durerus ad KL, latus trianguli æquilateri (ſumptis videlicet arcubus AK, AL, quorum vterque ſextam partem circumferentiæ contineat) perpendicularem ducit AH. dicitque KH, ſemiſſem illius lateris eſſe latus heptagoni. quod ſimiliter falſum eſt. Nam KH, omnino æqualis eſt rectę AB, quam proxime de-
g ſchol. 26. primi. monſtrauimus non eſſe latus heptagoni. Si enim iungeretur recta AK, fieret triangulum æquilaterum AKD. g Igitur perpendicularis KH, diuidet AD, bifariam: Ac proinde poſita DK, vel DA, 4. erit DH. 2. Quocirca ſi de-
h 47. pri. trahemus 4. quadratum DH, ex 16. quadrato DK, h reliquum erit quadratum KH, 12. At tantum etiam deprehendemus eſſe quadratum AB. Quoniam enim quadratum BE, eſt 16. hoc eſt, $\frac{64}{4}$. & quadratum EG, $\frac{25}{4}$. (Nam perpendicularis BG, ſecat in Iſoſcele EBD, baſem ED, bifariã Cum ergo ED, ſit 5. erit DG, $2\frac{1}{2}$. cuius quadratum
i 47. prim. eſt $\frac{25}{4}$.) i erit quadratum BG, $\frac{39}{4}$. Sed quadratum AG, eſt $\frac{9}{4}$. quod recta AG, ſit $1\frac{1}{2}$. k Igitur quadratum AB; erit
k 47. prim. $\frac{48}{4}$. id eſt, 12. quod eſt propoſitum.

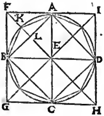
FRANCISCVS Fluſſas Candalla vir nobiliſſimus, ac doctiſſimus conatus eſt conſtruere triangulum Iſoſceles habens vtrumuis angulorum æqualium ad baſem triplum reliqui anguli, vt beneficio ipſi* in dato circulo heptagonum inſcribatur, vt in ſcholio propoſ. 16. lib. 4. Euclid. tradidimus. Ita ergo ſcribit. Sit triangulum æquilaterũ DMN, in quo perpendicularis DO, ad baſem ſecetur bifariam in P. Deſcripto deinde ex M per N, D, circulo, quem ſecet perpendicularis PQ, in Q. iungãtur rectæ QN, MQ. Dicit igitur, in Iſoſcele MNQ, vtrũlibet angulorum N, Q, triplum eſſe anguli M. quod falſum eſſe, hinc intelligi poteſt. Demiſſa perpẽdiculari Q-
l 12. quarti decimi. R, pro ſinu arcus QN, vel anguli M, poſito ſinu toto MQ, vel MN, 10000000. l Quoniam latus DN, potentia ſeſquitertium eſt perpendicularis DO, ſi fiat vt 4. ad 3. ita 100000000000000. quadratum lateris DN, ad aliud
m ſchol 4. ſecundi. reperietur quadratum DO, 75000000000000. m quod cum ſit quadruplum quadrati PO, vel QR, erit quadratum QR, 18750000000000. ipſumque latus QR, erit 4330127. vero minus, vel 4330128. vero maius, cui in tabula ſinuum (adhibita parte proportionali) reſpondent grad. 25. min. 39. ſec. 32 pro arcu QN, vel angulo NMQ. quo ablato ex duobus rectis, ſiue ex grad. 180. reliqua erit ſumma angulorum æqualium ad baſem QN, gra. 154. min. 20. ſec. 28. atque idcirco vterque complectetur grad. 77. min. 10. ſec. 14. qui maior eſt, quam triplus anguli NMQ. grad. 25. min. 39. ſec. 32. cum hic angulus triplicatus efficiat tantummodo grad. 76. min. 58. ſec. 36. Falſum ergo eſt, quod Candalla nititur probare. Paralogiſmos tum Caroli Mariani, tum Candallæ, quos committunt, non eſt huius loci manifeſtare: ſatis nobis eſt, indicaſſe eos non rectè deſcripſiſſe heptagonum æquilaterum, & æquiangulum.

THEOR. 13. PROPOS. 31.

OCTOGONVM æquilaterum & æquiangulum circulo inſcriptum medio loco proportio-

portionale eſt inter quadratum eidem circulo circumſcriptum, & quadtatum inſcriptum.

HOC Theorema eſt Orontij, quod facile ita demonſtrabitur. Sit circulus ABCD, cuius centrum E; duę diametri AC, BD, ſecantes ſeſe in E, ad angulos rectos. Iunctis ergo rectis AB, BC, CD, DA, erit quadratum circulo inſcriptum ABCD, vt ex demonſtratione propoſ. 6 lib. 4. Euclid. conſtat. Ducatur quoque per A, B, C, D, perpendiculares ad diametros coeuntes in F, G, H, I, eritque quadratum circulo circumſcriptum FGHI, vt patet ex demonſtratione propoſ. 7. lib. 4. Euclid. Ductis autem diametris FH, GI, [a] ſecabuntur quadrantes AB, BC, CD, DA, bifariam; propterea quod anguli in centro ſunt omnes æquales, [b] nimirum ſemirecti: [c] ac proinde & latera quadrati inſcripti diuiſa erunt bifariam, & ad angulos rectos. Et ſi iungantur rectæ, AK, KB, &c. deſcriptum erit octogonum intra circulum. Dico ita eſſe quadratum exterius ad octogonum, vt octogonum ad quadratum interius. Quoniã enim triangula AEF, EAI, æquiangula ſunt, quod rectos habeant angulos, & ſemirectos: [d] Erit EF, ad FA, hoc eſt, ad EK, (eſtnãq; EK, ipſi EA, hoc eſt, ipſi AF, æqualis) vt EA, hoc eſt, vt EK, ad AL; hoc eſt, ad EL, [e] quod AL, EL, ſint æquales, ꝓpter angulos ſemirectos AE, in triangulo AEL. Sunt ergo tres rectæ EF, EK, EL, cõtinue proportionales. Igitur & triangula AEF, AEK, AEL, cõtinue erũt proportionalia: [f] cum baſibus EF, EK, EL, ſint proportionalia; [g] Ac proinde & eorum octũpla continue erunt proportionalia, quadratum videlicet FGHI, octogonum AKBCD-A, & quadratum ABCD; quippe cum prædicta triangula ſint harum figurarum octauæ partes, vt liquet. Octogonum igitur medio loco proportionale eſt inter quadrata FGHI, ABCD, quod demonſtrandum erat.

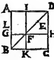


a 17 tertij.
b ſchol. 34. primi.
c ſchol. 27. tertij.
d 4. ſexti.
e 6. primi.
f 1. ſexti.
g 15. quin.

THEOR. 14. PROPOS. 32.

SI ex diametro quadtati detrahatur ipſius latus: Reliqua linea erit latus alterius quadrati, cuius diameter eſt linea, quæ relinquitur, ſi latus inuentum bis ex diametro prioris quadrati auferatur; vel ſi idem latus inuentum ex prioris quadrati latere tollatur.

EX diametro BD, quadrati ABCD, abſcindatur recta BE, lateri AB, æqualis, & ex eadem diametro dematur reliqua DE, bis vſque ad F, ita vt EF, ſit ipſi DE, æqualis: vel (quod idem eſt) reliqua DE, ſiue EF, illi æqualis ex latere AB, hoc eſt, ex BE auferatur. Dico DE, vel EF, latus eſſe quadrati, cuius diameter BF. Ductis enim per F, rectis GH, IK, parallelis ipſis AD, AB; [a] erunt GK, HI, circa diametrũ quadrata. Dico rectam EF, vel DE, ęqualem eſſe lateri BG, quadrati GK, cuius diameter BF, reliqua fuit poſt detractionem DE, bis ex diametro BD. [b] Quoniam enim quadratum ex DF, duplum eſt quadrati ex IF, ſiue ex AG, [c] & quadruplum quadrati ex EF; ſi quadratum ex DF, ponatur 4. erit quadratum ex AG, 2. & quadratum ex EF, 1. Ac proinde quadratum ex AG, duplum erit quadrati ex EF. [d] Eſt autem & quadratum ex BF, quadrati ex BG, duplum. [e] Igitur erit recta AG, ad rectam EF, ita recta BF, ad rectam BG; quandoquidem quadrata earum proportionalia ſunt, habentia nimirum proportionem duplam. Capiatur BL, ipſi BF, æqualis, ita vt reliqua LA, reliquæ FE, æqualis ſit. Erit igitur quoque AG, ad AL, vt BF, ſiue BL, ad BG; Et diuidendo GL, ad LA, vt GL, ad BG. [f] Quocirca AL, ſiue EF, & BG, æquales ſunt, quod erat oſtendendum.



a coroll. 4. ſecundi.
b ſchol. 47. primi.
c ſchol. 4. ſecundi.
d ſchol. 46 primi.
e 22. ſexti.
f 9. quint.

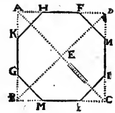
PROBL. 19. PROPOS. 33.

OCTOGONVM æquilaterum, & æquiangulum ad datam altitudinem, latitudinemve conſtituere.

SIT ad altitudinem datam AB, conſtruendum octogonum æquilaterum, & æquiangulum. Deſcripto ex AB, quadrato ABCD, ductiſq; ae diametris AC, BD, ſe in E, ſecantibus bifariam, & ad angulos rectos; abſcindantur ad interuallum EA, ex quatuor angulis quadrati rectæ æquales AF, AG; DH, DI; BK, BL, CM, CN, iunganturque rectæ HK, GM, LI, NF. Dico octogonum FHKGMLIN, eſſe æquilaterum, & æquiangulum. Quoniam enim rectæ AH, AK; BG, BM; CL, CI; DF, DN, relinquuntur poſt detractionem rectæ AE, ex laterib⁹ æqualibus quadrati ABCD, ipſe inter ſe æquales erunt; ideoque & earum quadrata erunt æqualia. [a] Cum ergo quadratum ex KH, æquale ſit quadratis ex AH, AK; ipſum duplum erit tam quadrati ex AH, quam quadrati ex AK. Quia vero AB, diameter eſt quadrati ex AE, deſcripti, abſciſſaq; eſt recta BK, lateri AE, æqualis; [b] erit reliqua

a 47 prim.
b 32 huius

AK,



c ſchol. 47. primi.

AK, latus quadrati, cuius diameter GK, quæ relinquitur poſt detractionem ipſius AK, bis ex diametro AB, vel ex latere AG, ſemel. [c] Igitur & quadratum ex GK, duplum erit quadrati ex KA: ac proinde quadrata ex KH, KG, æqualia inter ſe erunt; ideoque & rectæ KH; KG, æquales erunt. Eadem ratione oſtẽdemus, eandem GK, æqualem eſſe rectæ GM; & GM, æqualem rectæ ML; & ſic de cæteris. Æquilaterum ergo eſt octogonum. [d] Quoniam autem bini anguli ad H, K, G, M, L, I, N, F, æquales ſunt duobus rectis; [e] ſuntque anguli acuti verſus angulos quadrati omnes inter ſe æquales: [f] immo ſemirecti, quod KH, GM, &c. ſint diametri quadratorum ex lateribus AH, GB, &c. deſcriptorum: Erunt reliqui anguli obtuſi in octogono æquales; ideoq; octogonum æquiangulum etiam eſt, quod eſt propoſitum.

d 13. prim. e 4. prim. f ſchol. 34. primi.

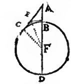
S C H O L I V M.

HÆC praxis, quã ante aliquot annos à quodam architecto ſine demonſtratione tamen accepi, pulcherrima eſt: quippe quæ non requirat diuiſionem circuli in octo partes æquales, & deſcribat octogonum ad datam altitudinem, latitudinemuè, vt patet. Quam praxem vt demonſtrarem, oportuit prius demonſtrare præcedens theorema. Ex eo enim facile problema propoſitum conficitur, vt patuit.

PROBL. 20. PROPOS. 34.

AMBITVM terræ ex edito aliquo monte metiri.

CIRCA finem cap. 1. ſphæræ Ioan. de Sacro boſco propoſui rationem, qua Franciſcus Maurolycus ambitum terræ ex edito aliquo monte inueſtigare docuit, quæ talis eſt. Sit circulus terræ BCD, in quo eligatur editiſſimus aliquis mons, (ipſe in Sicilia montem Ætnam ad hoc negotium cenſuit eligendum) cuius altitudo AB, inquiratur vel per Quadrantem, vt lib. 2. problem. 2. 3. & 4. docuimus, vel per Quadratum Geometricum, vt lib. 3. problem. 6. 7. 8. & 9. Vel potius vt in ſcholio problem. 7. ac 9 tradidimus. Deinde ex A, vertice montis menſuretur totum illud ſpacium pelagi, ſeu terræ, (vbi tamen montes non ſint) quod inde conſpicitur, ita vt radius AC, maris vel terræ ſuperficiem contingat in C. Hoc autem fiet per ea, quæ in problematibus citatis tradita ſunt. Ex his poſtea explorat magnitudinem lineæ tangentis AC; [a] propterea quod eius quadrato æqualia ſunt quadrata AB BC, (ſumpto ſpacio BC, pro linea recta) [b] cuius quadratum æquale eſt rectangulo ſub AD, AB, quo diuiſo per AB, altitudinem montis, prodibit in Quotiente recta AD; ex qua ſi dematur altitudo montis AB, nota relinquetur diameter terræ BD. [c] Ac proinde circumferentia BCD, cognita fiet.



a 47. prim. b 36. tertij.

c corol. 2. de Dimiſ. circuli lib. 4. huius.

SED quia in hac ratione metiendi ambitus terreſtris aſſumitur, arcum BC, à linea recta non differre. quod verum non eſt, quando mons tam altus eſt, vt ſpacium 200. vel 300. milliariorum cerni poſſit, quod tunc arcus BC, iuxta ambitum à Ptolemæo poſitum contineat grad. 3. min. 11. vel grad 4. min. 48. Ac proinde non recte linea tangens AC ex lateribus AB, BC, colligitur. Adde quod per problemata lib. 2. & 3. citata inuenitur perpendicularis BE, in plano, ad quod mons eſt ad angulos rectos. Redigemus rationem hanc ad meliorẽ formam multis vijs, hoc modo. Deprehenſo angulo A, per Quadrantem, vel Quadratum, quando radius viſualis per dioptram circulum terræ tangit. Quod tum denique certiſſime fiet, cum per dioptram conſpicitur Sol, aut alia ſtella, quando oritur, vel occidit. Deprehenſo, inquam, angulo A. inuenienda erit perpendicularis BE, per problemata paulo ante citata [d] Et recta AE, ex duabus AB BE. Si enim ad AE, adijcietur BE, hoc eſt, EC, [e] quæ ipſi BE, æqualis eſt, nota fiet tota tangens AC. ex qua, vt ſupra dictum eſt, & diameter terræ BD, & circumferentia inueſtigabitur. Quin etiam cognito angulo A, ac proinde & eius complemento E, [f] reperictur tam latus BE, [g] quam baſis AE, ſine problematibus ex lib. 2. & 3. citatis &c.

d 47. prim. e 2 coroll. 36. tertij f 4. triang. rectil. g 5. triang. rectil. h 18. tertij. i 4. prim.

VEL ſic agemus. Cognito per dioptram angulo A, cognitus etiam erit (ducta recta FC, [h] quæ ad AC, perpendicularis erit) angulus F, eius complementum in centro. Quia vero ducta recta FE, duo latera EC, CF, duobus lateribus EB, BF, æqualia ſunt, comprehenduntq; angulos æquales, nempe rectos: [i] erunt anguli ad F, æquales. Cum ergo totus angulus BFC, cognitus ſit, vt proxime diximus; cognitus etiam erit BFE, tanquam ſemiſſis ipſius: ac proinde & eius complementum BEF, notum erit. Igitur in triangulo ABE, ex angulis A, E, & latere AB, [k] reperietur BE, in partibus altitudinis montis AB, notæ. Atq; eodem modo in triangulo BEF, ex angulis E, F, & latere BE, cognoſcetur ſemidiameter BF, in partibus lateris BE, hoc eſt, in partibus altitudinis montis AB; ideoq; & tota diameter BD, nota fiet, & ex hac ambitus terræ. quod eſt propoſitum.

k 4. triãg. rectil.

DENIQVE hoc etiam modo idẽ aſſequemur. Cognito per dioptram angulo A, quando radius viſualis terram contingit, cognitus etiam erit angulus AFC, eius complementũ. Ergò huius anguli ſecans AF, cognita erit in partibus ſinus totius FC. Ex qua ſecante, ſi dematur ſinus totus BF, nota relinquetur altitudo montis AB, in partibus ſinus totius BF. Si igitur fiat vt altitudo montis AB, nota in partib⁹ ſinus toti⁹ ad eandẽ AB, notam in data menſura, ità ſinus totus BF, ad aliud; ꝓueniet ſemidiameter BF, nota in partib⁹ altitudinis mõtis, &c.

PROBLE-

PROBL. 21. PROPOS. 35.

PRISMATI cuicunque Cylindrum æqualem, & Pyramidi Conum æqualem: Ac viciſsim Cylindro Priſma æquale, & Cono æqualem Pyramidem conſtituere.

SI baſi priſmatis, vel pyramidis conſtruatur circulus æqualis, per ea quæ ad finem lib. 7. ſcripſimus: Et ſuper hunc circulum extruatur cylindrus vel conus eiuſdem altitudinis cum priſmate, vel pyramide; erit cylindrus priſmati, & conus pyramidi æqualis. Cum enim tam baſes, quam altitudines æquales ſint: producatur autem priſma, & Cylindrus ex baſe in altitudinem multiplicata, & pyramis, atque conus ex tertia parte baſis in altitudinem multiplicata, vt lib. 5. cap. 1. declarauimus; manifeſtum eſt, cylindrum priſmati, & conum pyramidi eſſe æqualem.

SI viciſſim baſi cylindri, vel coni conſtituatur quadratum, aut alia quæuis rectilinea figura æqualis, per ea, quæ ad finem lib. 7. diximus, & ſuper hoc quadratum, aut figuram rectilineam fiat priſma, vel pyramis eiuſdem altitudinis cum cylindro, vel cono, erit priſma cylindro, & pyramis cono æqualis, quod eſt propoſitum.

PROBL. 22. PROPOS. 36.

DATO Cylindro, aut priſmati æqualem conum, vel pyramidem ſub eadem altitudine. Et viciſsim dato cono vel pyramidi æqualem cylindrum, aut priſma eiuſdem altitudinis conſtituere.

[a] SI tam baſis cylindri, quam priſmatis tripletur & ſuper triplicatam extruatur con', vel pyramis eiuſdem a 16. ſexti.
altitudinis, factum erit, quod in prima parte proponitur.[b] Cum enim cylindrus triplus ſit coni eandem cum illo huius.
baſem & altitudinem habentis:[c] Item priſma triplum pyramidis eandem cum illo baſem, atque altitudinem ha- b 10. duo-
bentis:[d] Sit autem & conus extructus eiuſdem illius coni triplus; nec non & pyramis conſtructa eiuſdem illius decimi.
pyramidis tripla.[e] Erit tam conus extructus cylindro æqualis, quam pyramis conſtructa priſmati, quod eſt pro- c coroll. 7.
poſitum. duodec.

[f] SI viciſſim baſes coni, & pyramidis in tripla proportione minuantur, & ſuper tertias has partes cylin- d 11. & 6. duodec.
drus erigatur, & priſma: Erit tam cylindrus dato cono, quam priſma datæ pyramidi æquale.[g] Quoniam n. tam e 9. quint.
conus datus, quam cylindrus extructus, triplus eſt coni eandem baſem altitudinemque habentis cum cylindro f 16. ſexti
extructo.[h] Item tam data pyramis, quam priſma extructum, triplum eſt pyramidis eandem habentis baſem, at- huius.
que altitudinem cum priſmate extructo.[i] Erit tam cylindrus extructus dato cono æqualis, quam priſma con- g 11. & 10. duodec.
ſtructum datæ pyramidis æquale, quod eſt propoſitum. h 6. & 7. duodec.

COROLLARIVM I. i 9. quint.

QVIA igitur[a] omne priſma in cylindrum, & pyramis in conum conuertitur: Et contra cylindrus in a 35. huius
priſma, & conus in pyramidem:[b] Item cylindrus in conum, & priſma in pyramidem: Et contra conus in cylin- b 36. huius
drum, & pyramis in priſma conuerti poteſt; fit vt indifferenter tam cylindrus, quam priſma tranſmutari poſſit in pyramidem, aut conum, ac pyramis in cylindrum, aut priſma æquale.

COROLLARIVM II.

Ex his etiam manifeſte colligitur, omnem cylindrum, ac priſma; ſimiliter & conum, ac pyramidem conuerti poſſe in parallelepipedum rectangulum, cuius baſis ſit quadrata.[a] Nam conuerſo cylindro, aut cono, vel a 35. & 36.
pyramide in priſma qualecunque, ſi baſi priſmatis fiat quadratum æquale, & ſupra illud erigatur parallelepipe- huius.
dum eiuſdem altitudinis;[b] erit hoc parallelepipedum priori æquale, ac proinde & propoſito cylindro, vel cono, b 2. coroll. 7. duod.
aut pyramidi.

PROBL. 23. PROPOS. *37.*

DATVM cylindrum, vel priſma: Similiter datum conum, vel pyramidem cuiuſcunque altitudinis, in æqualem ſub data qualibet alia altitudine, & ſupra baſem quotcunque angulorum, reuocare.

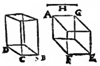
IN proportione, quam data altitudo ad altitudinem propoſiti ſolidi habet,[a] augeatur vel minuatur baſis a 16. ſexti.
eiuſdem ſolidi dati. Nam ſolidum ſupra hanc baſem auctam, vel diminutam ſecundum datam altitudinem con- huius.
ſtructum, erit id, quod quæritur.[b] Erit enim æquale dato ſolido: quippe cum altitudines cum baſibus reciprocæ b 15. & 9.
ſint. Quod ſi baſi conſtructi ſolidi fiat æqualis baſis quotcunque angulorum & ſupra eam conſtituatur ſolidum duodec.
ſub data altitudine; erit hoc etiam ſolidum ſolido propoſito æquale.

PROBL. 24. PROPOS. 38.

DATO parallelepipedo rectangulo cubum æqualem deſcribere,

SI pa-

a 14. ſecun.



SI parallelepipedum oon habet baſem quadratam,[a] fiat eius baſi quadratum æquale BCD,ſupra quod erigatur parallelepipedum rectangulum eiuſdem altitudinis A, B,cum parallelepipedo dato, [b] quod æquale erit dato parallelepipedo. Huic ergo cubum æqualem conſtruemus hac arte. Inter BC, latus quadrati BD, & AB, altitudinem parallelepipedi, inueniantur duæ mediæ proportionales EF,H:ita vt ſit BC.ad EF,quemadmodum EF,ad H,& H.ad AB.Et ſuper EF,propinquiorem lateri BC,conſtruatur cubus EFG,[c] qui parallelepipedo ABCD æqualis erit.

b 2. corol. 7. duod.

c lemma 38 ſexti huius.

Quod ſi forte accidat, tres dimenſiones parallelepipedi dati, cuius baſis quadrata non ſit, eſſe continue proportionales;[d] erit cubus ex media deſcriptus parallelepipedo æqualis.

d 36. vnd.

COROLLARIVM.

a 2. coroll. 36. huius. [a] CVM igitur omnis cylindrus,omne priſma,conus,ac pyramis in rectangulum parallelepipedum poſſit commutari,liquido conſtat,cuilibet ſolido eiuſmodi,cubum poſſe conſtrui æqualem.

PROBL. 25. PROPOS. 39.

DATO cubo æquale parallelepipedum rectangulum ſub data altitudine, vel ſupra datam baſem conſtruere.

SIT in præcedenti figura datus cubus EFG, & primum data altitudo AB,ſub qua conſtruendum ſit parallelepipedum rectangulum cubo æquale.[a] Altitudini AB,& lateri cubi EF,reperiatur tertia ꝓportionalis BC. Et fiat rectangulum BD,comprehenſum ſub tertia proportionali BC,& recta CD, lateri cubi EF,æquali;erigaturque ſupra BD, parallelepipedum rectangulum ſub data altitudine AB. quod dico cubo eſſe æquale. Quoniam enim parallelepipedum rectangulum ABD,continetur ſub tribus rectis AB,CD,BC,hoc eſt,ſub AB,EF, BC, continue proportionalibus;[b] erit parallelepipedum æquale cubo ex media EF,deſcripto. quod eſt propoſitum.

a 11. ſexti.
b 36. vnd.

SIT deinde data baſis BD,quæ ſi non eſt parallelogrammũ, [c] reuocetur ad parallelogrammum æquale. Et quam proportionẽ habet baſis data BD,ad baſem cubi dati,eam habeat latus cubi EF,ad rectam AB. (quod fiet,ſi ſupra latus cubi EF,fiat rectangulũ ęquale baſi BD,& ſuper alterum latus huius rectanguli aliud rectangulum ęquale quadrato lateris cubi EF,[d] Nam tunc erit,vt primum rectangulum,id eſt,baſis BD,ad ſecundum rectangulum,id eſt,ad quadratum;vel baſem cubi,ita primi rectanguli baſis,videlicet EF,ad baſem ſecundi rectãguli.) Nam ſi ſupra baſem BD, erigatur parallelepipedum in altitudine inuenta AB, [e] erunt parallelepipedum, & cubus æqualia:quippe cum baſes,& altitudines ſint reciprocæ,ex conſtructione,quod eſt propoſitum.

c 45. prim.
d 1. ſexti.
e 34. vnde.

COROLLARIVM.

a corol. 38. huius.
b 38. huius
c 39. huius

[a] QVONIAM igitur cuilibet cylindro,priſmati,cono,ac pyramidi parallelepipedum rectangulũ cõſtrui poteſt ęquale:[b] ſi huic parallelepipedo fiat cubus ęqualis;[b] & huic cubo parallelepipedum rectangulum ſub data altitudine,vel baſe data æquale:commutatus erit cylindrus,priſma,conus, ac pyramis in parallelepipedum rectangulum æquale datæ altitudinis,vel baſis.

PROBL. 26. PROPOS. 40.

SPHÆRÆ datæ cubum æqualem:Et dato cubo æqualem ſphæram conſtituere.

QVONIAM per propoſ.32.lib.1. Archimedis de ſphæra, & cylindro. Cylindrus rectus cuius baſis eſt maximus ſphæræ circulus,& altitudo diametro eiuſdem ſphæræ æqualis, ſeſquialteram habet proportionem ad ſphæram:[a] Habet autẽ idem cylindrus ad cylindrum eiuſdem baſis,cuius altitudo contineat $\frac{2}{3}$.diametri ſphærę, proportionem quoque ſeſquialteram;[b] erit poſterior hic cylindrus ſphæræ æqualis.Si igitur huic cylindro [c] fiat cubus æqualis;erit idem hic cubus datæ ſphæræ æqualis, quod eſt propoſitum.

a 14. vnd.
b 9. quint.
c corol. 38. huius.

VEL quia per eandem propoſ.32.Archimedis,ſphæra quadrupla eſt coni,cuius baſis eſt maximus ſphæræ circulus,& altitudo ſemidiametro ſphæræ æqualis: [d] Eſt autem eiuſdem coni quadruplus etiam conus eiuſdem altitudinis, baſem habẽs circuli maximi in ſphæra quadruplam, hoc eſt, baſem habens circulum, cuius ſemidiameter æqualis diametro maximi circuli;[e] erit poſterior hic conus ſphæræ æqualis.[f] Si igitur huic cono fiat cubus æqualis,erit hic idem cubus ſphæræ datæ æqualis,quod eſt propoſitum.

d 11. duod.
e 9. quint.
f corol. 38. huius.

g 40. huius



B A C

SIT viciſſim cubo lateris A,conſtruenda ſphęra æqualis:[g] Sphæræ diametri A,fiat æqualis cubus lateris B,atq; duabus rectis B, A, inueniatur tertia proportionalis C. Dico ſphæram diametri C, æqualem eſſe dato cubo lateris A.[h] Nam vt cubus lateris B, ad cubum lateris A; ita eſt cubus lateris A,ad cubum lateris C. Vt autem cub⁹ lateris A,ad cubum lateris C; [i] ita eſt ſphæra diametri A,ad ſphæram diametri C; [i] quod vtraq; proportio triplicata ſit ꝓportionis A,ad C.Igitur erit quoq;,vt cubus lateris B,ad cubũ lateris A, ita ſphæra diametri A,ad ſphæram diametri C, Eſt autem cubus lateris B,per conſtructionem,æqualis ſphærę diametri A. [k] Igitur & cubus lateris A, æqualis eſt ſphærę diametri C, quod eſt propoſitum.

h ſ. hol. 37 vndec.
i 33 vnd. & 8. duo.
k 14. quin.

COROL-

COROLLARIVM I.

QVIA vero [a] ſi baſi cubi fiat æqualis figura quotcunque laterum, ſiue ea regularis ſit, ſiue non; & ſupra hanc figuram erigatur ſolidum rectangulum ad altitudinem cubi, [b] ſolidum hoc cubo eſt æquale, fit vt ſphæræ datæ conſtrui poſſit æquale ſolidum rectangulum ſupra baſem quotlibet angulorum; [c] ſi nimirũ prius conſtruatur cubus æqualis; deinde huic cubo ſolidum rectangulũ æquale, vt proxime dictum eſt. [d] Item quia cuicunque priſmati pyramis conſtrui poteſt æqualis; ſi cubo, qui ſphæræ eſt æqualis, tanquam priſmati, fiat pyramis æqualis; erit quoq; eadem pyramis ſphæræ æqualis [e] Immo quoniam cuilibet cylindro conus fieri poteſt æqualis: ſi cylindrus extruatur ſphæræ æqualis, ſupra baſem videlicet maximo circulo in ſphæra æqualem, & cuius altitudo contineat $\frac{2}{3}$. diametri, vt ad initium huius propoſ. oſtendimus: Deindè huic cylindro conus æqualis; conſtitutus erit conus quoque datæ ſphæræ æqualis.

a 25 ſexti. b 2. coroll. 7. duodec. c 40. huius d 36. huius e 36. huius

VICISSIM [f] quia cuilibet priſmati conſtrui poteſt cubus æqualis: [g] Si huic cubo fiat æqualis ſphæra, erit eadem hæc ſphæra conſtituta æqualis dato priſmati ſupra baſem quotcunq; angulorum.

f 37. huius g 40. huius

COROLLARIVM. II.

QVIN etiam colligitur, poſſe ſphæram conſtrui æqualem cuilibet corpori regulari. Nam de cubo quidem oſtenſum eſt hac propoſ. 40. De Tetraedro vero, ſiue Pyramide regulari patet. Nam ſi Pyramidi [a] fiat Parallelepipedum æquale; [b] Et huic parallelepipedo cubus æqualis; Ac tandem huic cubo fabricetur ſphæra æqualis; erit eadem hæc ſphæra Tetraedro, ſiue pyramidi regulari æqualis. De Octaedro autem, Icoſaedro & Dodecaedro ita res peragetur. Si omnibus baſibus corporis regularis fiat quadratum æquale, per ea, quæ ad finem lib. 2. Eucl. vel potius per ea, quæ lib. 4. huius Geometriæ cap. 4. Num. 4. tradidimus; & ſuper hoc quadratum fiat pyramis habens altitudinem æqualem perpendiculari è centro corporis ad quamlibet baſem ductæ, hoc eſt, altitudini vnius pyramidis ex ijs, in quas corpus diuiditur è centro: [c] Erit hęc pyramis corpori regulari ęqualis; [d] quippe cum ita ſe habeat tam pyramis hæc quadrilatera ad vnam pyramidẽ corporis regularis, quam omnes pyramides corporis regularis ad vnam pyramidẽ, vt baſis illius, vel baſes omnium pyramidũ corporis, ad vnam baſem; propterea quod in Octaedro proportio eſt vtrobiq, octupla: In Icoſaedro, vigecupla: Et in Dodecaedro, duodecupla. Quare ſi toti illi pyramidi cubus conſtruatur æqualis, vt paulo ante de Tetraedro dictum eſt: atque huic tandem cubo ſphæra æqualis fabricetur; erit eadem ſphæra illi pyramidi, hoc eſt, corpori regulari æqualis.

a 2. coroll. 36. huius. b 38. huius c 9. quin. d 6. duod.

PROBL. 27. PROPOS. 41.

DVOBVS aut pluribus cubis vnum cubum æqualem efficere.

SI ſupra baſem ſuperiorem primi cubi, [a] conſtruatur parallelepipedum rectangulũ ſecundo cubo æquale, vt fiat vnum parallelepipedum duobus cubis æquale: Et ſupra huius parallelepipedi baſem ſuperiorem aliud parallelepipedum æquale tertio cubo, & ſic deinceps, ſi plures adſint cubi; conſtructum erit parallelepipedum propoſitis cubis æquale. Huic ergo [b] ſi fiat cubus æqualis, factum erit, quod proponitur.

a 39. huius b 38. huius

SCHOLIVM.

EADEM arte quotlibet figuris ſolidis non cubis, conſtruetur cubus æqualis: [a] ſi nimirum reuocentur ad vnum parallelepipedum, &c,

a 37. huius

PROBL. 28. PROPOS. 42.

DATO cubo, corpus regulare, quod ex quinq; elegeris, æquale conſtruere.

SIT datus cubus, cuius latus A, cui verbi gratia conſtruendum ſit æquale Dodecaedrum. [a] Fiat quotcunque Dodecaedrum, cuius latus B: cui per ea, quæ in 2. coroll. præcedentis propoſ. dicta ſunt, fiat ęqualis cubus, cuius latus C. [b] Et tribus lateribus C, A, B, reperiatur quarta proportionalis D. Dico Dodecaedrum ſupra latus D, conſtructum, æquale eſſe dato cubo lateris A. Quoniam enim, vt ex demonſtratione propoſ. 37. lib. 11. Euclid. patet, ita eſt cubus lateris C, ad cubum lateris A, vt Dodecaedrum lateris B, ad Dodecaedrum lateris D: Eſt autem per cõſtructionem, cubus lateris C, æqualis Dodecaedro lateris B; [c] erit quoque cubus lateris A, Dodecaedro lateris D, æqualis, quod eſt propoſitum.

C. A. B. D.

a 17. tertij decimi. b 12. ſexti. c 14 quin.

PROBL. 29. PROPOS. 43.

EX maiori cubo detrahere minorem, reſiduoque cubum æqualem exhibere.

SVPRA baſem maioris cubi [a] conſtruatur parallelepipedum cubo minori ęquale. Et ex latere cubi maioris abſcindatur recta æqualis altitudini conſtructi parallelepipedi. Si n. per punctũ abſciſſionis ducatur planũ

a 39 huius

baſibus cubi parallelum, detractum erit parallelepipedum parallelepipedo conſtructo æquale, cum habeat eandem baſem & altitudinem cum illo hoc eſt, minori cubo æquale. [a] Si igitur reliquo parallelepipedo fiat cubus æqualis, factum erit, quod proponitur.

a 38. huius

SCHOLIVM.

a 1. & 2. coroll. 36. huius. b 36. huius

IDEM fieri poteſt in alijs figuris ſolidis; [a] ſi prius reducantur ad parallelepipeda rectangula, quando non ſunt parallelepipeda. [b] & deinde parallelepipeda ad cubos, &c.

PROBL. 30. PROPOS. 44.

DATIS duabus, aut pluribus ſphæris, ſphæram vnam æqualem conſtituere.

a 40. huius b 41. huius c 40. huius

SPHÆRIS propoſitis [a] conſtruantur cubi æquales: [b] His deinde vnus cubus æqualis fiat, qui etiam ſphæris datis erit æqualis. [c] Si igitur huic cubo extruatur ſphæra æqualis; factum erit, quod iubetur.

PROBL. 31. PROPOS. 45.

EX maiori ſphæra minorem ſphæram detrahere, reſiduoq; ſphæram æqualem exhibere.

a 40. huius b 43. huius c 40. huius

[a] VTRAQVE ſphæra in cubum reuocetur. [b] Detracto deinde minore ex maiore, [c] ſi reſiduo ſphæra fiat æqualis; factum erit, quod proponitur.

PROBL. 32. PROPOS. 46.

DATVM cubum, aut parallelepipedum, ſecundum proportionem datam ſecare.

a 32. unde b 1. ſexti.

SI namque vnum latus in baſe cubi, aut parallelepipedi ſecetur ſecundum datam proportionem, & per punctum ſectionis ducatur planum duabus baſibus erecti ſolidi parallelum, diuidẽs ipſum ſolidum in duo parallelepipeda: habebunt hæc parallelepipeda datam proportionem. [a] Habent enim proportionem inter ſe eandem, quam baſes. [b] Cum ergo baſes habeant eandem proportionem, quam ſegmenta lateris ſecundum datam proportionem diuiſi; conſtat id, quod propoſitum eſt.

SCHOLIVM.

NON aliter priſma quodlibet, aut cylindrus ſecundum datam proportionem ſecabitur, ſi altitudo in datam ſecetur proportionem, & per punctum ſectionis planum ducatur baſibus parallelum. Hoc enim ſecabit [a] tam priſma, [b] quam cylindrum in datam proportionem.

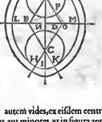
a ſchol. 14. duodec. b 14. duod.

PROBL. 33. PROPOS. 47.

FIGVRAM Ellipſi ſimilem, quam ouatam dicunt, circino deſcribere.

a 15. prim.

LIBET miſcellaneorum hunc librum peruulgato illo problemate concludere. quo artifices ope circini deſcribere ſolent figuram ouatam Ellipſi ſimilem, ita vt nulli bi anguli appareant: eum non raro eiuſmodi figura à Geometris in ſuis delineationibus adhibeatur. Docui quidem in lib. 1. noſtræ Gnomonicæ in ſcholio propoſ. 8. qua ratione vera Ellipſis, quæ conica ſectio eſt, deſcribenda ſit: Sed hic ſimilem figuram ex ſegmentis circulorum conſtantem deſcribendam proponimus. Ita ergo, vt ex varijs ſcriptoribus colligitur, agemus. Conſtruantur duo triangula æquilatera, vel Iſoſcelia ſupra baſem communem AC, in diuerſas partes ABC, ADC. (Æquilatera venuſtiorem faciunt figuram, vt experientia te docebit) productiſque lateribus, deſcribantur ex A, C, duo arcus EFG, HIK, vſque ad latera producta. Si namque ex B, D, per E, K, G, H, alij arcus deſcribantur, [b] tangent hi priores arcus in punctis E, K, G, H: ac proinde illos non ſecabunt, conſtitutaq; erit figura ouata.



b ſchol. 13. tertij.

BENE autem vides, ex eiſdem centris A, B, C, D, deſcribi poſſe varias figuras, prout arcus EFG, HIK, maiores fuerint, aut minores, vt in figura apparet.

QVOD ſi triangula conſtituta ſint Iſoſcelia, poterunt latera AB, CB, &c. vel maiora fieri baſe AC, vel minora. In figura noſtra ſunt minora.

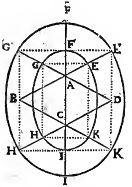
POTES

POTES etiam, ſi placet, primo loco ex centris B, D, deſcribere arcus EMK, GLH, ad quodcunque interuallum, pro latitudine figuræ deſcribendæ: deinde ex centris A, C, minores arcus delineare EFG, HIK.

QVIN etiam ſine conſtructione triangulorum idem efficiemus hoc modo. Ductis duabus rectis AC, BD, ad angulos rectos ſe ſecantibus in N; ſumptiſq; æqualibus NA, NC, quantiſcunq; pro longitudine figuræ, deſcribantur ex A, C, arcus circulorum EFG, HIK, parui, aut magni, prout deſideras extremitates figuræ ſecundum longitudinem habere anguſtiores, latioreſue. Deinde acceptis alijs duabus rectis ęqualib' NB, ND, quantiſcunque, (quo autem puncta B, D, remotiora fuerint ab N, eo anguſtior figura euadet: & quo minus remota, eo latior. Sed vſus magiſter optimus facile docebit, quantæ debeant eſſe rectæ NB, ND,) ducantur ex B, D, per centra A, C, rectæ ſecantes priores arcus in E, K, &c. Nam ſi ex B, D, per puncta EK, &c. alij duo arcus deſcribantur, perfecta erit figura Ellipſi ſimilis.

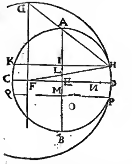
VT autem videas, venuſtiores figuras deſcribi, ſi triangula ABC, ADC; ſint æquilatera, quæ fere ratio ab artificibus ſeruari ſolet, deſcripſimus hic duas figuras. In minori eſt latus BA, rectæ AE, duplum, in maiori vero æquale, &c.

Area figuræ ouatæ hic deſcripta.



IAM vero area figurę ouatę, beneficio trianguli æquilateri deſcriptæ, quam artifices non raro expetūt, facile inuenietur, hoc modo. Sector BEK, eſt ſexta pars circuli, cuius ſemidiameter BE, nota, nimirum latus trianguli ęquilateri BEK. quod eſt in maiori figura duplum lateris AB, aſſumpti ad libitum: in minori vero ſeſquialterum eſt eiuſdem lateris AB. Inuenta ergo area illius circuli, vt lib. 4. cap. 7. docuimus, ſi ex eius ſexta parte dematur triangulum æquilaterum BEK, cuius area reperietur per ea, quæ in eodem lib. 4. cap. 2. Num. 5. tradita ſunt: reliquum fiet ſegmentum EK, ac proinde & GH, notū. Item ſector AGE, eſt pars tertia circuli, cuius ſemidiameter AG, nota, nimirum vel æqualis lateri aſſumpto AB, vel ſemiſſis ipſius. Si igitur ex tertia parte areæ illius circuli auferatur area Iſoſcelis AGE, quæ reperietur per ea, quæ lib. 4. cap. 2. Num. 4. ſcripſimus: remanebit ſegmentum GFE, notum, ideoque & ſegmentum HIK. Quocirca ſi quatuor ſegmentis cognitis adijciatur area rectanguli EGHK, cognita erit area totius figuræ. Cognoſcetur autem area huius rectanguli ex doctrina cap. 1. lib. 4. cum latus EK, chorda ſit ſextæ partis circuli, hoc eſt, ſemidiametro æquale: at EF, ſit ſinus grad. 60. id eſt, ſemiſſis chordæ grad. 120.

VERVM quia hac ratione deſcribi nequit figura ad datam longitudinem, latitudinemque; (quoniam ſi longitudo eligatur FI, ignotum erit, quanta ſit futura latitudo: propterea quod arcus ex B, D, deſcripti raro tranſeunt per electa puncta latitudinis: Si vero eligatur latitudo LM, in prima figura, ignorabitur futura longitudo: quippe cum arcus ex A, C, deſcripti raro etiam per electa puncta longitudinis tranſeāt: vt perſpicuum eſt.) docebimus cum Ioan. Baptiſta Benedicto. quo pacto, data tam longitudine, quam latitudine figura Ellipſi ſimilis deſcribenda ſit. Sit ergo data lungitudo AB, & latitudo CD, quæ ſe bifariam, & ad rectos angulos ſecent in E. Ex latitudine CD, abſcindatur recta DF, quantacunque vltra E, maior tamen interuallo inter punctum F, & A, extremum longitudinis. Hoc enim niſi fiat, deſcribi non poterit figura ouata. Deinde centro F, & interuallo FD, deſcribatur circulus DG, qui neceſſario vltra punctum A, tranſibit, quippe cum ſemidiameter FD, maior poſita ſit interuallo FA. Ducta autem FG, longitudini AB, parallela ſecante circulum deſcriptum in G; ducatur ex G, per A, recta ſecans eundem circulum in H, puncto, è quo ducatur HIK, latitudini CD, parallela, iungaturque HF, ſecans AB, longitudinem in L; eruntque FG, FH, æquales è centro F, ad circumferentiam. [a] Et quia triangula HGF, HAL, ſimilia ſunt; [b] erit vt GF, ad FH, ita AL, ad LH. Cum ergo GF, ipſi FH, ſit æqualis; erit quoque AL, ipſi LH, æqualis. Circulus ergo AH, ex L, per A, deſcriptus tranſibit per H, [c] ibique priorem circulum DG, tanget. Si igitur capiatur EO, æqualis ipſi EI, & EM, ipſi EL, ducaturque POQ, per O rectæ CD, parallela, atque ex M, centro, interuallo autem LH, vel MP, circulus PBQ, deſcribatur, tanget hic quoque priorem circulum in P. Si denique ſumpta EN, ipſi EF, æquali, deſcribatur ex N, ad interuallum FD, prioris circuli circulus KCQ, tanget hic circulos HAK, PBQ, in K, Q. perfectaque erit figura ouata.



[a] coroll. 4. ſexti.
[b] 4. ſexti.
[c] ſchol. 18. tertij.

SED quia, vt dictum eſt, conſtatq; ex deſcriptione, niſi latitudo CD, tanta ſit, vt ex ea abſcindi poſſit recta DF, maior interuallo FA, figura hac ratione deſcribi nequit: adeo vt longitudo, ac latitudo ad libitum aſſumi non poſſint; inſtituetur operatio alio modo, ſumpta quacunque longitudine AB, & latitudine CD. Secent ſe in prima figura longitudo, latitudoq; FI, LM, datæ mutuo bifariam in N, & ad angulos rectos, & ſumantur rectæ FA, IC, æquales, & minores ſemiſſe latitudinis LN; deſcribanturque ex A, & C, per F, & I, circuli EFG, HIK.

Sumpta deinde MO, ſemidiametro AF, æquali, iungatur OA, ex O, ad centrum A, quam [a]biſariam, & ad angulos rectos in P, ſecet recta PB, ſecans LM, etiam productam, ſi opus eſt, in B. ducaturque BA, vſque ad circulum GFE. Et quoniam duo latera OP, PB, duobus lateribus AP. PB æqualia ſunt, anguloſq; continent rectos, id eſt, æquales: [a] erunt baſes OB, AB, æquales; additiſque æqualibus OM, AE, (ſumpta namq; fuit MO, æqualis ſemidiametro FA, vel IC,) totæ BE, BM, æquales erunt. Deſcriptus ergo circulus ex B, per M, tranſibit per E, [b] ibique circellum GFE. tanget. Eodemque modo circellum HIK, tanget Si igitur ſumpta ND, ipſi NB, æquali, deſcribatur ex D, per L, circulus tangens eoſdem priores circellos in G, H, abſoluta erit figura.

a 4. prim.

b ſchol 13. tertij.

QVO autem ſemidiameter FA, ſumpta fuerit minor, quam MN, eo certius centrũ B, reperietur, vt liquet.

SCHOLIVM.

ROGATV multorum placet Epilogi loco apponere tabulam quadratorum, & cuborum, qui ex numeris ab 1. vſq; ad 1000. producuntur: propterea quod huiuſce tabulæ multiplex, & inſignis eſt vſus cum in alijs rebus Mathematicis, tum vero maxime in radicibus quadratis, & cubicis ex magnis numeris extrahendis, vt poſt tabulam paucis exponam. Non extendi autem tabulam vltra radicem 1000. contentus radicibus tres figuras nõ ſuperantibus: propterea quod ſi extenderetur vſque ad radicem 10000. vt radices haberentur quatuor figurarum, decies maior tabula conficienda eſſet. Si quis tamen eam extendere volet, inueniet ad finem tabulæ regulas, quibus id facile poſſit exequi. Quamuis quadratorum tabulam Doctiſſimus Maginus in ſua tabula Tetragonica vſque ad radicem. 10000. promouerit.

SEQVITVR TABVLA QVADRATORVM, & Cuborum, quorum radices maiores non ſunt, quam 1000.

TABVLA

Tabula Quadratorum, & Cuborum.

Radices	Quadrati.	Cubi	Radices	Quadrati.	Cubi	Radices	Quadrati.	Cubi
1	1	1	61	3721	226981	121	14641	1771561
2	4	8	62	3844	238328	122	14884	1815848
3	9	27	63	3969	250047	123	15129	1860867
4	16	64	64	4096	262144	124	15376	1906624
5	25	125	65	4225	274625	125	15625	1953125
6	36	216	66	4356	287496	126	15876	2000376
7	49	343	67	4489	300763	127	16129	2048383
8	64	512	68	4624	314432	128	16384	2097152
9	81	729	69	4761	328509	129	16641	2146689
10	100	1000	70	4900	343000	130	16900	2197000
11	121	1331	71	5041	357911	131	17161	2248091
12	144	1728	72	5184	373248	132	17424	2299968
13	169	2197	73	5329	389017	133	17689	2352637
14	196	2744	74	5476	405224	134	17956	2406104
15	225	3375	75	5625	421875	135	18225	2460375
16	256	4096	76	5776	438976	136	18496	2515456
17	289	4913	77	5929	456533	137	18769	2571353
18	324	5832	78	6084	474552	138	19044	2628072
19	361	6859	79	6241	493039	139	19321	2685619
20	400	8000	80	6400	512000	140	19600	2744000
21	441	9261	81	6561	531441	141	19881	2803221
22	484	10648	82	6724	551368	142	20164	2863288
23	529	12167	83	6889	571787	143	20449	2924207
24	576	13824	84	7056	592704	144	20736	2985984
25	625	15625	85	7225	614125	145	21025	3048625
26	676	17576	86	7396	636056	146	21316	3112136
27	729	19683	87	7569	658503	147	21609	3176523
28	784	21952	88	7744	681472	148	21904	3241792
29	841	24389	89	7921	704969	149	22201	3307949
30	900	27000	90	8100	729000	150	22500	3375000
31	961	29791	91	8281	753571	151	22801	3442951
32	1024	32768	92	8464	778688	152	23104	3511808
33	1089	35937	93	8649	804357	153	23409	3581577
34	1156	39304	94	8836	830584	154	23716	3652264
35	1225	42875	95	9025	857375	155	24025	3723875
36	1296	46656	96	9216	884736	156	24336	3796416
37	1369	50653	97	9409	912673	157	24649	3869893
38	1444	54872	98	9604	941192	158	24964	3944312
39	1521	59319	99	9801	970299	159	25281	4019679
40	1600	64000	100	10000	1000000	160	25600	4096000
41	1681	68921	101	10201	1030301	161	25921	4173281
42	1764	74088	102	10404	1061208	162	26244	4251528
43	1849	79507	103	10609	1092727	163	26569	4330747
44	1936	85184	104	10816	1124864	164	26896	4410944
45	2025	91125	105	11025	1157625	165	27225	4492125
46	2116	97336	106	11236	1191016	166	27556	4574296
47	2209	103823	107	11449	1225043	167	27889	4657463
48	2304	110592	108	11664	1259712	168	28224	4741632
49	2401	117649	109	11881	1295029	169	28561	4826809
50	2500	125000	110	12100	1331000	170	28900	4913000
51	2601	132651	111	12321	1367631	171	29241	5000211
52	2704	140608	112	12544	1404928	172	29584	5088448
53	2809	148877	113	12769	1442897	173	29929	5177717
54	2916	157464	114	12996	1481544	174	30276	5268024
55	3025	166375	115	13225	1520875	175	30625	5359375
56	3136	175616	116	13456	1560896	176	30976	5451776
57	3249	185193	117	13689	1601613	177	31329	5545233
58	3364	195112	118	13924	1643032	178	31684	5639752
59	3481	205379	119	14161	1685159	179	32041	5735339
60	3600	216000	120	14400	1728000	180	32400	5832000

Tabula Quadratorum, & Cuborum.

Radices	Quadrati	Cubi	Radices	Quadrati	Cubi	Radices	Quadrati	Cubi
181	32761	5929741	241	58081	13997521	301	90601	27270901
182	33124	6028568	242	58564	14172488	302	91204	27543608
183	33489	6128487	243	59049	14348907	303	91809	27818127
184	33856	6229504	244	59536	14526784	304	92416	28094464
185	34225	6331625	245	60025	14706125	305	93025	28372625
186	34596	6434856	246	60516	14886936	306	93636	28652616
187	34969	6539203	247	61009	15069223	307	94249	28934443
188	35344	6644672	248	61504	15252992	308	94864	29218112
189	35721	6751269	249	62001	15438249	309	95481	29503629
190	36100	6859000	250	62500	15625000	310	96100	29791000
191	36481	6967871	251	63001	15813251	311	96721	30080231
192	36864	7077888	252	63504	16003008	312	97344	30371328
193	37249	7189057	253	64009	16194277	313	97969	30664297
194	37636	7301384	254	64516	16387064	314	98596	30959144
195	38025	7414875	255	65025	16581375	315	99225	31255875
196	38416	7529536	256	65536	16777216	316	99856	31554496
197	38809	7645373	257	66049	16974593	317	100489	31855013
198	39204	7762392	258	66564	17173512	318	101124	32157432
199	39601	7880599	259	67081	17373979	319	101761	32461759
200	40000	8000000	260	67600	17576000	320	102400	32768000
201	40401	8120601	261	68121	17779581	321	103041	33076161
202	40804	8242408	262	68644	17984728	322	103684	33386248
203	41209	8365427	263	69169	18191447	323	104329	33698267
204	41616	8489664	264	69696	18399744	324	104976	34012224
205	42025	8615125	265	70225	18609625	325	105625	34328125
206	42436	8741816	266	70756	18821096	326	106276	34645976
207	42849	8869743	267	71289	19034163	327	106929	34965783
208	43264	8998912	268	71824	19248832	328	107584	35287552
209	43681	9129329	269	72361	19465109	329	108241	35611289
210	44100	9261000	270	72900	19683000	330	108900	35937000
211	44521	9393931	271	73441	19902511	331	109561	36264691
212	44944	9528128	272	73984	20123648	332	110224	36594368
213	45369	9663597	273	74529	20346417	333	110889	36926037
214	45796	9800344	274	75076	20570824	334	111556	37259704
215	46225	9938375	275	75625	20796875	335	112225	37595375
216	46656	10077696	276	76176	21024576	336	112896	37933056
217	47089	10218313	277	76729	21253933	337	113569	38272753
218	47524	10360232	278	77284	21484952	338	114244	38614472
219	47961	10503459	279	77841	21717639	339	114921	38958219
220	48400	10648000	280	78400	21952000	340	115600	39304000
221	48841	10793861	281	78961	22188041	341	116281	39651821
222	49284	10941048	282	79524	22425768	342	116964	40001688
223	49729	11089567	283	80089	22665187	343	117649	40353607
224	50176	11239424	284	80656	22906304	344	118336	40707584
225	50625	11390625	285	81225	23149125	345	119025	41063625
226	51076	11543176	286	81796	23393656	346	119716	41421736
227	51529	11697083	287	82369	23639903	347	120409	41781923
228	51984	11852352	288	82944	23887872	348	121104	42144192
229	52441	12008989	289	83521	24137569	349	121801	42508549
230	52900	12167000	290	84100	24389000	350	122500	42875000
231	53361	12326391	291	84681	24642171	351	123201	43243551
232	53824	12487168	292	85264	24897088	352	123904	43614208
233	54289	12649337	293	85849	25153757	353	124609	43986977
234	54756	12812904	294	86436	25412184	354	125316	44361864
235	55225	12977875	295	87025	25672375	355	126025	44738875
236	55696	13144256	296	87616	25934336	356	126736	45118016
237	56169	13312053	297	88209	26198073	357	127449	45499293
238	56644	13481272	298	88804	26463592	358	128164	45882712
239	57121	13651919	299	89401	26730899	359	128881	46268279
240	57600	13824000	300	90000	27000000	360	129600	46656000

Tabula Quadratorum, & Cuborum.

Radices	Quadrati.	Cubi	Radices	Quadrati.	Cubi	Radices	Quadraii.	Cubi
361	130321	47045881	421	177241	74618461	481	231361	111284641
362	131044	47437928	422	178084	75151448	482	232324	111980168
363	131769	47832147	423	178929	75686967	483	233289	112678587
364	132496	48228544	424	179776	76225024	484	234256	113379904
365	133225	48627125	425	180625	76765625	485	235225	114084125
366	133956	49027896	426	181476	77308776	486	236196	114791256
367	134689	49430863	427	182329	77854483	487	237169	115501303
368	135424	49836032	428	183184	78402752	488	238144	116214272
369	136161	50243409	429	184041	78953589	489	239121	116930169
370	136900	50653000	430	184900	79507000	490	240100	117649000
371	137641	51064811	431	185761	80062991	491	241081	118370771
372	138384	51478848	432	186624	80621568	492	242064	119095488
373	139129	51895117	433	187489	81182737	493	243049	119823157
374	139876	52313624	434	188356	81746504	494	244036	120553784
375	140625	52734375	435	189225	82312875	495	245025	121287375
376	141376	53157376	436	190096	82881856	496	247016	122023936
377	142129	53582633	437	190969	83453453	497	247009	122763473
378	142884	54010152	438	191844	84027672	498	248004	123505992
379	143641	54439939	439	192721	84604519	499	249001	124251499
380	144400	54872000	440	193600	85184000	500	250000	125000000
381	145161	55306341	441	194481	85766121	501	251001	125751501
382	145924	55742968	442	195364	86350888	502	252004	126506008
383	146689	56181887	443	196249	86938307	503	253009	127263527
384	147456	56623104	444	197136	87528384	504	254016	128024064
385	148225	57066625	445	198025	88121125	505	255025	128787625
386	148996	57512456	446	198916	88716536	506	256036	129554216
387	149769	57960603	447	199809	89314623	507	257049	130323843
388	150544	58411072	448	200704	89915392	508	258064	131096512
389	151321	58863869	449	201601	90518849	509	259081	131872229
390	152100	59319000	450	202500	91125000	510	260100	132651000
391	152881	59776471	451	203401	91733851	511	261121	133432831
392	153664	60236288	452	204304	92345408	512	262144	134217728
393	154449	60698457	453	205209	92959677	513	263169	135005697
394	155236	61162984	454	206116	93576664	514	264196	135796744
395	156025	61629875	455	207025	94196375	515	265225	136590875
396	156816	62099136	456	207936	94818816	516	266256	137388096
397	157609	62570773	457	208849	95443993	517	267289	138188413
398	158404	63044792	458	209764	96071912	518	268324	138991832
399	159201	63521199	459	210681	96702579	519	269361	139798359
400	160000	64000000	460	211600	97336000	520	270400	140608000
401	160801	64481201	461	212521	97972181	521	271441	141420761
402	161604	64964808	462	213444	98611128	522	272484	142236648
403	162409	65450827	463	214369	99252847	523	273529	143055667
404	163216	65939264	464	215296	99897344	524	274576	143877824
405	164025	66430125	465	216225	100544625	525	275625	144703125
406	164836	66923416	466	217156	101194696	526	276676	145531576
407	165649	67419143	467	218089	101847563	527	277729	146363183
408	166464	67917312	468	219024	102503232	528	278784	147197952
409	167281	68417929	469	219961	103161709	529	279841	148035889
410	168100	68921000	470	220900	103823000	530	280900	148877000
411	168921	69426531	471	221841	104487111	531	281961	149721291
412	169744	69934528	472	222783	105154048	532	283024	150568768
413	170569	70444997	473	223729	105823817	533	284089	151419437
414	171396	70957944	474	224676	106496424	534	285156	152273304
415	172225	71473375	475	225625	107171875	535	286225	153130375
416	173056	71991296	476	226576	107850176	536	287296	153990656
417	173889	72511713	477	227529	108531333	537	288369	154854153
418	174724	73034632	478	228484	109215352	538	289444	155720872
419	175561	73560059	479	229441	109902239	539	290521	156590819
420	176400	74088000	480	230400	110592000	540	291600	157464000

THEOR. 12. *PROPOS.* 30.

INVENTIONEM lateris heptagoni in dato circulo non rectè à quibuſdam tradi, demonſtrare.

CAROLVS Marianus Cremonenſis totum vnum libellum edidit de inuentione lateris heptagoni in circulo dato, in quo probare conatur, latus heptagoni reperiri hac ratione. Sit circulus ABC, cuius centrum D, diameter CA. in qua producta capiatur AE æqualis quartæ parti ſemidiametri AD, ita vt AE, quinta pars ſit rectæ DE. Deſcripto autem ex E, ad interuallum ſemidiametri AD, circulo ſecante datum circulum in B, iungatur recta AB, quam dicit eſſe latus heptagoni, quod falſum eſſe, ita oſtendemus. Si AB, eſſet verum latus heptagoni, & ducta BE, æquali ſemidiametro DB, (quod fiet, ſi ex B, ad interuallum ſemidiametri recta DE, ſecetur in E,) ſecante arcum AB, in F, diuideretur arcus AB, in F, vel angulus ADB, bifariam, quod tamen in eius deſcriptione non contingit, vt demonſtrabitur. Non ergo eius linea AB, verum latus eſt heptagoni. Ductis enim rectis DB, DF, ſi AB, eſt ſeptima pars circumferentiæ, continebit tam angulus ADB, quam DEB, (a qui ęquales ſunt) $\frac{2}{7}$. vel $\frac{4}{14}$. duorum rectorum. b Ergo reliqui DAB, DBA, ſimul continebunt $\frac{5}{7}$. vel $\frac{10}{14}$. duorum rectorum. Ac proinde vterq; ipſorum continebit $\frac{5}{14}$. duorum rectorum. c Cum ergo DAB, æqualis ſit duobus E, & ABE, continebunt etiam hi ſimul $\frac{5}{14}$. duorum rectorum. Continet autem E, ſolus $\frac{4}{14}$. duorum rectorum. Igitur ABE, continebit $\frac{1}{14}$. duorum rectorum. d Et quia ADF, duplus eſt ipſius ABE, propter eandem baſem AF, continebit angulus ADF, $\frac{2}{14}$. id eſt, $\frac{1}{7}$. duorum rectorum. Cum ergo totus ADB, complectatur $\frac{2}{7}$. vt dictum eſt, continebit quoque BDF, $\frac{1}{7}$. duorum rectorum; ideoque æquales erunt ADF, BDF.



a 5. primi.
b 32. prim.
c 32. prim.
d 20. tertij.

SED iam AB, ſit inuenta per conſtructionem prædicti auctoris; eritque EB, æqualis ipſi DB. Si ergo AB, eſſet verum latus heptagoni, caderet DI, perpendicularis, diuidens nimirum angulum ADB, bifariam, in F, quod verum non eſt. Poſita enim BE, 4. erit tota CE, 9. & DE, 5. e Cum ergo ſit, vt BD, ad DE, ita BF, ad FE; (quod angulus ADB, ſectus ſit bifariam) erit componendo, ſumma ex BD, DE, nimirum 9. ad DE, 5. vt BE, ad FE. Si igitur fiat, vt 9. ad 5. ita BE, 4. ad aliud, inuenietur FE, $2\frac{2}{9}$. ac propterea rectangulum ſub BE, 4. & EF, $2\frac{2}{9}$. erit $8\frac{8}{9}$. & rectangulum ſub CE, 9. & EA, 1. erit 9. quod eſt abſurdum; f cum hæc rectangula ſint æqualia. Non ergo recta DI, cadit in punctum F, interſectionis rectæ BE, cum arcu AB, quandoquidem rectangulum ſub BE, EF, æquale non eſt rectangulo ſub CE, EA, ſed minus: Ac proinde non rectè illa ratione latus heptagoni inuenitur.

e 3. ſexti.
f 1. corol 36. tertij.

ALBERTVS Durerus ad KL, latus trianguli æquilateri (ſumptis videlicet arcubus AK, AL, quorum vterque ſextam partem circumferentiæ contineat) perpendicularem ducit AH, dicitque KH, ſemiſſem illius lateris eſſe latus heptagoni. quod ſimiliter falſum eſt. Nam KH, omnino æqualis eſt rectę AB, quam proxime demonſtrauimus non eſſe latus heptagoni. Si enim iungeretur recta AK, fieret triangulum æquilaterum AKD.g Igitur perpendicularis KH, diuidet AD, bifariam: Ac proinde poſita DK, vel DA, 4. erit DH. 2. Quocirca ſi detrahemus 4. quadratum DH, ex 16. quadrato DK, h reliquum erit quadratum KH, 12. At tantum etiam deprehendemus eſſe quadratum AB. Quoniam enim quadratum BE, eſt 16. hoc eſt, $\frac{64}{4}$. & quadratum EG, $\frac{25}{4}$. (Nam perpendicularis BG, ſecat in Iſoſcele EBD, baſem ED, bifariã. Cum ergo ED, ſit 5. erit DG, $2\frac{1}{2}$. cuius quadratum eſt $\frac{25}{4}$.) i erit quadratum BG, $\frac{39}{4}$. Sed quadratum AG, eſt $\frac{9}{4}$. quod recta AG, ſit $1\frac{1}{2}$. k Igitur quadratum AB; erit $\frac{48}{4}$. id eſt, 12. quod eſt propoſitum.

g ſchol. 26. primi.
h 47. pri.
i 47. prim.
k 47. prim

FRANCISCVS Fluſſas Candalla vir nobiliſſimus, ac doctiſſimus conatus eſt conſtruere triangulum Iſoſceles habens vtrumuis angulorum æqualium ad baſem triplum reliqui anguli, vt beneficio ipſi in dato circulo heptagonum inſcribatur, vt in ſcholio propoſ. 16. lib. 4. Euclid. tradidimus. Ita ergo ſcribit. Sit triangulum æquilaterũ DMN, in quo perpendicularis DO, ad baſem ſecetur bifariam in P. Deſcripto deinde ex M per N, D, circulo, quem ſecet perpendicularis PQ, in Q. iungãtur rectæ QN, MQ. Dicit igitur, in Iſoſcele MNQ, vtrũlibet angulorum N, Q, triplum eſſe anguli M. quod falſum eſſe, hinc intelligi poteſt. Demiſſa perpẽdiculari QR, pro ſinu arcus QN, vel anguli M, poſito ſinu toto MQ, vel MN, 10000000. l Quoniam latus DN, potentia ſeſquitertium eſt perpendicularis DO, ſi fiat vt 4. ad 3. ita 100000000000000. quadratum lateris DN, ad aliud reperietur quadratum DO, 75000000000000. m quod cum ſit quadruplum quadrati PO, vel QR, erit quadratum QR, 18750000000000. ipſumque latus QR, erit 4330127. vero minus, vel 4330128. vero maius, cui in tabula ſinuum (adhibita parte proportionali) reſpondent grad. 25. min. 39. ſec. 32 pro arcu QN, vel angulo NMQ. quo ablato ex duobus rectis, ſiue ex grad. 180. reliqua erit ſumma angulorum æqualium ad baſem QN, gra. 154. min. 20. ſec. 28. atque idcirco vterque complectetur grad. 77. min. 10. ſec. 14. qui maior eſt, quam triplus anguli NMQ. grad. 25. min. 39. ſec. 32. cum hic angulus triplicatus efficiat tantummodo grad. 76. min. 58. ſec. 36. Falſum ergo eſt, quod Candalla nititur probare. Paralogiſmos tum Caroli Mariani, tum Candallæ, quos committunt, non eſt huius loci manifeſtare: ſatis nobis eſt, indicaſſe eos non rectè deſcripſiſſe heptagonum æquilaterum, & æquiangulum.

l 12 quarti decimi.
m ſchol. 4. ſecundi.

THEOR. *13.* PROPOS. *31.*

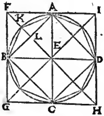
OCTOGONVM æquilaterum & æquiangulum circulo inſcriptum medio loco pro-

portio-

Google

portionale eſt inter quadratum eidem circulo circumſcriptum, & quadratum inſcriptum.

HOC Theorema eſt Orontij, quod facile ita demonſtrabitur. Sit circulus ABCD, cuius centrum E; duę diametri AC, BD, ſecantes ſeſe in E, ad angulos rectos. Iunctis ergo rectis AB, BC, CD, DA, erit quadratum circulo inſcriptum ABCD, vt ex demonſtratione propoſ. 6. lib. 4. Euclid. conſtat. Ducatur quoque per A, B, C, D, perpendiculares ad diametros coeuntes in F, G, H, I, eritque quadratum circulo circumſcriptum FGHI, vt patet ex demonſtratione propoſ. 7. lib. 4. Euclid. Ductis autem diametris FH, GI, [a] ſecabuntur quadrantes AB, BC, CD, DA, bifariam; propterea quod anguli in centro ſunt omnes æquales, [b] nimirum ſemirecti: [c] ac proinde & latera quadrati inſcripti diuiſa erunt bifariam, & ad angulos rectos. Et ſi iungantur rectæ, AK, KB, &c. deſcriptum erit octogonum intra circulum. Dico ita eſſe quadratum exterius ad octogonum, vt octogonum ad quadratum interius. Quoniã enim triangula AEF. EAI, æquiangula ſunt, quod rectos habeant angulos, & ſemirectos: [d] Erit EF, ad FA, hoc eſt, ad EK, (eſt nãq; EK, ipſi EA, hoc eſt, ipſi AF, æqualis) vt EA, hoc eſt, vt EK, ad AL; hoc eſt, ad EL, [e] quod AL, EL, ſint æquales, ꝑpter angulos ſemirectos AE, in triangulo AEL. Sunt ergo tres rectæ EF, EK, EL, cõtinue proportionales. Igitur & triangula AEF, AEK, AEL, cõtinue erũt proportionalia: [f] cum baſibus EF, EK, EL. ſint proportionalia; [g] Ac proinde & eorum octũpla continue erunt proportionalia, quadratum videlicet FGHI, octogonum AKBCDA, & quadratum ABCD; quippe cum prædicta triangula ſint harum figurarum octauæ partes, vt liquet. Octogonum igitur medio loco proportionale eſt inter quadrata FGHI, ABCD, quod demonſtrandum erat.

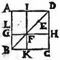


a 17 tertij. b ſchol. 34. primi. c ſchol. 27. tertij. d 4. ſexti. e 6. primi. f 1. ſexti. g 15. quin.

THEOR. 14. PROPOS. 32.

SI ex diametro quadrati detrahatur ipſius latus: Reliqua linea erit latus alterius quadrati, cuius diameter eſt linea, quæ relinquitur, ſi latus inuentum bis ex diametro prioris quadrati auferatur; vel ſi idem latus inuentum ex prioris quadrati latere tollatur.

EX diametro BD, quadrati ABCD, abſcindatur recta BE, lateri AB, æqualis, & ex eadem diametro dematur reliqua DE, bis vſque ad F, ita vt EF, ſit ipſi DE, æqualis: vel (quod idem eſt) reliqua DE, ſiue EF, illi æqualis ex latere AB, hoc eſt, ex BE auferatur. Dico DE, vel EF, latus eſſe quadrati, cuius diameter BF. Ductis enim per F, rectis GH, IK, parallelis ipſis AD, AB; [a] erunt GK, HI, circa diametrũ quadrata. Dico rectam EF, vel DE, ęqualem eſſe lateri BG, quadrati GK. cuius diameter BF, reliqua fuit poſt detractionem DE, bis ex diametro BD. [b] Quoniam enim quadratum ex DF, duplum eſt quadrati ex IF, ſiue ex AG, [c] & quadruplum quadrati ex EF; ſi quadratum ex DF, ponatur 4. erit quadratum ex AG, 2. & quadratum ex EF, 1. Ac proinde quadratum ex AG, duplum erit quadrati ex EF. [d] Eſt autem & quadratum ex BF, quadrati ex BG, duplum. [e] Igitur erit recta AG, ad rectam EF, ita recta BF, ad rectam BG; quandoquidem quadrata earum proportionalia ſunt, habentia nimirum proportionem duplam. Capiatur BL, ipſi BF, æqualis, ita vt reliqua LA, reliquæ FE, æqualis ſit. Erit igitur quoque AG, ad AL, vt BF, ſiue BL, ad BG; Et diuidendo GL, ad LA, vt GL, ad BG. [f] Quocirca AL, ſiue EF, & BG, æquales ſunt, quod erat oſtendendum.



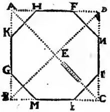
a coroll. 4. ſecundi. b ſchol. 47. primi. c ſchol. 4. ſecundi. d ſchol. 46 primi. e 22. ſext. f 9 quint.

PROBL. 19. PROPOS. 33.

OCTOGONVM æquilaterum, & æquiangulum ad datam altitudinem, latitudinemve conſtituere.

SIT ad altitudinem datam AB, conſtruendum octogonum æquilaterum, & æquiangulum. Deſcripto ex AB, quadrato ABCD, ductiſque diametris AC, BD, ſe in E, ſecantibus bifariam, & ad angulos rectos; abſcindantur ad interuallum EA, ex quatuor angulis quadrati rectæ æquales AF, AG; DH, DI; BK, BL, CM. CN, iunganturque rectæ HK, GM, LI, NF. Dico octogonum FHKGMLIN, eſſe æquilaterum, & æquiangulum. Quoniam enim rectæ AH. AK; BG, BM; CL. CI; DF, DN, relinquuntur poſt detractionem rectæ AE, ex laterib⁹ æqualibus quadrati ABCD, ipſę inter ſe æquales erunt; ideoque & earum quadrata erunt æqualia. [a] Cum ergo quadratum ex KH, æquale ſit quadratis ex AH. AK, ipſum duplum erit tam quadrati ex AH, quam quadrati ex AK. Quia vero AB, diameter eſt quadrati ex AE, deſcripti, abſciſſaq; eſt recta BK, lateri AE, æqualis; [b] erit reliqua AK,

a 47 prim. b 32 huius



c ſchol. 47. primi.

d 33. prim. e 4. prim. f ſchol. 34. primi.

AK, latus quadrati, cuius diameter GK, quæ relinquitur poſt detractionem ipſius AK, bis ex diametro AB, vel ex latere AG, ſemel. [c] Igitur & quadratum ex GK, duplum erit quadrati ex KA: ac proinde quadrata ex KH, KG, æqualia inter ſe erunt; ideoque & rectæ KH, KG, æquales erunt. Eadem ratione oſtẽdemus, eandem GK, æqualem eſſe rectæ GM; & GM, æqualem rectæ ML; & ſic de cæteris. Æquilaterum ergo eſt octogonum. [d] Quoniam autem bini anguli ad H, K, G, M, L, I, N, F, æquales ſunt duobus rectis; [e] ſuntque anguli acuti verſus angulos quadrati omnes inter ſe æquales: [f] immo ſemirecti, quod KH, GM, &c. ſint diametri quadratorum ex lateribus AH, GB, &c. deſcriptorum: Erunt reliqui anguli obtuſi in octogono æquales; ideoq; octogonum æquiangulum etiam eſt, quod eſt propoſitum.

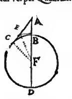
SCHOLIVM.

HÆC praxis, quã ante aliquot annos à quodam architecto ſine demonſtratione tamen accepi, pulcherrima eſt: quippe quæ non requirat diuiſionem circuli in octo partes æquales, & deſcribat octogonum ad datam altitudinem, latitudinemuè, vt patet. Quam praxem vt demonſtrarem, oportuit prius demonſtrare præcedens theorema. Ex eo enim facile problema propoſitum conficitur, vt patuit.

PROBL. 20. PROPOS. 34.

AMBITVM terræ ex edito aliquo monte metiri.

CIRCA finem cap. 1. ſphæræ Ioan. de Sacro boſco propoſui rationem, qua Franciſcus Maurolycus ambitum terræ ex edito aliquo monte inueſtigare docuit, quæ talis eſt. Sit circulus terræ BCD, in quo eligatur editiſſimus aliquis mons, (ipſe in Sicilia montem Ætnam ad hoc negotium cenſuit eligendum) cuius altitudo AB, inquiratur vel per Quadrantem, vt lib. 2. problem. 2. 3. & 4. docuimus, vel per Quadratum Geometricum, vt lib. 3. problem. 6. 7. 8. & 9. Vel potius vt in ſcholio problem. 7. ac 9 tradidimus. Deinde ex A, vertice montis menſuretur totum illud ſpacium pelagi, ſeu terræ, (vbi tamen montes non ſint) quod inde conſpicitur, ita vt radius AC, maris vel terræ ſuperficiem contingat in C. Hoc autem fiet per ea, quæ in problematibus citatis tradita ſunt. Ex his poſtea explorat magnitudinem lineæ tangentis AC; [a] propterea quod eius quadrato æqualia ſunt quadrata AB. BC, (ſumpto ſpacio BC, pro linea recta) [b] cuius quadratum æquale eſt rectangulo ſub AD, AB, quo diuiſo per AB, altitudinem montis, prodibit in Quotiente recta AD; ex qua ſi dematur altitudo montis AB, nota relinquetur diameter terræ BD. [c] Ac proinde circumferentia BCD, cognita fiet.



a 47. prim. b 36. tertij.

c corol. 2. de Dimẽſ. circuli lib. 4. huius.

SED quia in hac ratione metiendi ambitus terreſtris aſſumitur, arcum BC, à linea recta non differre. quod verum non eſt, quando mons tam altus eſt, vt ſpacium 200. vel 300. milliariorum cerni poſſit, quod tunc arcus BC, iuxta ambitum à Ptolemæo poſitum contineat grad. 3. min. 11. vel grad. 4. min. 48. Ac proinde non recte linea tangens AC ex lateribus AB, BC, colligitur. Adde quod per problemata lib. 2. & 3. citata inuenitur perpendicularis BE, in plano, ad quod mons eſt ad angulos rectos. Redigemus rationem hanc ad meliorẽ formam multis vijs, hoc modo. Deprehenſo angulo A, per Quadrantem, vel Quadratum, quando radius viſualis per dioptram circulum terræ tangit. Quod tum denique certiſſime fiet, cum per dioptram conſpicitur Sol, aut alia ſtella, quando oritur, vel occidit. Deprehenſo, inquam, angulo A. inuenienda erit perpendicularis BE, per problemata paulo ante citata [d] Et recta AE, ex duabus AB BE. Si enim ad AE, adijcietur BE, hoc eſt, EC, [e] quæ ipſi BE, æqualis eſt, nota fiet tota tangens AC, ex qua, vt ſupra dictum eſt, & diameter terræ BD, & circumferentia inueſtigabitur. Quin etiam cognito angulo A, ac proinde & eius complemento E, [f] reperietur tam latus BE, [g] quam baſis AE, ſine problematibus ex lib. 2. & 3. citatis &c.

d 47 prim. e 2 coroll. 36. tertij f 4. triang. rectil. g 5. triang. rectil. h 18. tertij. i 4. prim.

VEL ſic agemus. Cognito per dioptram angulo A, cognitus etiam erit (ducta recta FC, [h] quæ ad AC, perpendicularis erit) angulus F, eius complementum in centro. Quia vero ducta recta FE, duo latera EC, CF, duobus lateribus EB, BF, æqualia ſunt, comprehenduntq; angulos æquales, nempe rectos: [i] erunt anguli ad F, æquales. Cum ergo totus angulus BFC, cognitus ſit, vt proxime diximus; cognitus etiam erit BFE, tanquam ſemiſſis ipſius: ac proinde & eius complementum BEF, notum erit. Igitur in triangulo ABE, ex angulis A, E, & latere AB, [k] reperietur BE, in partibus altitudinis montis AB, notæ. Atq; eodem modo in triangulo BEF, ex angulis E, F, & latere BE, cognoſcetur ſemidiameter BF, in partibus lateris BE, hoc eſt, in partibus altitudinis montis AB; ideoq; & tota diameter BD, nota fiet, & ex hac ambitus terræ. quod eſt propoſitum.

k 4. triãg. rectil.

DENIQVE hoc etiam modo idẽ aſſequemur. Cognito per dioptram angulo A, quando radius viſualis terram contingit, cognitus etiam erit angulus AFC, eius complementũ. Ergò huius anguli ſecans AF, cognita erit in partibus ſinus totius FC. Ex qua ſecante, ſi dematur ſinus totus BF, nota relinquetur altitudo montis AB, in partibus ſinus totius BF. Si igitur fiat vt altitudo montis AB, nota in partib' ſinus toti' ad eandẽ AB, notam in data menſura, ita ſinus totus BF, ad aliud; pueniet ſemidiameter BF, nota in partib' altitudinis mõtis, &c.

PROBLE-

PROBL. 21. PROPOS. 35.

PRISMATI cuicunque Cylindrum æqualem, & Pyramidi Conum æqualem: Ac viciſsim Cylindro Priſma æquale, & Cono æqualem Pyramidem conſtituere.

SI baſi priſmatis, vel pyramidis conſtruatur circulus æqualis, per ea quæ ad finem lib. 7. ſcripſimus: Et ſuper hunc circulum extruatur cylindrus vel conus eiuſdem altitudinis cum priſmate, vel pyramide; erit cylindrus priſmati, & conus pyramidi æqualis. Cum enim tam baſes, quam altitudines æquales ſint: producatur autem priſma, & Cylindrus ex baſe in altitudinem multiplicata, & pyramis, atque conus ex tertia parte baſis in altitudinem multiplicata, vt lib. 5. cap. 1. declarauimus; manifeſtum eſt, cylindrum priſmati, & conum pyramidi eſſe æqualem.

SI viciſſim baſi cylindri, vel coni conſtituatur quadratum, aut alia quæuis rectilinea figura æqualis, per ea, quæ ad finem lib. 7. diximus, & ſuper hoc quadratum, aut figuram rectilineam fiat priſma, vel pyramis eiuſdem altitudinis cum cylindro, vel cono, erit priſma cylindro, & pyramis cono æqualis, quod eſt propoſitum.

PROBL. 22. PROPOS. 36.

DATO Cylindro, aut priſmati æqualem conum, vel pyramidem ſub eadem altitudine. Et viciſsim dato cono vel pyramidi æqualem cylindrum, aut priſma eiuſdem altitudinis conſtituere.

[a] SI tam baſis cylindri, quam priſmatis tripletur & ſuper triplicatam extruatur con*, vel pyramis eiuſdem a 16. ſexti.
altitudinis, factum erit, quod in prima parte proponitur. [b] Cum enim cylindrus triplus ſit coni eandem cum illo huius.
baſem & altitudinem habentis: [c] Item priſma triplum pyramidis eandem cum illo baſem, atque altitudinem ha- b 10. duo-
bentis: [d] Sit autem & conus extructus eiuſdem illius coni triplus; nec non & pyramis conſtructa eiuſdem illius decimi.
pyramidis tripla. [e] Erit tam conus extructus cylindro æqualis, quam pyramis conſtructa priſmati, quod eſt pro- c coroll. 7. duodec.
poſitum. d 11. & 6. duodec.

[f] SI viciſſim baſes coni, & pyramidis in tripla proportione minuantur, & ſuper tertias has partes cylin-
drus erigatur, & priſma: Erit tam cylindrus dato cono, quam priſma datæ pyramidi æquale. [g] Quoniam n. tam e 9. quint.
conus datus, quam cylindrus extructus, triplus eſt coni eandem baſem. altitudinemque habentis cum cylindro f 16. ſexti
extructo. [h] Item tam data pyramis, quam priſma extructum, triplum eſt pyramidis eandem habentis baſem, at- huius.
que altitudinem cum priſmate extructo. [i] Erit tam cylindrus extructus dato cono æqualis, quam priſma con- g 11. & 10. duodec.
ſtructum datæ pyramidis æquale, quod eſt propoſitum. h 6. & 7. duodec.
i 9. quint.

COROLLARIVM I.

QVIA igitur [a] omne priſma in cylindrum, & pyramis in conum conuertitur: Et contra cylindrus in a 35. huius
priſma, & conus in pyramidem: [b] Item cylindrus in conum, & priſma in pyramidem: Et contra conus in cylin- b 36. huius
drum, & pyramis in priſma conuerti poteſt; fit vt indifferenter tam cylindrus, quam priſma tranſmutari poſſit in pyramidem, aut conum, ac pyramis in cylindrum, aut priſma æquale.

COROLLARIVM II.

Ex his etiam manifeſte colligitur, omnem cylindrum, ac priſma; ſimiliter & conum, ac pyramidem con-
uerti poſſe in parallelepipedum rectangulum, cuius baſis ſit quadrata. [a] Nam conuerſo cylindro, aut cono, vel a 35. & 36.
pyramide in priſma qualecunque, ſi baſi priſmatis fiat quadratum æquale, & ſupra illud erigatur parallelepipe- huius.
dum eiuſdem altitudinis; [b] erit hoc parallelepipedum priori æquale, ac proinde & propoſito cylindro, vel cono, b 2. corol. 7. duod.
aut pyramidi.

PROBL. 23. PROPOS. 37.

DATVM cylindrum, vel priſma: Similiter datum conum, vel pyramidem cuiuſcunque altitudinis, in æqualem ſub data qualibet alia altitudine, & ſupra baſem quotcunque angulorum, reuocare.

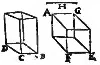
IN proportione, quam data altitudo ad altitudinem propoſiti ſolidi habet, [a] augeatur vel minuatur baſis a 16. ſexti.
eiuſdem ſolidi dati. Nam ſolidum ſupra hanc baſem auctam, vel diminutam ſecundum datam altitudinem con- huius.
ſtructum, erit id, quod quæritur. [b] Erit enim æquale dato ſolido: quippe cum altitudines cum baſibus reciprocæ b 15. & 9.
ſint. Quod ſi baſi conſtructi ſolidi fiat æqualis baſis quotcunque angulorum & ſupra eam conſtituatur ſolidum duodec.
ſub data altitudine; erit hoc etiam ſolidum ſolido propoſito æquale.

PROBL. 24. PROPOS. 38.

DATO parallelepipedo rectangulo cubum æqualem deſcribere.

SI pa-

a 14 ſecun.
b 2. corol. 7. duod.



SI parallelepipedum non habet baſem quadratam,[a] fiat eius baſi quadratum æquale BCD,ſupra quod erigatur parallelepipedum rectangulum eiuſdem altitudinis A, B,cum parallelepipedo dato, [b] quod æquale erit dato parallelepipedo. Huic ergo cubum æqualem conſtruemus hac arte. Inter BC, latus quadrati BD, & AB, altitudinem parallelepipedi, inueniantur duæ mediæ proportionales EF,H:ita vt ſit BC.ad EF,quemadmodum EF,ad H,& H.ad AB.Et ſuper EF,propinquiorem lateri BC,conſtruatur cubus EFG,[c] qui parallelepipedo ABCD æqualis erit.

c lemma 18 ſexti huius.
d 36. vnd.

Quod ſi forte accidat, tres dimenſiones parallelepipedi dati, cuius baſis quadrata non ſit, eſſe continue proportionales; [d] erit cubus ex media deſcriptus parallelepipedo æqualis.

COROLLARIVM.

a 2. coroll. 36. huius.

[a] CVM igitur omnis cylindrus,omne priſma,conus,ac pyramis in rectangulum parallelepipedum poſſit commutari,liquido conſtat,cuilibet ſolido eiuſmodi,cubum poſſe conſtrui æqualem.

PROBL. 25. PROPOS. 39.

DATO cubo æquale parallelepipedum rectangulum ſub data altitudine, vel ſupra datam baſem conſtruere.

a 11. ſexti.
b 36. vnd.

SIT in præcedenti figura datus cubus EFG, & primum data altitudo AB,ſub qua conſtruendum ſit parallelepipedum rectangulum cubo æquale.[a] Altitudini AB,& lateri cubi EF,reperiatur tertia ꝓportionalis BC. Et fiat rectangulum BD,comprehenſum ſub tertia proportionali BC,& recta CD, lateri cubi EF,æquali;erigaturque ſupra BD, parallelepipedum rectangulum ſub data altitudine AB. quod dico cubo eſſe æquale. Quoniam enim parallelepipedum rectangulum ABD,continetur ſub tribus rectis AB,CD,BC,hoc eſt,ſub AB,EF, BC, continue proportionalibus; [b] erit parallelepipedum æquale cubo ex media EF,deſcripto. quod eſt propoſitum.

c 45. prim.
d 1. ſexti.
e 34. vnde.

SIT deinde data baſis BD,quæ ſi non eſt parallelogrammũ , [c] reuocetur ad parallelogrammum æquale. Et quam proportionẽ habet baſis data BD,ad baſem cubi dati,eam habeat latus cubi EF,ad rectam AB. (quod fiet,ſi ſupra latus cubi EF,fiat rectangulũ ęquale baſi BD,& ſuper alterum latus huius rectanguli aliud rectangulum ęquale quadrato lateris cubi EF,[d]Nam tunc erit, vt primum rectangulum,id eſt,baſis BD,ad ſecundum rectangulum,id eſt,ad quadratum;vel baſem cubi,ita primi rectanguli baſis, videlicet EF,ad baſem ſecundi rectãguli.) Nam ſi ſupra baſem BD, erigatur parallelepipedum in altitudine inuenta AB, [e] erunt parallelepipedum, & cubus æqualia:quippe cum baſes,& altitudines ſint reciprocæ,ex conſtructione,quod eſt propoſitum.

COROLLARIVM.

a corol. 38. huius.
b 38 huius
c 39 huius

[a] QVONIAM igitur cuilibet cylindro,priſmati,cono,ac pyramidi parallelepipedum rectangulũ cõſtrui poteſt ęquale:[b] ſi huic parallelepipedo fiat cubus ęqualis;[b]& huic cubo parallelepipedum rectangulum ſub data altitudine,vel baſe data æquale:commutatus erit cylindrus,priſma,conus, ac pyramis in parallelepipedum rectangulum æquale datæ altitudinis,vel baſis.

PROBL. 26. PROPOS. 40.

SPHÆRÆ datæ cubum æqualem:Et dato cubo æqualem ſphæram conſtituere.

a 14. vnd.
b 9. quint.
c corol. 38. huius.

QVONIAM per propoſ.32.lib.1. Archimedis de ſphæra, & cylindro. Cylindrus rectus cuius baſis eſt maximus ſphæræ circulus,& altitudo diametro eiuſdem ſphæræ æqualis, ſeſquialteram habet proportionem ad ſphæram:[a] Habet autẽ idem cylindrus ad cylindrum eiuſdem baſis,cuius altitudo contineat $\frac{4}{3}$.diametri ſphærę, proportionem quoque ſeſquialteram;[b] erit poſterior hic cylindrus ſphæræ æqualis.Si igitur huic cylindro [c] fiat cubus æqualis;erit idem hic cubus datæ ſphæræ æqualis, quod eſt propoſitum.

d 11. duod.
e 9. quint.
f corol. 38. huius.

VEL quia per eandem propoſ.32.Archimedis,ſphæra quadrupla eſt coni,cui⁹ baſis eſt maximus ſphæræ circulus,& altitudo ſemidiametro ſphæræ æqualis: [d] Eſt autem eiuſdem coni quadruplus etiam conus eiuſdem altitudinis,baſem habẽs circuli maximi in ſphæra quadruplam, hoc eſt, baſem habens circulum, cuius ſemidiameter æqualis diametro maximi circuli;[e] erit poſterior hic conus ſphæræ æqualis.[f]Si igitur huic cono fiat cubus æqualis,erit hic idem cubus ſphæræ datæ æqualis,quod eſt propoſitum.

g 40. huius
h ſchol. 37 vndec.
i 33. vnd.
& 18. duo.
k 14. quin.



SIT viciſſim cubo lateris A,conſtruenda ſphęra æqualis:[g] Sphæræ diametri A,fiat æqualis cubus lateris B,atq; duabus rectis B, A, inueniatur tertia proportionalis C. Dico ſphæram diametri C, æqualem eſſe dato cubo lateris A.[h] Nam vt cubus lateris B, ad cubum lateris A; ita eſt cubus lateris A,ad cubum lateris C. Vt autem cub⁹ lateris A,ad cubum lateris C;[i] ita eſt ſphæra diametri A,ad ſphæram diametri C; quod vtraq; proportio triplicata ſit ꝓportionis A,ad C.Igitur erit quoq;,vt cubus lateris B,ad cubũ lateris A, ita ſphæra diametri A,ad ſphæram diametri C,Eſt autem cubus lateris B,per conſtructionem,æqualis ſphærę diametri A. [k]Igitur & cubus lateris A, æqualis eſt ſphærę diametri C, quod eſt propoſitum.

COROL-

COROLLARIVM. I.

QVIA vero [a] ſi baſi cubi fiat æqualis figura quotcunque laterum, ſiue ea regularis ſit, ſiue non; & ſupra a 25 ſexti.
hanc figuram erigatur ſolidum rectangulum ad altitudinem cubi, [b] ſolidum hoc cubo eſt æquale, fit vt ſphæræ b 2. coroll.
datæ conſtrui poſſit æquale ſolidum rectangulum ſupra baſem quotlibet angulorum; [c] ſi nimirũ prius conſtrua- 7. duodec.
tur cubus æqualis; deinde huic cubo ſolidum rectangulũ æquale, vt proxime dictum eſt. [d] Item quia cuicunque c 40. huius
priſmati pyramis conſtrui poteſt æqualis; ſi cubo, qui ſphæræ eſt æqualis, tanquam priſmati, fiat pyramis æqualis; d 36. huius
erit quoq; eadem pyramis ſphæræ æqualis [e] Immo quoniam cuilibet cylindro conus fieri poteſt æqualis: ſi cy- e 36. huius
lindrus extruatur ſphæræ æqualis, ſupra baſem videlicet maximo circulo in ſphæra æqualem, & cuius altitudo
contineat $\frac{2}{3}$. diametri, vt ad initium huius propoſ. oſtendimus: Deinde huic cylindro conus æqualis; conſtitutus
erit conus quoque datæ ſphæræ æqualis.

VICISSIM [f] quia cuilibet priſmati conſtrui poteſt cubus æqualis: [g] Si huic cubo fiat æqualis ſphæra, e- f 37. huius
rit eadem hæc ſphæra conſtituta æqualis dato priſmati ſupra baſem quotcunq; angulorum. g 40. huius

COROLLARIVM. II.

QVIN etiam colligitur, poſſe ſphæram conſtrui æqualem cuilibet corpori regulari. Nam de cubo qui-
dem oſtenſum eſt hac propoſ. 40. De Tetraedro vero, ſiue Pyramide regulari patet. Nam ſi Pyramidi [a] fiat Paral-
lelepipedum æquale; [b] Et huic parallelepipedo cubus æqualis; Ac tandem huic cubo fabricetur ſphæra æqualis; a 2. coroll. 36. huius.
erit eadem hæc ſphæra Tetraedro, ſiue pyramidi regulari æqualis. De Octaedro autem, Icoſaedro & Dodecae- b 38. huius
dro ita res peragetur. Si omnibus baſibus corporis regularis fiat quadratum æquale, per ea, quæ ad finem lib. 2.
Eucl. vel potius per ea, quæ lib. 4. huius Geometriæ cap. 4. Num. 4. tradidimus; & ſuper hoc quadratum fiat py-
ramis habens altitudinem æqualem perpendiculari è centro corporis ad quamlibet baſem ductæ, hoc eſt, altitu-
dini vnius pyramidis ex ijs, in quas corpus diuiditur è centro: [c] Erit hęc pyramis corpori regulari ęqualis; [d] quip- c 9. quin.
pe cum ita ſe habeat tam pyramis hæc quadrilatera ad vnam pyramidẽ corporis regularis, quam omnes pyrami- d 6. duod.
des corporis regularis ad vnam pyramidẽ, vt baſis illius, vel baſes omnium pyramidũ corporis, ad vnam baſem;
propterea quod in Octaedro proportio eſt vtrobiq; octupla: In Icoſaedro, vigecupla: Et in Dodecaedro, duode-
cupla. Quare ſi toti illi pyramidi cubus conſtruatur æqualis, vt paulo ante de Tetraedro dictum eſt: atque huic
tandem cubo ſphæra æqualis fabricetur; erit eadem ſphæra illi pyramidi, hoc eſt, corpori regulari æqualis.

PROBL. 27. PROPOS. 41.

DVOBVS aut pluribus cubis vnum cubum æqualem efficere.

SI ſupra baſem ſuperiorem primi cubi, [a] conſtruatur parallelepipedum rectangulũ ſecundo cubo æqua- a 39. huius
le, vt fiat vnum parallelepipedum duobus cubis æquale: Et ſupra huius parallelepipedi baſem ſuperiorem aliud
parallelepipedum æquale tertio cubo, & ſic deinceps, ſi plures adſint cubi; conſtructum erit parallelepipedum
propoſitis cubis æquale. Huic ergo [b] ſi fiat cubus æqualis, factum erit, quod proponitur. b 38. huius

SCHOLIVM.

EADEM arte quotlibet figuris ſolidis non cubis, conſtruetur cubus æqualis: [a] ſi nimirum reuocentur a 37. huius
ad vnum parallelepipedum, &c.

PROBL. 28. PROPOS. 42.

DATO cubo, corpus regulare, quod ex quinq; elegeris, æquale conſtruere.

SIT datus cubus, cuius latus A, cui verbi gratia conſtruendum ſit æquale Dodecaedrum. [a] Fiat quotcun- a 17. tertij decimi.
que Dodecaedrum, cuius latus B: cui per ea, quæ in 2. coroll. præcedentis pro-
poſ. dicta ſunt, fiat ęqualis cubus, cuius latus C. [b] Et tribus lateribus C, A, B, re- C. A. B. D.
periatur quarta proportionalis D. Dico Dodecaedrum ſupra latus D, conſtru- b 12. ſexti.
ctum, æquale eſſe dato cubo lateris A. Quoniam enim, vt ex demonſtratione propoſ. 37. lib. 11. Euclid. patet, ita
eſt cubus lateris C, ad cubum lateris A, vt Dodecaedrum lateris B, ad Dodecaedrum lateris D: Eſt autem per cõ-
ſtructionem, cubus lateris C, æqualis Dodecaedro lateris B; [c] erit quoque cubus lateris A, Dodecaedro lateris c 14. quin.
D, æqualis, quod eſt propoſitum.

PROBL. 29. PROPOS. 43.

EX maiori cubo detrahere minorem, reſiduoque cubum æqualem exhibere.

SVPRA baſem maioris cubi [a] conſtruatur parallelepipedum cubo minori ęquale. Et ex latere cubi ma- a 39 huius
ioris abſcindatur recta æqualis altitudini conſtructi parallelepipedi. Si n. per punctũ abſciſſionis ducatur planũ

baſibus cubi parallelum, detractum erit parallelepipedum parallelepipedo conſtructo æquale, cum habeat eandem baſem & altitudinem cum illo hoc eſt, minori cubo æquale. [a] Si igitur reliquo parallelepipedo fiat cubus æqualis, factum erit, quod proponitur.

a 38. huius

S C H O L I V M.

a 1. & 2. coroll. 36. huius. b 35. huius

IDEM fieri poteſt in alijs figuris ſolidis; [a] ſi prius reducantur ad parallelepipeda rectangula, quando non ſunt parallelepipeda. [b] & deinde parallelepipeda ad cubos, &c.

PROBL. 30. PROPOS. 44.

DATIS duabus, aut pluribus ſphæris, ſphæram vnam æqualem conſtituere.

a 40. huius b 41. huius c 40. huius

SPHÆRIS propoſitis [a] conſtruantur cubi æquales: [b] His deinde vnus cubus æqualis fiat, qui etiam ſphæris datis erit æqualis. [c] Si igitur huic cubo extruatur ſphæra æqualis; factum erit, quod iubetur.

PROBL. 31. PROPOS. 45.

EX maiori ſphæra minorem ſphæram detrahere, reſiduoq; ſphæram æqualem exhibere.

a 40. huius b 43. huius c 40. huius

[a] VTRAQVE ſphæra in cubum reuocetur. [b] Detracto deinde minore ex maiore, [c] ſi reſiduo ſphæra fiat æqualis; factum erit, quod proponitur.

PROBL. 32. PROPOS. 46.

DATVM cubum, aut parallelepipedum, ſecundum proportionem datam ſecare.

a 32. vnde b 1. ſexti.

SI namque vnum latus in baſe cubi, aut parallelepipedi ſecetur ſecundum datam proportionem, & per punctum ſectionis ducatur planum duabus baſibus erecti ſolidi parallelum, diuidẽs ipſum ſolidum in duo parallelepipeda: habebunt hæc parallelepipeda datam proportionem. [a] Habent enim proportionem inter ſe eandem, quam baſes, [b] Cum ergo baſes habeant eandem proportionem, quam ſegmenta lateris ſecundam datam proportionem diuiſi; conſtat id, qnod propoſitum eſt.

S C H O L I V M.

a ſchol. 14. duodec. b 14. duod.

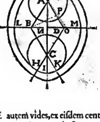
NON aliter priſma quodlibet, aut cylindrus ſecundum datam proportionem ſecabitur, ſi altitudo in datam ſecetur proportionem, & per punctum ſectionis planum ducatur baſibus parallelum. Hoc enim ſecabit [a] tam priſma, [b] quam cylindrum in datam proportionem.

PROBL. 33. PROPOS. 47.

FIGVRAM Ellipſi ſimilem, quam ouatam dicunt, circino deſcribere.

a 15 primi. b ſchol. 13. tertij.

LIBET miſcellaneorum hunc librum peruulgato illo problemate concludere. quo artifices ope circini deſcribere ſolent figuram ouatam Ellipſi ſimilem, ita vt nullibi anguli appareant: eum non raro eiuſmodi figura à Geometris in ſuis delineationibus adhibeatur. Docui quidem in lib. 1. noſtræ Gnomonicæ in ſcholio propoſ. 8. qua ratione vera Ellipſis, quæ conica ſectio eſt, deſcribenda ſit: Sed hic ſimilem figuram ex ſegmentis circulorum conſtantem deſcribendam propoſuimus. Ita ergo, vt ex varijs ſcriptoribus colligitur, agemus. Conſtruantur duo triangula æquilatera, vel Iſoſcelia ſupra baſem communem AC, in diuerſas partes ABC, ADC. (Æquilatera venuſtiorem faciunt figuram, vt experientia te docebit) productiſque lateribus, deſcribantur ex A, C, duo arcus EFG, HIK, vſque ad latera producta. Si namque ex B, D, per E, K, G, H, alij arcus deſcribantur, [b] tangent hi priores arcus in punctis E, K, G, H: ac proinde illos non ſecabunt, conſtitutaq; erit figura ouata.



BENE autem vides, ex eiſdem centris A, B, C, D, deſcribi poſſe varias figuras, pront arcus EFG, HIK, maiores fuerint, aut minores, vt in figura apparet.

QVOD ſi triangula conſtituta ſint Iſoſcelia, poterunt latera AB, CB, &c. vel maiora fieri baſe AC, vel minora. In figura noſtra ſunt minora.

POTES

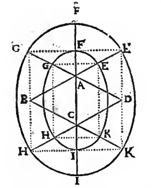
POTES etiam, ſi placet, primo loco ex centris B, D, deſcribere arcus EMK, GLH, ad quodcunque interuallum, pro latitudine figuræ deſcribendæ: deinde ex centris A, C, minores arcus delineare EFG, HIK.

QVIN etiam ſine conſtructione triangulorum idem efficiemus hoc modo. Ductis duabus rectis AC, BD, ad angulos rectos ſe ſecantibus in N; ſumptiſq; æqualibus NA, NC, quantiſcunq; pro longitudine figuræ, deſcribantur ex A, C, arcus circulorum EFG, HIK, parui, aut magni, prout deſideras extremitates figuræ ſecundum longitudinem habere anguſtiores, latioreſue. Deinde acceptis alijs duabus rectis ęqualib⁹ NB, ND, quantiſcunque, (quo autem puncta B, D, remotiora fuerint ab N, eo anguſtior figura euadet: & quo minus remota, eo latior. Sed vſus magiſter optimus facile docebit, quantæ debeant eſſe rectæ NB, ND,) ducantur ex B, D, per centra A, C, rectæ ſecantes priores arcus in E, K, &c. Nam ſi ex B, D, per puncta EK, &c. alij duo arcus deſcribantur, perfecta erit figura Ellipſi ſimilis.

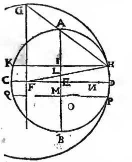
VT autem videas, venuſtiores figuras deſcribi, ſi triangula ABC, ADC, ſint æquilatera, quæ fere ratio ab artifiribus ſeruari ſolet, deſcripſimus hic duas figuras. In minori eſt latus BA, rectæ AE, duplum, in maiori vero æquale, &c.

Area figuræ ouatæ hic deſcripta.

IAM vero area figurę ouatę, beneficio trianguli æquilateri deſcriptæ, quam artifices non raro expetūt, facile inuenietur, hoc modo. Sector BEK, eſt ſexta pars circuli, cuius ſemidiameter BE, nota, nimirum latus trianguli ęquilateri BEK, quod eſt in maiori figura duplum lateris AB, aſſumpti ad libitum: in minori vero ſeſquialterum eſt eiuſdem lateris AB. Inuenta ergo area illius circuli, vt lib. 4. cap. 7. docuimus, ſi ex eius ſexta parte dematur triangulum æquilaterum BEK, cuius area reperietur per ea, quæ in eodem lib. 4. cap. 2. Num. 5. tradita ſunt: reliquum fiet ſegmentum EK, ac proinde & GH, notū. Item ſector AGE, eſt pars tertia circuli, cuius ſemidiameter AG, nota, nimirum vel æqualis lateri aſſumpto AB, vel ſemiſſis ipſius. Si igitur ex tertia parte areæ illius circuli auferatur area Iſoſcelis AGE, quæ reperietur per ea, quæ lib. 4. cap. 2. Num. 4. ſcripſimus: remanebit ſegmentum GFE, notum, ideoque & ſegmentum HIK. Quocirca ſi quatuor ſegmentis cognitis adijciatur area rectanguli EGHK, cognita erit area totius figuræ. Cognoſcetur autem area huius rectanguli ex doctrina cap. 1. lib. 4. cum latus EK, chorda ſit ſextæ partis circuli, hoc eſt, ſemidiametro æquale: at EF, ſit ſinus grad. 60. id eſt, ſemiſſis chordæ grad. 120.



VERVM quia hac ratione deſcribi nequit figura ad datam longitudinem, latitudinemque; (quoniam ſi longitudo eligatur FI, ignotum erit, quanta ſit futura latitudo: propterea quod arcus ex B, D, deſcripti raro tranſeunt per electa puncta latitudinis: Si vero eligatur latitudo LM, in prima figura, ignorabitur futura longitudo: quippe cum arcus ex A, C, deſcripti raro etiam per electa puncta longitudinis tranſeāt: vt perſpicuum eſt.) docebimus cum Ioan. Baptiſta Benedicto, quo pacto, data tam longitudine, quam latitudine figura Ellipſi ſimilis deſcribenda ſit. Sit ergo data longitudo AB, & latitudo CD, quæ ſe bifariam, & ad rectos angulos ſecent in E. Ex latitudine CD, abſcindatur recta DF, quantacunque vltra E, maior tamen interuallo inter punctum F, & A, extremum longitudinis. Hoc enim niſi fiat, deſcribi non poterit figura ouata. Deinde centro F, & interuallo FD, deſcribatur circulus DG, qui neceſſario vltra punctum A, tranſibit, quippe cum ſemidiameter FD, maior poſita ſit interuallo FA. Ducta autem FG, longitudini AB, parallela ſecante circulum deſcriptum in G; ducatur ex G, per A, recta ſecans eundem circulum in H, puncto, è quo ducatur HIK, latitudini CD, parallela, iungaturque HF, ſecans AB, longitudinem in L; eruntque FG, FH, æquales è centro F, ad circumferentiam. [a] Et quia triangula HGF, HAL, ſimilia ſunt; [b] erit vt GF, ad FH, ita AL, ad LH. Cum ergo GF, ipſi FH, ſit æqualis; erit quoque AL, ipſi LH, æqualis. Circulus ergo AH, ex L, per A, deſcriptus tranſibit per H, [c] ibique priorem circulum DG, tanget. Si igitur capiatur EO, æqualis ipſi EI, & EM, ipſi EL, ducaturque POQ, per O rectæ CD, parallela, atque ex M, centro, interuallo autem LH, vel MP, circulus PBQ, deſcribatur, tanget hic quoque priorem circulum in P. Si denique ſumpta EN, ipſi EF, æquali, deſcribatur ex N, ad interuallum FD, prioris circuli circulus KCQ, tanget hic circulos HAK, PBQ, in K, Q, perfectaque erit figura ouata.



a coroll. 4. ſexti.
b 4. ſexti.
c ſchol. 13. tertij.

SED quia, vt dictum eſt, conſtatq; ex deſcriptione, niſi latitudo CD, tanta ſit, vt ex ea abſcindi poſſit recta DF, maior interuallo FA, figura hac ratione deſcribi nequit: adeo vt longitudo, ac latitudo ad libitum aſſumi non poſſint; inſtituetur operatio alio modo, ſumpta quacunque longitudine AB, & latitudine CD. Secent ſe in prima figura longitudo, latitudoq; FI, LM, datæ mutuo bifariam in N, & ad angulos rectos, & ſumantur rectæ FA, IC, æquales, & minores ſemiſſe latitudinis LN; deſcribanturque ex A, & C, per F, & I, circuli EFG, HIK.

Sumpta deinde MO, ſemidiametro AF, æquali, iungatur OA, ex O, ad centrum A, quam bifariam, & ad angulos rectos in P, ſecet recta PB, ſecans LM, etiam productam, ſi opus eſt, in B. ducaturque BA, vſque ad circulum GFE. Et quoniam duo latera OP, PB, duobus lateribus AP, PB æqualia ſunt, anguloſq; continent rectos, id eſt, a 4. prim. æquales:[a] erunt baſes OB, AB, æquales; additiſque æqualibus OM, AE, (ſumpta namq; fuit MO, æqualis ſemidiametro FA, vel IC,) totæ BE, BM, æquales erunt. Deſcriptus ergo circulus ex B, per M, tranſibit per E,[b] ibique b ſchol 13. tertij. circellum GFE tanget. Eodemque modo circellum HIK, tanget. Si igitur ſumpta ND, ipſi NB, æquali, deſcribatur ex D, per L, circulus tangens eoſdem priores circellos in G, H, abſoluta erit figura.

QVO autem ſemidiameter FA, ſumpta fuerit minor, quam MN, eo certius centrũ B, reperietur, vt liquet.

SCHOLIVM.

ROGATV multorum placet Epilogi loco apponere tabulam quadratorum, & cuborum, qui ex numeris ab 1. vſq; ad 1000. producuntur: propterea quod huiuſce tabulæ multiplex, & inſignis eſt vſus cum in alijs rebus Mathematicis, tum vero maxime in radicibus quadratis, & cubicis ex magnis numeris extrahendis, vt poſt tabulam paucis exponam. Non extendi autem tabulam vltra radicem 1000. contentus radicibus tres figuras nõ ſuperantibus: propterea quod ſi extenderetur vſque ad radicem 10 000. vt radices haberentur quatuor figurarum, decies maior tabula conficienda eſſet. Si quis tamen eam extendere volet, inueniet ad finem tabulæ regulas, quibus id facile poſſit exequi. Quamuis quadratorum tabulam Doctiſſimus Maginus in ſua tabula Tetragonica vſque ad radicem. 10000. promouerit.

SEQVITVR TABVLA QVADRATORVM, & Cuborum, quorum radices maiores non ſunt, quam 1000.

TABVLA

Tabula Quadratorum, & Cuborum.

Radices	Quadrati.	Cubi	Radices	Quadrati.	Cubi	Radices	Quadrati.	Cubi
1	1	1	61	3721	226981	121	14641	1771561
2	4	8	62	3844	238328	122	14884	1815848
3	9	27	63	3969	250047	123	15129	1860867
4	16	64	64	4096	262144	124	15376	1906624
5	25	125	65	4225	274625	125	15625	1953125
6	36	216	66	4356	287496	126	15876	2000376
7	49	343	67	4489	300763	127	16129	2048383
8	64	512	68	4624	314432	128	16384	2097152
9	81	729	69	4761	328509	129	16641	2146689
10	100	1000	70	4900	343000	130	16900	2197000
11	121	1331	71	5041	357911	131	17161	2248091
12	144	1728	72	5184	373248	132	17424	2299968
13	169	2197	73	5329	389017	133	17689	2352637
14	196	2744	74	5476	405224	134	17956	2406104
15	225	3375	75	5625	421875	135	18225	2460375
16	256	4096	76	5776	438976	136	18496	2515456
17	289	4913	77	5929	456533	137	18769	2571353
18	324	5832	78	6084	474552	138	19044	2628072
19	361	6859	79	6241	493039	139	19321	2685619
20	400	8000	80	6400	512000	140	19600	2744000
21	441	9261	81	6561	531441	141	19881	2803221
22	484	10648	82	6724	551368	142	20164	2863288
23	529	12167	83	6889	571787	143	20449	2924207
24	576	13824	84	7056	592704	144	20736	2985984
25	625	15625	85	7225	614125	145	21025	3048625
26	676	17576	86	7396	636056	146	21316	3112136
27	729	19683	87	7569	658503	147	21609	3176523
28	784	21952	88	7744	681472	148	21904	3241792
29	841	24389	89	7921	704969	149	22201	3307949
30	900	27000	90	8100	729000	150	22500	3375000
31	961	29791	91	8281	753571	151	22801	3442951
32	1024	32768	92	8464	778688	152	23104	3511808
33	1089	35937	93	8649	804357	153	23409	3581577
34	1156	39304	94	8836	830584	154	23716	3652264
35	1225	42875	95	9025	857375	155	24025	3723875
36	1296	46656	96	9216	884736	156	24336	3796416
37	1369	50653	97	9409	912673	157	24649	3869893
38	1444	54872	98	9604	941192	158	24964	3944312
39	1521	59319	99	9801	970299	159	25281	4019679
40	1600	64000	100	10000	1000000	160	25600	4096000
41	1681	68921	101	10201	1030301	161	25921	4173281
42	1764	74088	102	10404	1061208	162	26244	4251528
43	1849	79507	103	10609	1092727	163	26569	4330747
44	1936	85184	104	10816	1124864	164	26896	4410944
45	2025	91125	105	11025	1157625	165	27225	4492125
46	2116	97336	106	11236	1191016	166	27556	4574296
47	2209	103823	107	11449	1225043	167	27889	4657463
48	2304	110592	108	11664	1259712	168	28224	4741632
49	2401	117649	109	11881	1295029	169	28561	4826809
50	2500	125000	110	12100	1331000	170	28900	4913000
51	2601	132651	111	12321	1367631	171	29241	5000211
52	2704	140608	112	12544	1404928	172	29584	5088448
53	2809	148877	113	12769	1442897	173	29929	5177717
54	2916	157464	114	12996	1481544	174	30276	5268024
55	3025	166375	115	13225	1520875	175	30625	5359375
56	3136	175616	116	13456	1560896	176	30976	5451776
57	3249	185193	117	13689	1601613	177	31329	5545233
58	3364	195112	118	13924	1643032	178	31684	5639752
59	3481	205379	119	14161	1685159	179	32041	5735339
60	3600	216000	120	14400	1728000	180	32400	5832000

Tabula Quadratorum, & Cuborum.

Radices	Quadrati.	Cubi	Radices	Quadrati.	Cubi	Radices	Quadrati.	Cubi
361	130321	47045881	421	177241	74618461	481	231361	111284641
362	131044	47437928	422	178084	75151448	482	232324	111980168
363	131769	47832147	423	178929	75686967	483	233289	112678587
364	132496	48228544	424	179776	76225024	484	234256	113379904
365	133225	48627125	425	180625	76765625	485	235225	114084125
366	133956	49027896	426	181476	77308776	486	236196	114791256
367	134689	49430863	427	182329	77854483	487	237169	115501303
368	135424	49836032	428	183184	78402752	488	238144	116214272
369	136161	50243409	429	184041	78953589	489	239121	116930169
370	136900	50653000	430	184900	79507000	490	240100	117649000
371	137641	51064811	431	185761	80062991	491	241081	118370771
372	138384	51478848	432	186624	80621568	492	242064	119095488
373	139129	51895117	433	187489	81182737	493	243049	119823157
374	139876	52313624	434	188356	81746504	494	244036	120553784
375	140625	52734375	435	189225	82312875	495	245025	121287375
376	141376	53157376	436	190096	82881856	496	247016	122023936
377	142129	53582633	437	190969	83453453	497	247009	122763473
378	142884	54010152	438	191844	84027672	498	248004	123505992
379	143641	54439939	439	192721	84604519	499	249001	124251499
380	144400	54872000	440	193600	85184000	500	250000	125000000
381	145161	55306341	441	194481	85766121	501	251001	125751501
382	145924	55742968	442	195364	86350888	502	252004	126506008
383	146689	56181887	443	196249	86938307	503	253009	127263527
384	147456	56623104	444	197136	87528384	504	254016	128024064
385	148225	57066625	445	198025	88121125	505	255025	128787625
386	148996	57512456	446	198916	88716536	506	256036	129554216
387	149769	57960603	447	199809	89314623	507	257049	130323843
388	1[illegible]0544	58411072	448	200704	89915392	508	258064	131096512
389	151321	58863869	449	201601	90518849	509	259081	131872229
390	152100	59319000	450	202500	91125000	510	260100	132651000
391	152881	59776471	451	203401	91733851	511	261121	133432831
392	153664	60236288	452	204304	92345408	512	262144	134217728
393	154449	60698457	453	205209	92959677	513	263169	135005697
394	155236	61162984	454	206116	93576664	514	264196	135796744
395	156025	61629875	455	207025	94196375	515	265225	136590875
396	156816	62099136	456	207936	94818816	516	266256	137388096
397	157609	62570773	457	208849	95443993	517	267289	138188413
398	158404	63044792	458	209764	96071912	518	268324	138991832
399	159201	63521199	459	210681	96702579	519	269361	139798359
400	160000	64000000	460	211600	97336000	520	270400	140608000
401	160801	64481201	461	212521	97972181	521	271441	141420761
402	161604	64964808	462	213444	98611128	522	272484	142236648
403	162409	65450827	463	214369	99252847	523	273529	143055667
404	163216	65939264	464	215296	99897344	524	274576	143877824
405	164025	66430125	465	216225	100544625	525	275625	144703125
406	164836	66923416	466	217156	101194696	526	276676	145531576
407	165649	67419143	467	218089	101847563	527	277729	146363183
408	166464	67917312	468	219024	102503232	528	278784	147197952
409	167281	68417929	469	219961	103161709	529	279841	148035889
410	168100	68921000	470	220900	103823000	530	280900	148877000
411	168921	69426531	471	221841	104487111	531	281961	149721291
412	169744	69934528	472	222784	105154048	532	283024	150568768
413	170569	70444997	473	223729	105823817	533	284089	151419437
414	171396	70957944	474	224676	106496424	534	285156	152273304
415	172225	71473375	475	225625	107171875	535	286225	153130375
416	173056	71991296	476	226576	107850176	536	287296	153990656
417	173889	72511713	477	227529	108531333	537	288369	154854153
418	174724	73034632	478	228484	109215352	538	289444	155720872
419	175561	73560059	479	229441	109902239	539	290521	156590819
420	176400	74088000	480	230400	110592000	540	291600	157464000

Tabula Quadratorum, & Cuborum.

Radices	Quadrati.	Cubi	Radices	Quadrati.	Cubi	Radices	Quadrati.	Cubi
541	292681	158340421	601	361201	217081801	661	436921	288804781
542	293764	159220088	602	362404	218167208	662	438244	290117528
543	294849	160103007	603	363609	219256227	663	439569	291434247
544	295936	160989184	604	364816	220348864	664	440896	292754944
545	297025	161878625	605	366025	221445125	665	442225	294079625
546	298116	162771336	606	367236	222545016	666	443556	295408296
547	299209	163667323	607	368449	223648543	667	444889	296740963
548	300304	164566592	608	369664	224755712	668	446224	298077632
549	301401	165469149	609	370881	225866529	669	447561	299418309
550	302500	166375000	610	372100	226981000	670	448900	300763000
551	303601	167284151	611	373321	228099131	671	450241	302111711
552	304704	168196608	612	374544	229220928	672	451584	303464448
553	305809	169112377	613	375769	230346397	673	452929	304821217
554	306916	170031464	614	376996	231475544	674	454276	306182024
555	308025	170953875	615	378225	232608375	675	455625	307546875
556	309136	171879616	616	379456	233744896	676	456976	308915776
557	310249	172808693	617	380689	234885113	677	458329	310288733
558	311364	173741112	618	381924	236029032	678	459684	311665752
559	312481	174676879	619	383161	237176659	679	461041	313046839
560	313600	175616000	620	384400	238328000	680	462400	314432000
561	314721	176558481	621	385641	239483061	681	463761	315821241
562	315844	177504328	622	386884	240641848	682	465124	317214568
563	316969	178453547	623	388129	241804367	683	466489	318611987
564	318096	179406144	624	389376	242970624	684	467856	320013504
565	319225	180362125	625	390625	244140625	685	469225	321419125
566	320356	181321496	626	391876	245314376	686	470596	322828856
567	321489	182284263	627	393129	246491883	687	471969	324242703
568	322624	183250432	628	394384	247673152	688	473344	325660672
569	323761	184220009	629	395641	248858189	689	474721	327082769
570	324900	185193000	630	396900	250047000	690	476100	328509000
571	326041	186169411	631	398161	251239591	691	477481	329939371
572	327184	187149248	632	399424	252435968	692	478864	331373888
573	328329	188132517	633	400689	253636137	693	480249	332812557
574	329476	189119224	634	401956	254840104	694	481636	334255384
575	330625	190109375	635	403225	256047875	695	483025	335702375
576	331776	191102976	636	404496	257259456	696	484416	337153536
577	332929	192100033	637	405769	258474853	697	485809	338608873
578	334084	193100552	638	407044	259694072	698	487204	340068392
579	335241	194104539	639	408321	260917119	699	488601	341532099
580	336400	195112000	640	409600	262144000	700	490000	343000000
581	337561	196122941	641	410881	263374721	701	491401	344472101
582	338724	197137368	642	412164	264609288	702	492804	345948408
585	339889	198155287	643	413449	265847707	703	494209	347428927
584	341056	199176704	644	414736	267089984	704	495616	348913664
585	342225	200201625	645	416025	268336125	705	497025	350402625
586	343396	201230056	646	417316	269586136	706	498436	351895816
587	344569	202262003	647	418609	270840023	707	499849	353393243
588	345744	203297472	648	419904	272097792	708	501264	354894912
589	346921	204336469	649	421201	273359449	709	502681	356400829
590	348100	205379000	650	422500	274625000	710	504100	357911000
591	349281	206425071	651	423801	275894451	711	505521	359425431
592	350464	207474688	652	425104	277167808	712	506944	360944128
593	351649	208527857	653	426409	278445077	713	508369	362467097
594	352836	209584584	654	427716	279726264	714	509796	363994344
595	354025	210644875	655	429025	281011375	715	511225	365525875
596	355216	211708736	656	430336	282300416	716	512656	367061696
597	356409	212776173	657	431649	283593393	717	514089	368601813
598	357604	213847192	658	432964	284890312	718	515524	370146232
599	358801	214921799	659	434281	286191179	719	516961	371694959
600	360000	216000000	660	435600	287496000	720	518400	373248000

Tabula Quadratorum, & Cuborum.

Radices	Quadrati.	Cubi	Radices	Quadrati.	Cubi	Radices	Quadrati.	Cubi
721	519841	374805361	781	609961	476379541	841	707281	594823321
722	521284	376367048	782	611524	478211768	842	708964	596947688
723	522729	377933067	783	613089	480048687	843	710649	599077107
724	524176	379503424	784	614656	481890304	844	712336	601211584
725	525625	381078125	785	616225	483736625	845	714025	603351125
726	527076	382657176	786	617796	485587656	846	715716	605495736
727	528529	384240583	787	619369	487443403	847	717409	607645423
728	529984	385828352	788	620944	489303872	848	719104	609800192
729	531441	387420489	789	622521	491169069	849	720801	611960049
730	532900	389017000	790	624100	493039000	850	722500	614125000
731	534361	390617891	791	625681	494913671	851	724201	616295051
732	535824	392223168	792	627264	496793088	852	725904	618470208
733	537289	393832837	793	628849	498677257	853	727609	620650477
734	538756	395446904	794	630436	500566184	854	729316	622835864
735	540225	397065375	795	632025	502459875	855	731025	625026375
736	541696	398688256	796	633616	504358336	856	732736	627222016
737	543169	400315553	797	635209	506261573	857	734449	629422793
738	544644	401947272	798	636804	508169592	858	736164	631628712
739	546121	403583419	799	638401	510082399	859	737881	633839779
740	547600	405224000	800	640000	512000000	860	739600	636056000
741	549081	406869021	801	641601	513922401	861	741321	638277381
742	550564	408518488	802	643204	515849608	862	743044	640503928
743	552049	410172407	803	644809	517781627	863	744769	642735647
744	553536	411830784	804	646416	519718464	864	746496	644972544
745	555025	413493625	805	648025	521660125	865	748225	647214625
746	556516	415160936	806	649636	523606616	866	749956	649461896
747	558009	416832723	807	651249	525557943	867	751689	651714363
748	559504	418508992	808	652864	527514112	868	753424	653972032
749	561001	420189749	809	654481	529475129	869	755161	656234909
750	562500	421875000	810	656100	531441000	870	756900	658503000
751	564001	423564751	811	657721	533411731	871	758641	660776311
752	565504	425259008	812	659344	535387328	872	760384	663054848
753	567009	426957777	813	660969	537367797	873	762129	665338617
754	568516	428661064	814	662596	539353144	874	763876	667627624
755	570025	430368875	815	664225	541343375	875	765625	669921875
756	571536	432081216	816	665856	543338496	876	767376	672221376
757	573049	433798093	817	667489	545338513	877	769129	674526133
758	574564	435519512	818	669124	547343432	878	770884	676836152
759	576081	437245479	819	670761	549353259	879	772641	679151439
760	577600	438976000	820	672400	551368000	880	774400	681472000
761	579121	440711081	821	674041	553387661	881	776161	683797841
762	580644	442450728	822	675684	555412248	882	777924	686128968
763	582169	444194947	823	677329	557441767	883	779689	688465387
764	583696	445943744	824	678976	559476224	884	781456	690807104
765	585225	447697125	825	680625	561515625	885	783225	693154125
766	586756	449455096	826	682276	563559976	886	784996	695506456
767	588289	451217663	827	683929	565609283	887	786769	697864103
768	589824	452984832	828	685584	567663552	888	788544	700227072
769	591361	454756609	829	687241	569722789	889	790321	702595369
770	592900	436533000	830	688900	571787000	890	792100	704969000
771	594441	458314011	831	690561	573856191	891	793881	707347971
772	595984	460099648	832	692224	575930368	892	795664	709732288
773	597529	461889917	833	693889	578009537	893	797449	712121957
774	590076	463684824	834	695556	580093704	894	799236	714516984
775	600625	465484375	835	697225	582182875	895	801025	716917375
776	602176	467288576	836	698896	584277056	896	802816	719323136
777	603729	469097433	837	700569	586376253	897	804609	721734273
778	605284	470910952	838	702244	588480472	898	806404	724150792
779	606841	472729139	839	703921	590589719	899	808201	726572699
780	608400	474552000	840	705600	592704000	900	810000	729000000

Tabula Quadratorum, & Cuborum.

Radices	Quadratus.	Cubi	Radices	Quadrati.	Cubi	Radices	Quadrati.	Cubi
901	811801	731432701	933	874225	817400375	969	938961	909853209
902	813604	733870808	936	876096	820025856	970	940900	912673000
903	815409	736314327	937	877969	822636933	971	942841	913498611
904	817216	738763264	938	879844	825293672	972	944784	918330048
903	819023	741217625	939	881721	827936019	973	946729	921167317
906	820836	743677416	940	883600	830584000	974	948676	924010424
907	822649	746142643	941	885481	833237621	973	950623	926839375
908	824464	748613312	942	887364	835896888	976	952376	929714176
909	826281	751089429	943	889249	838561807	977	954329	932574833
910	828100	753571000	944	891136	841232384	978	956484	933441352
911	829921	756058031	943	893025	843908625	979	958441	938313739
912	831744	758330528	946	894916	846390536	980	960400	941192000
913	833569	761048497	947	896809	849278213	981	962361	944076141
914	835396	763351944	948	898704	851971392	982	964324	946966168
915	837225	766060875	949	900601	854670349	683	966289	949862087
916	839056	768575296	930	902500	857375000	984	968236	932763904
917	840889	771095213	951	904401	860085331	985	970225	935671625
918	842724	773620632	952	906304	862801408	986	972196	958583256
919	844561	776131559	953	908209	863523177	987	974169	961504803
920	846400	778688008	954	910116	868250664	988	976144	964430272
921	848241	781229961	955	912025	870983875	989	978121	967361669
922	850084	783777448	956	913936	873722816	990	980100	970299000
923	831929	786330467	957	915849	876467493	991	982081	973242271
924	853776	788889024	958	917764	879217912	992	984064	976191488
923	855625	791453125	959	919681	881974079	993	986049	979146657
926	857476	794022776	960	921600	884736000	994	988036	982107784
927	859329	796397983	961	923521	887503681	995	990023	983074875
928	861184	799178752	962	925444	890277128	996	992016	988047936
929	863041	801765089	963	927369	893056347	997	994009	991026973
930	864900	804357000	964	929296	893841344	998	996004	994011992
931	866761	806934491	965	931225	898632123	999	998001	997002999
932	868624	809557568	966	933156	901428696	1000	1000000	1000000000
933	870489	812166237	967	935089	904231063			
934	872356	814780504	968	937024	907039232			

DE DIF-

DE DIFFERENTIIS QVADRATORVM ET Cuborum, & de continuatione tabulæ eorundem.

QVONIAM quadrati numeri creantur per continuam additionem numerorum imparium, vt Arithmetici demonſtrant: fit vt differentia inter quemlibet quadratum, & proxime inſequentem ſit dupla radicis minoris; addita inſuper vnitate. Itaque duobus modis tabula quadratorum componi poteſt, & continuari. Vno modo ſi omnes numeri impares ordine ponantur, initio ſumpto ab 1. Nam 1. dat primum quadratum 1. Et ex 1.& 3. fit ſecundus 4. cui ſi addatur ſequens impar 5. fit tertius 9. & ſi addatur impar ſequens 7. fit quartus quadratus 16. atque ita deinceps. Habet autem quilibet quadratus radicem tot vnitatum, quot numeri impares ipſum conficiunt. Vt quia ſolus impar 1. dat primum quadratum 1. propterea eius radix eſt 1. Deinde quia duo impares 1.& 3. conficiunt ſecundum quadratum 4. erit eius radix 2. Sic quia duodecim numeri impares 1. 3. 5 7. 9. 11. 13. 15. 17. 19. 21. 23. componunt quadratum 144. erit eius radix 12. & ſic de cæteris. Atque in hunc modum ſi ſemper ſequens numerus impar adiiciatur ad quadratum præcedentem, conflatur ſequens numerus quadratus, continuabiturque tabula in infinitum: ſi tamẽ prius ſeries numerorum imparium continuetur. Radices ſerie numerorum naturali progrediuntur.

Differentia quadratorũ.

Compoſitio tabulæ quadratorum.

Numeri impares	Quadrati.	Radices
1	1	1
3	4	2
5	9	3
7	16	4
9	25	5
11	36	6
13	49	7
15	64	8
17	81	9
19	100	10
21	121	11
23	144	12

ALIO modo condi poterit tabula quadratorum, & in infinitum continuari, ſine numerorum imparium ſerie, ſi omnes radices ponantur ordine, vt in tabula vides. Cum enim primus quadratus ſit 1. cuius radix 1. ſi hæc radix duplicata, addita inſuper 1. addatur primo quadrato 1. fit ſecundus 4. cuius radix 2. Hæc duplicata, & inſuper addita 1. ſi adiiciatur ſecundo quadrato 4. fit tertius 9. cuius radix 3. quæ duplicata, & inſuper addita 1. facit 7. Si igitur addantur 7. ad quadratum 9. fit quartus quadratus 16. & ſic in infinitum.

NVMERI autem cubi gignuntur quoque ex additione numerorum imparium, hoc modo. Deſcripta ſerie imparium numerorum ab 1. incipientium, primus 1. dat primum cubum 1. cuius radix 1. Duo deinde ſequentes 3 5. coaceruati præbent ſecundum cubum 8. cuius radix 2. Tres inſequentes 7. 9. 11. exhibent tertium cubum 27. cuius radix 3. Atque eundem in modum ſequẽtes quatuor impares conficient quartum cubum, & inſequentes quinque quintum, & ſic deinceps in infinitum. Quilibet autem cubus radicem habet tot vnitatum quot impares numeri coaceruati ipſum componunt.

Generatio cuborum.

Numeri impares	Cubi	Radices
1	1	1
3		
5	8	2
7		
9		
11	27	3
13		
15		
17		
19	64	4
21		
23		
25		
27		
29	125	5

PRODVCITVR quoque cubus cuiuſcunque radicis, ſi ea radix in ſuum quadratum ducatur. Vt cubus radicis 16. eſt 4096. genitus ex radice 16. multiplicata in 256. quadratum eiuſdem radicis.

VERVM quia permoleſtum eſt, tam ſeriem numerorum imparium in tot terminis continuare, vt ex eorum additione omnes cubi generentur, vt dictum eſt, quam radices omnes per ſuos quadratos multiplicare: obſeruauit Ioan. Baptiſta Villalpandus noſtræ Societatis ſacerdos Theologus, ac Mathematicus egregius, cuius eruditionis in rebus Mathematicis ſpecimen præclarum extat in apparatu Vrbis, ac Templi Hieroſolymitani; præſertim vero in multiplici duarum mediarum proportionalium inter duas rectas inuentione; obſeruauit inquam pulcherrimam proprietatem cuborum numerorum, per quam differentiæ cuborum ordine ſine magna difficultate reperiuntur; quæ poſtea ordine ad cubos præcedentes additæ conficiant cubos inſequentes. Res autem ſic ſe habet. In columna ſiniſtra ſcribatur progreſſio Arithmetica, quæ à 6. incipiat, & per 6. progrediatur. In ſecunda columna reponantur numeri, qui ex numeris primæ columnæ componuntur hac arte. Iuxta 6. ponatur 1. Deinde 7. qui numerus ex 1.& 6. conflatur. Poſt hæc numerus 19. ex 7. & 12. coaceruatus. Atque ita deinceps quilibet bini numeri primæ, ac ſecundæ columnæ ſimul additi conſi-

Differentia cuborũ quomodo reperiantur.

Conſtructio tabulæ cuborum.

conficient numerum inferiorem in ſecunda columna. In tertia deinde columna collocentur omnes cubi, qui per continuam additionem numerorum ſecundæ columnæ, quæ quidem differentias cuborum continet, colliguntur hac ratione. Primus cubus eſt 1. cui ſi addas ſequentem differentiam 7. facies ſecundum cubum 8. & addendam differentiam ſequentem 19. conflabis tertium cubum 27. & ita deinceps. Semper enim in tabella

Progreſſio ſenarij	Differẽtiæ cuborum	Cubi	Radices
6	1	1	1
12	7	8	2
18	19	27	3
24	37	64	4
30	61	125	5
36	91	216	6
42	127	343	7
48	169	512	8
54	217	729	9
60	271	1000	10
66	331	1331	11
72	397	1728	12
78	469	2197	13
84	547	2744	14
90	631	3375	15
96	721	4096	16

appoſita iuxta quemlibet cubum ponitur differentia, qua à præcedenti cubo differt. In quarta denique columna ſcribantur ordine cuborum radices.

EÆDEM differentiæ cuborum in ſecunda columna deſcriptæ inuenientur quoque hoc modo. Radicis propoſitæ quadratum triplicetur, addaturque radix triplicata, atque inſuper 1. Conflatus enim numerus erit differentia, qua cubus propoſitæ radicis ab inſequenti cubo differt. Vt ſi deſideretur differentia inter cubum 216. radicis 6. & cubum proxime maiorem. Quadratum radicis 6. eſt 36. triplum eius eſt 108. cui ſi addatur triplũ radicis, videlicet 18. & inſuper vnitas, conflabitur differẽtia 127. quæſita Atq; hoc modo, ſi continuentur differentiæ cuborũ ope progreſſionis ſenarij. extendetur tabula cuborum, quantum libuerit. Sunt autem, vt vides, numeri progreſſionis ſenarij ſextupli radicum cuborum, ſinguli ſingularum. Vt 60. ſextuplus eſt radicis 10.

QVIA vero diximus, cubos gigni ex additione numerorũ imparium, nimirũ primum eſſe 1. ſecundum ex duobus ſequentibus 3. 5. confici, & tertium ex tribus ſequentibus 7.9.11.&c. ità vt quilibet ex tot imparibus coaceruetur, quot vnitates in eius radice continentur; ſi curioſus quiſpiam noſſe deſideret, (quod ſcire non iniucundum eſt) quinam ſint illi numeri impares propoſitum cubum componentes, hoc eſt, à quonam impari illi impares incipiant, & in quo deſinant, conſequetur id hoc artificio. Radix propoſiti cubi, ſi impar eſt, multiplicetur per ſemiſſem numeri proxime minoris, & duplo producti addatur 1. Numerus enim conflatus erit primus imparium quæſitorum. Quod ſi radix fuerit par, ducatur eius ſemiſſis in numerum proxime minorem radice. & duplo producti adiiciatur 1. Rurſus enim primus imparium, qui quæruntur, conficietur. Exempli gratia. Propoſitus ſit cubus 125. cuius radix 5. ac proinde ex quinque numeris imparibus coaceruatus. Duco radicem 5. quia eſt impar, in 2. ſemiſſem numeri 4. proxime minoris, efficioque 10. duplico. fiunt 20. & addita 1. fit primus imparium 21. Ergo quinque impares quæſiti ſunt. 21.23.25.27.29. qui in vnam ſummam collecti conſtituunt cubum 125. Rurſus datus ſit cubus 1728. cuius radix 12. ideoque ex 12. imparibus numeris coagmentatus, Semiſſem radicis, quia par eſt, nimirum 6. duco in 11. numerum proxime minorem radice, numerumque productum 66. duplico, addoque 1. Numerus enim compoſitus 133. erit primus 12. imparinm, quos quærimus. Ergo omnes 12. erunt hi. 133.135 137.139.141.143.145.147.149.151.153.155. conficientes cubum 1728.

Qui numeri impares datum cubum componant.

REGVLA hæc ſic demonſtratur. Quando radix impar per ſemiſſem numeri ꝓxime minoris multiplicatur, vel ſemiſſis radicis paris per numerũ proxime minorem radice, producitur ſumma terminorũ ſeriei naturalis numerorum ab 1. vſque ad numerum proxime minorẽ radice, vt in progreſſione Arithmetica diximus, hoc eſt, numerus terminorum imparium, qui primum imparem quæſitum præcedunt in ſerie numerorũ imparium; cum primus ſit vnus, deinde ſequantur duo, poſtea tres, &c. Igitur ea ſumma indicat, quotũ locũ occupet impar numerus imparẽ quæſitum antecedens: quia vero is locus duplicat', dempta 1. ex duplo, exhibet vltimum illum imparem, ſi ad eundem duplicatum addatur 1. efficietur primus imparium quæſitorum. Verbi gratia. ſi q̃ratur primus ſeptem imparium, qui conficiunt cubum 343. cuius radix 7. quærimus prius ſummam 6. terminorum ſeriei naturalis, quæ eſt 21. quod fit, ſi ad 6. addo 1. & ſummam 7. id eſt, radicem imparem, ducam in 3. ſemiſſem 6. terminorũ. Igitur impar numerus præcedens primum quæſitum ponitur in 21. loco. Duplico, addoq; 1. fit primus impar quæſitus 43. Sunt ergo ſeptem quæſiti, 43.45.47.49.51.53.55. qui conſtituunt cubum 343.

ALIO

ALIO modo reperietur primus imparium, & vltimus, & quidem faciliori, hac videlicet arte. Ex quadrato radicis auferatur numerus proxime minor radice, idemque numerus ad eundem quadratum addatur. Reliquus enim oumerus erit primus imparium quæſitus, & cooflatus, poſtremus. Vt data radice 11. ſi ex eius quadrato 121. dematur numerus 10. proxime minor radice, ſupererit numerus 111. primus imparium. Et ſi ad eundem quadratum 121. adiiciatur idem numerus 10. efficietur vltimus imparium 131. ita vt 11. numeri impares ſint hi 111. 113. 115. 117. 119. 121. 123. 125. 127. 129. 131. qui in vnam ſummam collecti efficiunt cubum 1331. radicis 11. Sic etiam data radice 10. ſi ex eius quadrato 100. tollatur numerus 9. remanebit primus imparium 91. Et ſi ad eundem quadratum 100. addatur idem numerus 9. conficietur vltimus imparium 109. eruntque 10 oumeri impares hi 91. 93. 95. 97. 99. 101. 103. 105. 107. 109. quorum ſumma 1000. dabit cubum radicis 10.

RATIO huius regulæ eſt hæc: In numero imparium, qui requiruntur, cōtioetur differentia imparium, videlicet binarius, toties, quoties voitas eſt in oumero, qui proxime minor eſt data radice, vt perſpicuum eſt. Et quoniam quando radix eſt impar, numerus impar in medio loco numerorum imparium eſt quadratus radicis, quem præcedit ſemiſſis differentiarum vſque ad primum imparem, hoc eſt, numerus proxime minor radice eademque ſemiſſis illum inſequitur. Quam ob rem, ſi ex illo quadrato dematur numerus proxime minor radice, id eſt, ſemiſſis differentiarum, reliquus fiet primus impar quæſitus. Et ſi idem numerus proxime minor radice ad illum quadratum adiiciatur, conſlabitur vltimus numerus impar. Quando vero radix eſt par, cadit eius quadratus inter duos impares, qui medium locum occupant, quem quadratum præcedit ſemiſſis quoque differentiarum vſque ad primum imparem, hoc eſt, numerus proxime minor radice, &c.

HINC etiam facile reperiemus quotumcunque imparium numerorum, vt quartum, vel nonum, &c. Si enim differentiam imparium, nimirum 2. ducemus in numerum proxime minorem impare quæſito, & producto primum imparem adiiciemus, conſlabitur quæſitus numerus impar. Vt ſi in exemplo poſteriore decem imparium quæratur ſeptimus impar, ducemus 2. in 6. & productum 12. ad primum 91. adiiciemus, procreabimuſq; ſeptimum imparem 103. & ſic de cæteris.

SED vt certi ſimus, quādo radix eſt magna, num primus imparium recte ſit inuentus, ne cogamur omnes impares continuare, quod laborioſum eſt, inueſtigabimus vltimum ex primo (niſi ex ſecunda regula iam inuentus ſit) deinde ſummam omnium, hoc modo. Differentiam progreſſionis numerorum imparium, nimirum 2. ducemus in numerum terminorum, minus vno, productumque primo iouento addemus: Conſlatus enim numerus erit poſtremus imparium quæſitorum. Si igitur ad hunc apponamus primum, & ſummæ ſemiſſem in numerum terminorum, id eſt ; in radicem cubi propoſiti ducamus , producetur propoſitus cubus, ſi primus imparium recte inuentus eſt. Vt in proximo cubo 343. cuius radix 7. ſi ad 43. primum imparem inuentū addamus 12. numerum ſcilicet productum ex 2. in radicem 7. minus vno, fit ſeptimus numerus impar quæſitus 55 ad quem ſi apponatur primus 43. fiunt 98. Et ſi huius numeri ſemiſſis 49. ducatur in radicem 7. producetur cubus 343. &c.

ALIA etiam ratione perfacili eoſdem numeros impares datum cubum componentēs reperiemus hoc modo. Sit datus cubus 117649. cuius radix 49. ac proinde reperiendi 49. numeri impares, quorum ſumma ſit 117649. Ponamus primum imparem eſſe 1 ℞. id eſt, 1. Radicem (vt in Algebra fieri ſolet.) Et quia differentia numerorum imparium eſt 2. erit ſecundus impar 1℞. † 2. hoc eſt, 1℞. plus 2. tertius 1℞ † 4. Et ne cogamur contiouare omnes 49. termioos, ducemus differentiam 2. in 48. numerum terminorum, minus vno, & ad productum 96. addemus primum, quem poſuimus eſſe 1. ℞. Ita enim fiet vltimus terminus quæſitus 1. ℞. † 96. cui ſi addamus primum, videlicet 1℞. fit ſumma 2℞. † 96. cuius ſemiſſis 1℞. † 48. ducta in 49. numerum terminorum, facit numerū 49. ℞. † 2352. qui æquatur cubo propoſito 117649. Ablatis ergo vtrinque 2355. remanebunt 49. ℞. æquales num. 112297. quo diuiſo per 49. fit Quotiens 2353. pro primo impari quæſito, quod vt probemus, ducemus differētiam imparium, nimirum 2. in 48. numerum terminorum, minus vno, productumq; 96. primo 2353. addemus, vt conficiamus vltimum terminum 2449. Deinde primum huic adiiciemus, & ſummæ 4802. ſemiſſem 2401. in 49. numerum terminorum ducemus, procreabiturque numerus 117649. qui dato cubo æqualis eſt. Recte ergo primus impar inuentus eſt.

VSVS PRÆCEDENTIS TABVLÆ QVADRATORUM, & cuborum in radicibus extrahendis.

INTER alias vtilitates habet ſuperior tabula quadratorum, & cuborum egregium vſum in radicibus quadratis, & cubicis extrahendis; quippe cum per eam ſtatim expediantur tria prima puncta ad ſiniſtram, ſimulque tres figuræ radicis inueniantur: quod vno, aut altero exemplo planum fiet.

SIT primum extrahenda radix quadrata ex appoſito numero. Primum quæro inter qoadratos numerum

1 1 7 6 8 9 0 1 4 5 (3 4 3 0 5.

117689. trium punctorum, quem quia non inuenio, capio proxime minorem quadratum 117649. eiuſque radicem 343. in Quotiente pono. Inuento autem quadrato ſubtracto ex numero 117689. trium punctorum, remanent 40. Ergo ſequens punctum erit 4001. quo (relicta figura 1.) diuiſo per 686. duplum radicis inuentæ, reperitur Quotiens 0. eritque vltimum punctum 400145. quo (relicta etiam figura 5.) diuiſo per 6860. duplum radicis inuentæ, inuenitur Quotiens 5. Eſt ergo tota radix $34305\frac{57120}{68611}$.

SIT deinde ex appoſito numero extrahenda radix cubica. Primum ioter cubos quæro numerū 4250954.

4 2 5 0 9 5 4 9 6 1 3 0 7 (1 6 1 9 9

trium primorum punctorum, quem qoia non reperio, accipio cubum proxime minorem 4173281. cum ſua radice 161. qui cubus ex tribus punctis ſubtractus relinquit 77673. ita vt ſequens punctum ſit 77673961.

PARO ergo diuiſorem, vt lib.6.ad finem propoſ.19.docuimus, multiplicando radicis inuentæ quadratum ex eadem tabula excerptum, nimirum 25921.per 300.qui erit 7776300.per quem ſi meum punctum diuido, reperio Quotientem 9.& facta operatione remanent 7295302 adeo vt vltimum punctum ſit 7295302307.

DENIQVE paro nouum diuiſorem, multiplicando radicis 1619 inuentæ quadratum 2621161.per 300. qui erit 786348300.per quem ſi vltimum meum punctum diuido, inuenio Quotientem 9.Facta autem operatione, remanent 214232708.abſolutaque eſt extractio,

NEQVE vero negligendum videtur non inutile compendium in extractione cubica, quod eſt eiuſmodi. Quando nouus diuiſor parandus eſt, ne cogamur totius radicis inuentæ quadratum ſupputare, diuidemus radicem inuentam in duas partes, ita vt vna pars ſit vltima figura Quotientis inuenta, nimirum iouenta quarta figura 9. io dato exemplo, partiemur in radicem inuentam 1619. in 1610.& 9.quas partes bis ſcribemus, vt in appoſita formula vides. Si igitur ſingulas partes in ſingulas partes ducemus, producetur quadratus quæſitus radicis 1619. vt ad propoſ.1. lib.2.Eucl.demonſtrauimus. Verbi gratia quia præcedens quadratum numeri 161.fuit 25921.appoſitis duabus cifris, habebimus productum 2592100.ex 1610.in 1610.cui ſi addemus 14490.bis numerum videlicet productum ex 1610.in 9.vel ex 9.io 1610.& inſuper 81. productũ ex 9.in 9.conficiemus 2621161. quadratum radicis inuentæ 1619. Eadem ratione ſi huius numeri 16199. quadratum deſideremus, diuidemus eum in 16190. 9. bis, vt in hac formula vides. Deinde quia iam quadratum habuimus 2621161 numeri 1619.appoſitis duabus cifris, habebimus 262116100. quadratum numeri 16190.cui ſi addemus 145710.bis, productum videlicet ex 16190.in 9.vel ex 9.in 16190.& inſuper 81.productum ex 9. in 9.efficiemus 262497601. quadratum numeri 16199. & ſic de cæteris. Hoc ergo compendium reddet faciliorem cubicæ radicis extractionem, cum ſemper præcedentis radicis iouentæ quadratum habeamus, & appoſitis duabus cifris, quadratum conficiamus eiuſdem radicis, appoſita ei vna cifra, &c.

1610.	9
1610.	9

16190.	9.
16190.	9.

BENE autem vides, ſi tabula ſuperior extenderetur, vt haberentur quadrati, & cubi radicum 4.aut 5. figurarum, multo faciliorem effici extractionem radicum. Sed quia tabula excreſceret hac ratione in immenſum, contenti fuimus tabula, in qua radices habent 3. figuras ad ſummum, cum eam quilibet ex iis, quæ diximus, extendere poſſit, & continuare.

FINIS LIBRI OCTAVI.

INDEX

INDEX
RERVM AC VERBORVM, QVÆ IN HAC GEOMETRIA PRACTICA CONTINENTUR, IN ORDINEM ALPHABETICUM DIGESTUS.

A.

ACCLIVEM *diſtantiam montis à loco menſoris vſque ad baſem altitudinis monti impoſita, etiam nō viſam, vna cum ipſa altitudine, quando menſor in aſcenſu montis conſiſtit, prope verum, beneficio quadrati efficere cognitam.* 91

Accliuem montis aſcenſum à loco menſoris, vſque ad baſem altitudinis monti impoſita, etiam non viſam, vna cum ipſa altitudine, quando menſor in aſcenſu montis conſiſtit prope verum, beneficio quadrantis notum efficere. 60

Aceruus tritici quo pacto menſuretur. 133

Ædificij cuiuſcumque ad perpendiculum erecti, vel putei profunditatem ſi modo angulus fundi, vel ſignum aliquod in fundo poſitum conſpiciatur, per quadrantem reperire. 62

Ædificij cuiuſuis ad perpēdiculū erecti, vel putei profunditatem, ſi modo angulus fundi, vel ſignum aliquod in fundo poſitum conſpiciatur, per quadratum efficere cognitam. 92

Æquilateri trianguli area. 100

Agri, campiue, aut vrbis, vel regionis ſitum in plano deſcribere. 99

Agro propoſito figuram ſimilem in charta deſcribere. 112

Alberti Dureri quadratura circuli per numeros falſa eſt. 188

Aliquota partes ſimiles plurium magnitudinum eandem habent proportionem. 137

Altera parte longioris area. 103

Altimetra ſcala quid. 64

Altitudinem, ad cuius baſem pateat acceſſus beneficio ſpeculi plani, vna cum diſtantia ſpeculi à cacumine altitudinis deprehendere. 97

Altitudinem, cuius baſis impoſita ſit monti, vel alteri cuipiam altitudini, & vtraque illius extremitas cerni poſſit, etiamſi infimum punctum alterius, cui imponitur, lateat, & eiuſdem puncti infimi diſtantia à loco menſoris cognita non ſit, per quadratum ex valle, aut ex plano Horizontis explorare. 90

Altitudinem cuiuslibet rei erectæ, per eius diſtantiam ab oculo menſoris, beneficio quadrati conijcere. 76

Altitudinem cuiuslibet rei erectæ, etiamſi eius diſtantia ab oculo menſoris neque data ſit, neq; inuenta, per duas ſtationes in plano factas, auxilio quadrati patefacere. 76

Altitudinē cuius baſis impoſita ſit alteri altitudini, & vtraque illius extremitas cerni poſſit, etiamſi infimum punctum alterius, cui imponitur, lateat, & eiuſdem puncti infimi diſtantia à loco menſoris cognita non ſit, per quadrantem ex valle, aut ex plano Horizontis explorare. 58

Altitudinem cuiuſque rei erectæ, ex eius vmbra, quam Sole lucente proijcit, ſi nota fuerit, per quadratum deprehendere. 95

Altitudinem inacceſſibilem beneficio ſpeculi plani, vna cum ſpeculi diſtantia tam à baſe, etiam non viſa, quam à cacumine altitudinis, cognoſcere. 98

Altitudinem inacceſſibilem, quando neque diſtantia à loco menſoris ad eius baſem nota eſt, neque è directo ipſius duæ ſtationes in plano fieri poſſunt, neque denique baſis apparet, per quadrantem notam reddere. Atque hinc obiter ipſam quoque diſtantiam elicere. 57

Altitudinem inacceſſibilem, cuius baſis non videatur, & ad quam per nullum ſpatium ſecundum lineam rectam accedere poſſimus, aut recedere, vt duæ ſtationes fieri poſſint; ſed ſolum ad dextram, ſiniſtramue ad locum, è quo eius baſis appareat, per quadrantem explorare. ibid.

Altitudinem inacceſſibilem, cuius baſis non videatur, & ad quam per nullum ſpatium ſecundum rectam lineam accedere poſſit menſor, aut recedere, vt duæ ſtationes fieri poſſint, ſed ſolum ad dextram, ſiniſtramue ad locum, è quo eius baſis cernatur, per quadratum explorare 89

Altitudinem inacceſſibilem, quando diſtantia à loco menſoris ad baſem altitudinis ignota eſt, per duas ſtationes in plano factas, per quadrantem dimetiri. Atque hinc diſtantiam quoque ipſam eruere, etiamſi extremus eius terminus non cernatur. 45

Altitudinem maiorem ex minori incognita, ſi tamen baſis maioris cerni poſſit, per quadratum venari. 89

Altitudinem maiorem ex minori cognita, etiamſi ſolum maioris vertex cernatur, per quadratum efficere notam. ibid.

Altitudinem maiorem ex minori cognita, per duas ſtationes in ſummitate, vel in duabus feneſtris factas, etiamſi ſolum maioris altitudinis vertex cernatur, per quadrantem adinuenire. Atque hinc diſtantiam quoque inter altitudines colligere. 57

Altitudinem maiorem ex minori incognita, dummodo baſis maioris cerni poſſit, per quadrantem perſcrutari. 58

Altitudinem minorem ex maiori cognita, licet baſis minoris

cerni non poſſit, per quadratum ſcrutari. 90
Altitudinem minorem ex maiori incognita, dummodo baſis minoris appareat, per quadratum elicere. ibid.
Altitudinem minorem ex maiori cognita, licet baſis minoris non cerni poſſit, ope quadrantis perueſtigare. Atque hinc diſtantiam quoq; inter altitudines duas eruere. 59
Altitudinem minorem ex maiori incognita, dummodo baſis minoris videri poſſit, per quadrantem explorare. Atq; hinc diſtantiam quoque inter duas altitudines conijcere. ibid.
Altitudinem montis, vel turris ex eius faſtigio, quando è directo menſoris internallum aliquod inter duo ſigna vel etiam inter ſignum quodpiam ac turrim cognitum eſt, per quadratum conijcere. 85
Altitudinem montis, aut turris ex eius vertice per duas ſtationes in eiuſdem ſummitate factas, è quibus ſignum aliquod in HoriZonte appareat, per quadrantem dimetiri. Atque hinc ipſam quoque diſtantiam à turris baſe, vel perpendiculo montis ad ſignum illud inueſtigare. 48
Altitudinem monti impoſitam, ſi modo altitudinis baſis poſſit conſpici: vel portionem ſuperiorem alicuius turris, beneficio ſpeculi plani efficere notam. 99
Altitudinem montis metiri per quadrantem. 45.46
Altitudinem montis, aut turris ex eius vertice per duas ſtationes in haſta aliqua erecta, vel in duabus feneſtris turris, quarum vna ſupra aliam exiſtat, factas, è quibus ſignum aliquod in HoriZonte videri poſſit, per quadrantem metiri. Atque hinc diſtantiam quoque à perpendiculo montis vel turris, vſque ad ſignum viſum cognoſcere. 48
Altitudinem montis, aut turris ex eius vertice per quadrantem metiri, ſi in plano, cui inſiſtit, ſpatium aliquod è directo menſoris notum ſit, deprehendere. 51
Altitudinem per vnicam ſtationem metiri per quadrantem, quando diſtantia nota eſt. 46
Altitudo pyramidum, in quas corpora regularia è centris reſoluuntur 135. & ſeqq.
Altitudinem propoſitam ſingulari quodam modo inueſtigare. 77. & 78
Altitudinem propoſitam, eiuſq; diſtantiam ab oculo menſoris, vna cum hypotenuſa ab oculo ad faſtigium altitudinis extenſa, venari ope quadrati ſtabilis per vnicam ſtationem, etiam ſi ſolum faſtigium rei erecta cernatur. 79
Altitudinem propoſitam, quando diſtantia ab oculo menſoris neque data eſt, neque inuenta, neque è directo altitudinis duæ ſtationes fieri poſſint, per duas ſtationes in aliqua haſta erecta factas, per quadratum indagare. 78
Altitudo quando maior ſit, quam diſtantia, & quando æqualis, & quando minor. 100
Altitudinem Solis, vel ſtellæ cuiuſuis per quadratum obſeruare. 66
Altitudinem turris, aut alterius rei per baculũ indagare. 94
Altitudinem turris vel montis ex eius ſummitate per vnicam ſtationem ope quadrati ſtabilis metiri, vna cum diſtantia ſigni in HoriZonte viſi vſque ad turrem, vel montis perpendiculum. 82
Altitudinem turris ex eius vertice per vnicam ſtationem per quadrantem metiri, ſi diſtantia ſigni in HoriZonte viſi vſque ad baſem turris nota ſit. 51
Altitudinem turris, aut montis, ex eius ſummitate per quadratum dimetiri, quando in plano ſummitatis HoriZonti æquidiſtante duæ ſtationes fieri poſſunt, & ſignum aliquod in HoriZonte cernitur. 81
Altitudinem turris, vel montis ex eius ſummitate per duas ſtationes in haſta aliqua erecta factas, inueſtigare per quadratum, quando ſignum aliquod in HoriZonte videri poteſt. 82
Altitudinem turris, aut alterius rei, per Normam inueſtigare. 94
Altitudinis maioris portionem ex minore altitudine, & minoris portionem ex maiore, per quadratum percipere. 90
Altitudinis maioris portionem ex minori altitudine, & minoris portionem ex maiori, per quadrantem cognoſcere. 59
Altitudinis minoris portionem ex minore altitudine, & maioris portionem ex minore, per quadratum elicere. ibid.
Ambitum terræ ex edito aliquo monte metiri. 213
Anguli quantitas, quem latera inſtrumenti partium continent, quo pacto cognoſcatur. 9
Angulorum, & linearum quarundam mechanicam menſurationem admittendam eſſe. 111
Angulos duos trianguli obliquanguli ex duobus lateribus, & angulo ab ipſis comprehenſo, reperire. 41
Angulos duos trianguli obliquanguli ex duobus lateribus, & angulo vni eorum oppoſito, (ſi modo conſtet ſpecies anguli alteri lateri oppoſiti, quando datus angulus acutus eſt) expiſcari. ibid.
Angulos omnes tres trianguli obliquanguli ex omnibus tribus lateribus perueſtigare. 42
Angulum acutum trianguli rectanguli ex baſe, & vno latere inquirere. 40
Angulum acutum trianguli rectanguli ex vtroq; latere reddere cognitum. ibid.
Angulum rectilineũ datũ in tres æquales angulos diuidere. 218
Angulus incidentiæ cur angulo reflexionis ſit æqualis. 200
Angulus obſeruationis quis. 43
Angulus, quẽ filum cum proximo quadrati latere facit, quãdo offerat altitudinem Solis, vel ſtellæ, & quando complementum altitudinis. 66
Arabum quadratura circuli per numeros falſa eſt. 188
Arcus circuli ad arcum ſimilem alterius circuli eſt, vt chorda ad chordam, & contra. 198
Arcus daterum grad. ac Min. quo pacto ex circulo quouis ope inſtrumenti partium abſcindantur. 8
Area altera parte longioris. 103
Area campi, intra quem lacus, vel ſilua exiſtat. 113
Area campi, quando in triangula reſolui non poteſt. 112
Area circuli accuratior. 126
Area circuli cui triangulo rectangulo ſit æqualis, ſecundum Archimedem. 118
Area circuli æqualis eſt rectangulo comprehenſo ſub ſemidiametro, & ſemiſſe circumferentiæ circuli. 178
Area circuli tribus viis, ex cognita diametro, & circumferentia. 125
Area Conoidis Hyperbolici. 144
Area Conoidis parabolici. 144
Area corporis planis ſuperficiebus contenti & circa ſphæram circumſcriptibilis, cui ſolido rectangulo ſit æqualis. 183
Area corporum omnino irregularium, quæ. 145
Area cuiuslibet portionis ſphæræ. 142
Area cuiuſuis figuræ pulchra inuentio. 113
Area cuiuslibet trianguli cui rectangulo ſit æqualis. 174
Area datæ Ellipſis. 129
Area datæ parabolæ. ibid.
Area doliorum. 145
Area figuræ lenticularis. 127
Area figuræ quadrilateræ omnino irregularis. 112
Area figuræ ex variis circulorum ſegmentis coagmentatæ. 127
Area figuræ regularis, cuius latus eſt vnitas, quo pacto inueniatur. 117
Area figuræ regularis, cui rectangulo æqualis ſit. 175
Area figuræ regularis, quo pacto ex area alterius figuræ ſimilis cognita eruatur. 116
Area figuræ regularis, cui triangulo rectãgulo ſit æqualis. 175
Area figurarum regularium à triangulo vſque ad Dodecagonum, quando latus eſt vnitas. 117
Area fruſti pyramidis, & coni. 132
Area fruſti ſphæræ. 144
Aream circuli vera maiorem ex diametro inueſtigare. 125

Aream

Aream circuli vera maiorem, ex circumferentia concludere. 116
Aream circuli vera minorem, ex diameero colligere. 125
Aream circnli vera minorem, ex circumferentia inferre. 126
Areã figuræ Ellipſi ſimiln, quæ circino deſcribitur, inquirere. 219
Area multilateræ figuræ Irregularis quæ. 112
Area parallelogrammorum. 111
Area parallelepipedorum, Priſmatum, & cylindrorum. 130
Area portionum ſphæroidis. 144
Area pyramidis cui ſolido rectangulo ſit æqualis. 182
Area pyramidum, & conornm. 131
Area quadrati. 103
Area quadrilaterorum non rectangulorum. 111
Area quinq; corpornm regularium quæ. 133.135
Area rect. ngnlorum. 103
Area regt larium figurarum. 114
Area Rhombi, & Rhomboidis. 111
Area ſectoris circuli. 127
Area ſemicirculi, quadrantis, octauæ partis, &c. 125
Area ſegmentorum circuli. 127
Area ſegmentorum ſphæræ. 141
Area ſphæræ vera minor, ex diameero circuli maximi. ibid.
Area ſphæræ vera maior, ex circũferentia maximi circuli. ibi.
Area ſphæræ vera minor, ex circumferẽtia circuli maximi. ibi.
Area ſphæræ vera maior, ex diametro circuli maximi. ibid.
Area ſphæræ æqualis eſt ſolido rectangulo comprehenſo ſub ſemidiametro, & tertiã parte ſuperficiei conuexæ. ib. & ſeq.
Area ſphæræ, & ſnperficies eiuſdem conuexa. 137.139
Area, vel ſoliditas ſectoru ſphæræ. 142
Area, vel ſoliditas hemiſphærij. ibid.
Area ſphæroidis. 144
Area trapezij nulla habentis latera parallela. 112
Area trapeZıı habentis duo latera parallela. 111
Area triangulorum. 103.107
Area trianguli rectanguli. 109
Area trianguli rectanguli, ex vno latere circa angulum rectum, & vno angulo acuto. 110
Area trianguli rectanguli, ex vno latere circa angulum rectũ, & latere quod recto angulo opponitur. ibid.
Area trianguli rectanguli, ex latere, quod recto angulo opponitur, & vno angulo acuto. ibid.
Area trianguli Iſoſcelis. 109
Area trianguli æquilateri. ibid.
Area trianguli obliquanguli, ex duobus lateribus, & angulo ab ipſis comprehenſo. 111
Area trianguli obliquanguli, ex vno latere, ac duob. angulis. 111
Area vaſis excauati. 133
Arundinis, vel baculi beneficio diſtantiam propoſitã metiri. 72
Aſcenſum accliuem montis à loco menſoris vſq; ad baſem altitudinis monti impoſitæ, etiam non viſam, vna cum ipſa altitudine, quando menſor in aſcenſu montis conſiſtie, prope verum, beneficio quadrantis efficere cognitum. 61

B.

BAculi beneficio diſtantiam inter pedes menſoris, & ſignũ aliquod in plano HoriZontis metiri, quando extremus terminus diſtantiæ videri poteſt. 93
Baculi beneficio turrim, aut alterius rei altitudinẽ metiri. 94
Baculi, aut arundinis beneficio diſtãtiam propoſitã metiri. 72
Baſem trianguli rectanguli ex vno latere, & vno angulo acuto inueſtigare. 39
Baſem trianguli rectangnli ex vtroque latere perſcrutari. 40
Baſis quadratricis, ſemidiameter qnadrantis, & quadrans ſunt continue proportionales. 191

C.

CAmpano aſcripta circuli quadratura per lineas falſa eſt. 188
Campi, agriue, aut vrbis, vel regionis ſitum in plano deſcribere. 99
Campi area, quando in triangula reſolui non poteſt. 112
Campi, intra quem lacus, vel ſilua exiſtat, area. 113
Campo propoſito figuram in charta ſimilem deſcribere. 112
Centeſima, vel milleſimæ partes in quauis recta linea quo pacto capiantur, ope inſtrumenti partium. 7
Chorda alicuius arcus data, vna cum perpendiculari ex medio eius puncto ad arcum educta, quot gradus, vel palmos tam arcus, quam ſemidiameter cõplectitur, inuenire. 206
Circuli pulcherrima proprietas. 209
Circnli quadraturam eſſe poßibilem. 189
Circnli quadratura per Hyppocratem Chium falſa eſt. 188.189
Circnli quadratura per lineas Campano aſcripta falſa eſt. 188
Circnli quadratura per numeros ſecundũ Arabes falſa eſt. ib.
Circnli quadratura per numeros ex Alberto Durero falſa eſt. ibid.
Circnli quadratura per lineas. ibid.
Circuli area tribus viis, ex cognita diameero, & circumferentia. 125
Circuli area accuratior. 126
Circuli aream vera maiorem, ex diametro inueſtigare. 125
Circuli aream vera minorem, ex diametro colligere. ibid.
Circnli aream vera minorem, ex circumferentia inferre. 126
Circuli aream vera maiorẽ, ex circumferentia concludere. ib.
Circuli area cui triangulo rectangulo ſit æqualis, ſecundum Archimedis doctrinam. 118
Circuli area æqualis eſt rectangulo comprehenſo ſub ſemidiametro, & ſemiſſe circumferentiæ circuli. 176
Circuli dimenſio ex Archimede. 118
Circuli diameter qnam proportionem habeat ad peripheriam ſecundum Archimedem. 120
Circuli diameter in numeris, ex dato arcu. 128
Circuli diameter ex data peripheria, & peripheria ex data diametro accuratior. 126
Circuli diametrum vera maiorem, ex data circnmferentia indagare. 124
Circuli diametrũ vera minorem ex data peripheria inueſtigare. ibid.
Circuli diameter ducta in $3\frac{1}{7}$*. gignit numerum maiorem circumferentia.* 122
Circuli peripheria, ac diameter, ex eius area. 128
Circuli peripheria ex data diametro, & diameter ex data peripheria accuratior. 126
Circuli peripheria quam proportionem habeat ad diametrũ, ſecundum Archimedem. 120
Circuli peripheria diuiſa per $3\frac{1}{7}$*. facit numerum minorem diametro.* 122
Circuli peripheriã vera maiorẽ, ex data diametro reperire. 123
Circuli peripheriã vera minorẽ, ex data diameero elicere. ibi.
Circuli partis octauæ, decimæ ſextæ, &c. rectangulum conſtituere Iſoperimeerum, & æquale. 186
Circuli ſectoris area. 127
Circulo figuram rectilineam æqualem, & alteri ſimilem cõſtituere. 194
Circnlo dato quadratnm æquale conſtituere. 193
Circnlo quadratum æquale quo pacto facile exhibeatur ex propria figura. ibid.
Circulorum peripheriæ inter ſe ſunt, vt diametri. 124.197
Circulorum dnorum, vel figurarum ſimilium proportio, ex datis diametris circnmferentiisue, vel duobus lateribus homologis. 128
Circulorũ diametri inter ſe ſunt, vt circumferentiæ. 124.197
Circulum quadrato æqualem deſcribere. 194
Circnlum, vel figuram planam rectilineam, in data proportione augere vel minuere. 164
Circulum cuilibet figuræ rectilineæ æqualẽ deſcribere. 194
Circulum per tria puncta deſcribere, inuentis nimirum alijs punctis, per quæ tranſire debet. 202
Circulum pluribus circulis, quorum diametri, vel circumferentia

 rentia

rentia data ſint, æqualem: Et figuram ſimilem pluribus, figuris ſimilibus quarum latera homologa data ſint, æqualem deſcribere. 128
Circulus ad quadratum diametri proportionem habet, quam 11. ad 14. proxime, ſecundum Archimedem. 123
Circulus ad quadratum circumferentiæ maiorem proportionem habet, quam 7. ad 88. minorem vero, quam 71. ad 892. 125
Circulus omnibus figuris rectilineis regularibus ſibi iſoperimetris maior eſt. 174
Circulus omnium figurarum rectilinearum ſibi iſoperimetrarum maximus eſt. 182
Circulus ad quadratum diametri maiorem proportionem habet quam 223. ad 284. minorem vero, quam 11. ad 14. 124
Circumferentiæ circuli ad diametrum proportio accuratior, quæ. 126
Compendium pulchrum in longitudinibus metiendis per quadratum ſtabile. 70
Conchoideos lineæ deſcriptio, eiuſq; duæ proprietates inſignes 162
Coni, & cylindri ſuperficies conuexa. 146
Conoicæ ſuperficiei proportio ad ſuam baſem. ibid.
Conoidis Hyperbolici ſoliditas. 145
Cono, cylindro, priſmati, ac pyramidi cubũ æqualẽ efficere. 216
Cono, vel pyramidi æqualem cylindrum, aut priſma ſub eadẽ altitudine: Et cõtra cylindro, vel priſmati æqualem conum aut pyramidem ſub eadem altitudine conſtituere. 215
Conoidis parabolici ſoliditas. 144
Conorum, ac pyramidum area. 131
Conſtructio tabulæ Gnomonicæ facillima, eiuſq; vſus. 66
Conſtructio & vſus tabellæ pro minutis, & ſecundis. ibid.
Conſtructio & vſus tabulæ pro minutis, & ſec. cognoſcendis ex quadrante. 14
Conſtructio quadrantis ad min. & ſec. cognoſcenda. 11
Conſtructio quadrati Geometrici. 64
Conſtructio pinnacidiorum pro radio viſuali. 11
Conſtructio regulæ loco fili cum perpendiculo. ibid.
Conſtructio inſtrumenti partium. 5. 9
Conum, ac pyramidem in cylindrum, & priſma: Item priſma, & cylindrum in conum, ac pyramidem tranſmutare. 215
Conum, cylindrum, priſma, ac pyramidem inæqualem ſub data altitudine, & ſupra baſem quotuis angulorum reuocare. ibid.
Conum, cylindrum, priſma ac pyramidem in parallelepipedum æquale datæ altitudinis vel baſis commutare. ibid.
Conum datæ ſphæræ conſtituere æqualem. 217
Conum pyramidi, & cylindrum priſmati æqualem: Ac viciſſim pyramidem cono æqualem, & priſma cylindro æquale conſtituere. 215
Conum, pyramidem, priſma & cylindrum in parallelepipedum ſupra baſem quadratam conuertere. ibid.
Corpori regulari ſphæram æqualem exhibere. 217
Corporum quinq; regularium ſuperficies conuexa. 135
Corporum quinq; regularium area quæ. 133. 135
Corporum omnino irregularium area. 145
Corpus regulare quoduis dato cubo æquale conſtituere. 217
Corpus planis ſuperficiebus contentum, & circa ſphæram circumſcriptibile, cui ſolido rectangulo ſit æquale. 183
Cubicam, & quadratam radicem in numeris non quadratis, & non cubis per lineas Geometrice inuenire. 173
Cubicæ radicis extractio. 168
Cubicæ & quadratæ radicis extractio. 168
Cubicæ & quadratæ radicis extractio ex data minutia. 172
Cubo dato corpus regulare quodcunq; æquale conſtituere. 217
Cubo dato parallelepipedum rectangulum ſub data altitudine, vel ſupra datam baſem, æquale conſtituere. 216
Cuborum differentiæ quo pacto reperiantur. 227
Cuborum, & quadratorum tabula vſq; ad radicem. 1000. 221
Cuborum generatio. 227
Cubum cylindro, priſmati, cono, ac pyramidi æqualem conſtruere. 216
Cubum datæ ſphæræ æqualem: Et ſphæram dato cubo æqualem efficere. ibidem.
Cubum datum, aut parallelepipedum in datam proportionem ſecare. 218
Cubum duobus, aut pluribus cubis æqualem conſtruere. 217
Cubum minorem ex maiori detrahere reſiduumque in cubum conuertere. ibidem.
Cubum parallelepipedo rectangulo æqualem conſtruere. 216
Cubum ſolidis quotlibet æqualem conſtituere. 217
Cubus alterutrius mediarum proportionalium inter duas rectas, æqualis eſt parallelepipedo ſub quadrato extremæ prope mediam aſſumptã & altera extrema comprehenſo. 165
Cubus diametri ſphæræ ad ſphærã, maiorem proportionem habet, quam 21. ad 11. minorẽ vero, quam 426. ad 223. 139
Cubus circumferentiæ maximi circuli in ſphæra ad ſphæram, maiorem proportionem habet, quam 298374; ad 5041. minorem autem, quam 2904. ad 49. 138
Cylindri, & coni ſuperficies conuexa. 146
Cylindrica ſuperficies, demptis baſibus. ibidem.
Cylindrorum, priſmatum, ac parallelepipedorum area. 130
Cylindro, aut priſmati æqualem conum, vel pyramidem ſub eadem altitudine; Et viciſſim cono, vel pyramidi æqualem cylindrũ, aut priſma eiuſdẽ altitudinis conſtituere. 215
Cylindro, priſmati, cono, ac pyramidi cubum æqualem conſtituere. 216
Cylindrum datæ ſphæræ conſtituere æqualem. ibid.
Cylindrum, ac priſma in pyramidem, & conum: Item conum, ac pyramidem in cylindrum, vel priſma æquale tranſmutare. 215
Cylindrum, aut priſma datum in proportionem datam diuidere. 218
Cylindrum, conum, priſma, ac pyramidem in parallelepipedum rectangulum æquale datæ altitudinis, vel baſis commutare. 216
Cylindrum, priſma, conum, ac pyramidem cuiuſcunq; altitudinis, inæqualem ſub data qualibet alia altitudine, & ſupra baſem quotcunq; angulorum conuertere. 215
Cylindrum priſmati, & conum pyramidi æqualem: Et viciſſim priſma cylindro æquale, & pyramidem cono æqualem conſtruere. ibid.
Cylindrum, priſma, conum, & pyramidem in parallelepipedum ſupra baſem quadratam conuertere. ibid.

D.

DEcimæ partes milleſimarum, quo pacto ſumantur, etiamſi inſtrumentum partium diuiſum ſit in 100. partes duntaxat. 7
Decimæ, vel centeſimæ partes quotcunque, quo pacto ex quauis parte recta in partes æquales diuiſa per circinum auferantur. 35
Declinationem cuiuslibet paralleli in diametro Aſtrolabij, per inſtrumentum partium inuenire. 9
Diameter circuli, ac peripheria, ex eius area. 128
Diameter circuli in numeris, ex dato arcu. ibid.
Diametri circuli ad circumferentiam proportio accuratior, quæ. 126
Diameter circuli ducta in $3\frac{1}{7}$. facit numerum maiorem circumferentia. 122
Diametrum circuli vera maiorem, ex data circumferentia indagare. 124
Diametrum circuli vera minorem, ex data circumferentia inueſtigare. 123
Diameter circuli quam proportionem habeat ad peripheriam ſecundum Archimedem. 129
Diameter circuli ex data peripheria, & peripheriam ex data diametro accuratior. 126

Dia-

Diametri circulorum inter ſe ſunt, vt circumferētia. 124. 197
Differentia cuborum quo pacto reperiantur. 227
Differentia quadratorum. ibid.
Differentia ſtationum quid. 43
Difficultas in extractionibus radicum qua ſit, & quo pacto ſuperetur. 169
Dimenſiones quo modo ſine numerorum ſupputatione fiant. 45. 48. 50. 51.
Dimenſio altitudinis quo pacto fiat, ſine reductione vmbra verſa ad rectam, quando in vna ſtatione vmbra recta, & verſa in altera ſecatur. 78
Dimenſiones diſtantiarum eodem modo fiunt in quadrato ſtabili, ac pendulo. 73
Dimenſio diſtantiæ quo modo fiat ſine reductione vmbrarum rectarum ad verſas, quando in vtraq; ſtatione latus vmbræ rectæ ſecatur. 74
Dimenſio diſtantiæ quo modo fiat ſine reductione vmbra recta ad verſam, quando in vna ſtatione vmbra recta & in altera verſa ſecatur. 75
Dimenſio circuli ex Archimede. 118 (80
Dioptra portio intra quadratū ſtabile quo pacto reperiatur.
Diſtantiam ab oculo vel pede menſoris ad quoduis punctum in HoriZonte notatum, per vnicam ſtationem, per quadrantem metiri. 53
Diſtantiam accliuem montis à loco menſoris vſque ad baſem altitudinis monti impoſita, etiam non viſam, vna cum ipſa altitudine, quando menſor in aſcenſu montis conſiſtit, prope verum efficere cognitam, beneficio quadrantis. 61
Diſtantiam accliuem montis à loco menſoris vſque ad baſem altitudinis monti impoſita, etiam non viſam, vna cum ipſa altitudine, quando menſor in aſcenſu montis conſiſtit, prope verum, beneficio quadrati efficere cognitam. 91
Diſtantiam à ſummitate turris, vel muri vſq; ad ſignum aliquod in HoriZonte poſitum, licet ad illud acceſſus non pateat, per quadratum eruere, vbicunq; menſor exiſtat. 88
Diſtantiam horiZontalem inter turrim aliquam, & aliud quodpiam ſignum, ex turri per duas ſtationes in faſtigio factas, vel in duabus feneſtris, quarum vna ad perpendiculum ſit ſub alia, quando ſpatium inter illas feneſtras notum eſt, etiamſi totius turris altitudo ignota ſit, per quadrantem dimetiri. Atq; hinc obiter altitudinem turris patefacere. 55
Diſtantiam ab oculo, vel pede menſoris (vbicunq; exiſtat) ad quoduis punctum in aliqua altitudine, vel etiam in HoriZonte notatum per quadratum exquirere, per vnicam etiam ſtationem. 86. 88
Diſtantiam inter duo puncta in quolibet plano eleuato, ſiue illud ad Horizontem ſit rectum, ſiue inclinatum per quadrantem metiri. 53
Diſtantiam in plano, ſiue acceſſibilis ea ſit, ſiue inacceſſibilis, per duas ſtationes in eodem plano factas per quadrantem tam pendulum, quam ſtabilem metiri, quando in eius extremo erecta eſt altitudo aliqua perpendicularis, etiamſi infimum eius extremum non cernatur. Atque hinc altitudinem quoque ipſam elicere. 47. 49
Diſtantiam à baſe turris ad ſignum propoſitum in Horizonte, ex ſummitate turris, vel ex aliqua eius feneſtra, per quadratum cognoſcere. 83
Diſtantiam ab oculo, vel pede menſoris ad quoduis punctum in aliqua altitudine notatum, per duas ſtationes in plano factas, per quadrantem metiri. 52
Diſtantiam inter ſignum quodpiam in HoriZonte poſitum, & ſummitatem turris, vel muri alicuius, licet ad ipſum ſignum acceſſus non pateat, per quadrantem colligere. 56
Diſtantiam inter te, & ſignum quodcunque in plano HoriZontis poſitum, per quadratum perueſtigare. 71. 72
Diſtantiam in Horizonte inter menſorem, & ſignum aliquod viſum, per ſimpliciſſimum quoddam inſtrumentum indagare. 96
Diſtantiam in plano per duas ſtationes in eodem plano factas per quadratum metiri, quando in eius extremo erecta eſt altitudo aliqua perpendicularis, etiamſi infimum eius extremum non cernatur. 73
Diſtantiam inter duo montium, aut turrium cacumina, per ſimpliciſſimum quoddam inſtrumentum reperire. 96
Diſtantiam in plano Horizontis inter menſorem, & ſignum quoduis, beneficio Normæ adinuenire. 95
Diſtantiam inter duo ſigna in plano, cui altitudo inſiſtit, ſi ea diſtantia è directo menſoris iaceat, & vtrumque eius extremum cerni poſſit, ex altitudinis faſtigio, etiamſi altitudo ſit menſoris ſtatura, per quadratū comprehēdere. 84
Diſtantiam in plano Horizontis, quæ non ſit valde magna, facillimo quodam modo dimetiri. 95
Diſtantiam inter pedes menſoris, & ſignum aliquod in plano Horizontis beneficio baculi metiri, quando extremus terminus diſtantiæ videri poteſt. 93
Diſtantiam inter duo ſigna, vel puncta in quolibet plano ſiue recto ad HoriZontem, ſiue inclinato, per quadratum metiri. 88
Diſtantiam per vnicam ſtationem metiri per quadrantem, quando altitudo nota eſt. 48
Diſtantiam, quando menſor in vno eius extremo, vel in aliqua altitudine nota ad planum, in quo eſt diſtantia, perpendiculari exiſtens alterum extremum videre poteſt, per quadrantem metiri. 54
Doliorum capacitas. 97

E.

Ellipſis centro dato in linea axis, vna cum duobus punctis Ellipſis, vtrumq; axis vtriuſque extremum reperire. 209
Ellipſis data area. 129
Ellipſi ſimilē figurā, quā ouatā dicunt, circino deſcribere. 218
Examen extractionis radicum. 168
Extrahere radicem cuiuſuis generis ex dato numero. 166

F.

Facilis inuentio lineæ rectæ cuiuis circumferentiæ æqualis, ex propria figura. 193
Facilis inuentio quadrati circulo æqualis. ibid.
Figura regularis circulo circumſcripta maiorem ambitum habet, quam circulus. 195. 196
Figuræ numeri, ex quo radix extrahitur, quo modo per puncta ſignentur. 166
Figuræ rectilineæ cuilibet circulum æqualem deſcribere. 194
Figuræ regularis area, cui triangulo rectangulo ſit æqualis. 175
Figuræ regularis area, cui rectangulo æqualis ſit. 174
Figuram Ellipſi ſimilem, quam ouatam dicunt, circino deſcribere. 218
Figuram rectilineam circulo æqualem, & alteri ſimilem conſtituere. 194
Figuram rectilineam in quotuis partes æquales per rectam datæ rectæ parallelam diſtribuere. 157
Figuram ſolidam quamcunq; ex iis, de quibus Euclid. in Stereometria agit augere vel minuere in data proportione. 164
Figuram rectilineam ex dato angulo, vel puncto in latere, in quotuis partes æquales partiri. 154
Figuram planam rectilineam, vel circulum, in data proportione augere, vel minuere. 164
Figuram ſimilem pluribus figuris ſimilibus, quarum latera homologa data ſint æqualem. Et circulum pluribus circulis quorum diametri, circumferentiæue datæ ſint, æqualem deſcribere. 128
Figurarū duarum ſimilium, aut circulorum proportio, ex datis duobus lateribus homologis, vel diametris, circumferentiiſue. ibid.
Figurarum Iſoperimetrarum latera numero æqualia habentium, maxima & æquilatera eſt, & æquiangula. 180
Figurarum regularium Iſoperimetrarum maior eſt illa, quæ

plures continet angulos plurave latera. 176
Figuris rectilineis regularibus circulus, cui iſoperimetra ſunt, maior eſt. 182
Filum perpendiculi ſecans vmbram rectam facit angulum complementi altitudinis: ſecans vero vmbram verſam, angulum conſtituit ipſius altitudinis. 66
Fractionem magnam ad minorem fere æquiualentem reducere. 116
Fractionis inter duas media facilis inuentio. ibid.
Fruſti marmoris regularis ſoliditas. 133
Fruſti pyramidis, & coni area. 132
Fruſti ſphæræ ſoliditas. 144

G.

GEnera radicum innumera. 166
Generatio cuborum. 227
Generatio quadratorum. ibid.
Geodæſia, ac Geometria quid. 147
Geometria, & Geodæſia quid. ibid.
Geometrici quadrati conſtructio. 65
Gnomonica tabula. 68
Gnomonica tabula facillima conſtructio, eiusq; vſus. 66
Gnomon, ſeu latus quadrati medio loco proportionale eſt inter vmbram rectam, ac verſam. 65
Gradus ac Min. in dato arcu quot contineantur, per inſtrumentum partium cognoſcere. 8
Gradus, ac Min. quotlibet, quo pacto ex circulo quouis, ope inſtrumenti partium, abſcindantur. 8

H.

HEmiſphærij conuexa ſuperficies. 142
Hemiſphærij ſoliditas. 143
Hepeagoni latus non recte à Carolo Mariano, Alberto Durero, Franciſco Fluſſate inueniri. 212
Hyperbolici Conoidis ſoliditas. 145
Hypotenuſæ inuentio per quadrantem. 45. 47. 49. & 51.

I.

IMpares numeros quemlibet cubum componentes inuenire. 228
Imperata pars quo pacto ex data recta abſcindatur, per inſtrumentum partium. 8
Inacceſsibilem altitudinem, cuius baſis non videatur, & ad quam per nullum ſpatium ſecundum rectam lineam accedere poſſit menſor, aut recedere, vt duæ ſtationes fieri poſſint, ſed ſolum ad dextram, ſiniſtramue ad locum, è quo eius baſis cernatur, per quadratum explorare. 89
Inacceſsibilem altitudinem, cuius baſis non videatur, & ad quam per nullum ſpatium ſecundum lineam rectam accedere, poſsimus, aut recedere vt duæ ſtationes fieri poſſint, ſed ſolum ad dextram, ſiniſtramue ad locum, è quo eius baſis appareat, per quadrantem explorare. 56
Inacceſsibilem altitudinem, quando diſtantia à loco menſoris ad baſem altitudinis ignota eſt, per duas ſtationes in plano factas, per quadrantem dimetiri. Atque hinc diſtantiam quoq; ipſam eruere, etiamſi extremum eius terminus non cernatur. 46
Inacceſsibilem altitudinem, quando neq; diſtantia à loco menſoris ad eius baſem nota eſt, neq; è directo ipſius duæ ſtationes in plano fieri poſſunt, neq; denique baſis apparet, per quadrantem notam reddere. Atq; hinc obiter ipſam quoq; diſtantiam elicere. 57
Inacceſsibilem altitudinem beneficio ſpeculi plani, vna cum ſpeculi diſtantia tam à baſe, etiam non viſa, quam à cacumine altitudinis cognoſcere. 98
Inacceſsibilem diſtantiam per quadrantem tam pendulum quam ſtabilem metiri, quando in eius extremo erecta eſt altitudo perpendicularis, etiamſi infimum eius extremum non cernatur. Atq; hinc altitudinem quoq; ipſam elicere. 43. 45
Incidentiæ angulus cur angulo reflexionis ſit æqualis. 200
Inſtrumenta menſurandi varia 42
Inſtrumenti, quod Itali Squadra Zoppa dicitur, conſtructio, & vſus. 100
Inſtrumentum partium quid, & quo pacto conſtruatur. 5
Inſtrumentum partium quo pacto aliter conſtituatur. 10
Inſtrumentum pro librationibus aptiſsimum. 606
Interuallum, ad cuius extrema accedere non liceat, dummodo ea appareant & ipſum interuallum productum ad pedes menſoris pertingat, ex altitudine aliqua nota, per quadrantem metiri. 54
Interuallum è directo menſoris poſitum cuius vtrumq; extremum, vel alterum non appareat, niſi menſor ad dextram, vel ſiniſtram accedat, per quadrantem comprehendere. 56
Interuallum in Horizonte inter turrim aliquam, & aliud quodpiam ſignum, ex turri per duas ſtationes in faſtigio factas, vel in duabus feneſtris, quarum vna ſit ad perpendiculum ſub alia, quando ſpatium inter illas feneſtras notum eſt, etiamſi totius turris altitudo ignota ſit, per quadrantem dimetiri. Atq; hinc obiter altitudinem turris patefacere. 58
Interuallum in Horizonte, inter menſorem, & ſignum aliquod viſum, per ſimpliciſsimum quoddam inſtrumentum indagare. 96
Interuallum in plano Horizontis inter menſorem, & ſignum quoduis, beneficio Normæ adinuenire. 94
Interuallum inter duo puncta in quolibet plano eleuato, ſiue illud ad Horizontem ſit rectum, ſiue inclinatum, per quadrantem metiri. 53
Interuallum inter duo ſigna, vel puncta in quolibet plano ſiue recto ad Horizontem, ſiue inclinato, per quadratum metiri. 88
Interuallum, quando menſor in vno eius extremo, vel in aliqua altitudine nota ad planum, in quo interuallum eſt, perpendiculari exiſtens alterum extremum videre poteſt, per quadrantem metiri. 34
Interuallum tranſuerſum in Horizonte, cuius vtrumq; extremum videri poteſt, per quadratum metiri. 88
Interuallum inter pedes menſoris & ſignum aliquod in plano Horizontis, beneficio baculi metiri, quando extremus terminus interualli videri poteſt. 93
Interuallum tranſuerſum in Horizonte, cuius vtrumq; extremum inſpici poteſt, per quadrantem efficere notum. 58
Ioſephus Scaliger perperam Archimedem de Dimenſione circuli reprehendit. 119
Irregularium omnino corporum area. 148
Iſoperimetra figura quæ, & tractatio de eis inſtituta. 174
Iſoperimetrarum figurarum regularium maior eſt illa, quæ plures continet angulos plurave latera. 176
Iſoperimetrarum figurarum latera numero habentium æqualia, maxima & æquilatera eſt, & æquiangula. 180
Iſoperimetrorum triangulorum eandem habentium baſem, maius eſt illud, quod duo latera habet æqualia. 177
Iſoſcelis trianguli area. 109
Iſoſcelia duo triãgula ſimilia baſium inæqualium, ſimul maiora ſunt duobus Iſoſcelibus ſimul ſupra eaſdem baſes, quæ quidem inter ſe ſint diſſimilia, prioribus vero Iſoperimetra, habeantque quatuor latera inter ſe æqualia. 179
Iſoſcelibus duobus triangulis datis, quorum baſes inæquales ſint, & duo latera vnius duobus alterius æqualia: ſuper eiſdem baſibus duo triangula Iſoſcelia ſimilia, & prioribus ſimul ſumptis Iſoperimetra conſtituere. 178

Late-

L.

Latera duo trianguli obliquanguli, ex tertio latere, & duobus quibuſuis angulis, inuenire. 40
Latera tria in quadrilatero maiora ſunt quarto latere. 202
Lateris trianguli obliquanguli ſegmenta à perpendiculari facta, ex datis tribus lateribus cognoſcere. 40
Laterum proportiones ex datis angulis cuiuſuis trianguli patefacere. 39
Latus figuræ regularis, quo pacto ex eius area deprehendatur. 117
Latus figuræ regularis quo pacto ex ſemidiametro circuli circumſcripti cognoſcatur. 113
Latus polygoni propoſiti quo pacto in dato circulo per inſtrumentum partium inueniatur. 8
Latus quadratricis æquale eſt quadranti circuli, cuius ſemidiameter eſt baſis quadratricis. 192
Latus trianguli rectanguli ex baſe, & alterutro angulorum acutorum, notum efficere. 39
Latus trianguli rectanguli, ex baſe, & altero cognoſcere. ibid.
Latus trianguli rectanguli ex altero latere & alterutro angulo acuto eruere. ibid.
Latus trianguli obliquanguli ex duobus lateribus, & angulo ab ipſis comprehenſo colligere. 40
Latus trianguli obliquanguli ex duobus reliquis lateribus, & duobus quibuſuis angulis, addiſcere. ibid.
Latus trianguli obliquanguli ex duobus lateribus, & angulo vni eorum oppoſito, (ſi modo conſtet ſpecies anguli alteri lateri dato oppoſiti, quando datus angulus acutus eſt) exquirere. 42
Lenticularis figuræ area. 127
Librare ſpatium terræ inæquale, producendis aquis: aut etiam, ſi lubet, Horizonti æquidiſtans efficere. 101
Lineæ rectæ diuiſæ in quotuis partes æquales, quot eiuſmodi partes in quauis alia recta contineantur, ope inſtrumenti partium cognoſcere. 6
Lineæ rectæ in quotuis partes æquales diuiſæ, quot decimæ, vel centeſimæ, &c. in quauis particula vnius partis contineantur per circinum deprehendere. 34
Lineæ ſuperficies, ac ſolida, penes quid menſurentur. 103
Lineæ rectæ ſub dimenſionem cadentes quæ ſint. 43
Lineæ duæ, vna recta, & altera inflexa, nunquam concurrentes, licet in infinitum producantur, & ſemper magis vna ad alteram accedat. 163
Lineam quadratricem deſcribere. 189
Lineam rectam, ad cuius extrema accedere non liceat, dummodo ea appareant, & ipſa linea recta producta ad pedes menſoris pertingat, ex altitudine aliqua nota, per quadrantem metiri. 54
Lineam rectam in Horizonte inter turrim aliquam, & aliud quodpiam ſignum, ex turri per duas ſtationes in faſtigio factas, vel in duabus feneſtris quarum vna ad perpendiculum ſit ſub alia, quando ſpatium inter illas feneſtras notum eſt, etiamſi totius turris altitudo ſit ignota, per quadrantem dimetiri. Atq; hinc obiter altitudinem turris patefacere. 55
Lineam rectam datam per inſtrumentum partium diuidere, vt alia recta diuiſa eſt. 53
Lineam rectam è directo menſoris poſitam, cuius vtrumq; extremum, vel alterum non appareat, niſi ad dextram vel ſiniſtram menſor accedat, per quadrantem comprehendere. 56
Lineam rectam in Horizonte per quadratum metiri, quando menſor in vno eius extremo exiſtens alterum extremum videre non poteſt, neq; altitudo in promptu eſt, ſed ſolum ad dextram, vel ſiniſtram per lineam perpendicularē recedere poteſt ad locum, è quo alterum extremū appareat. 84
Lineam rectam arcui quadrantis æqualem reperire. 191
Lineam rectam in Horizonte è directo menſoris iacentem, per quadratum cognoſcere, ad cuius extrema neque accedere liceat, neq; è loco menſoris eam dimetiri: dūmodo ad dextram, vel ſiniſtram per lineam perpendicularem ad locum aliquem ire poſſit menſor, ex quo vtrumq; extremum appareat. 58
Lineam rectam, quando menſor in vno eius extremo, vel in aliqua altitudine nota ad planum, in quo eſt linea, perpendiculari exiſtens alterum extremum videre poteſt, per quadrantem metiri. 54
Lineam rectam tranſuerſam in Horizonte, cuius vtrumque extremum videri poteſt, per quadrantem metiri. 89
Lineam rectam tranſuerſam in Horizonte, cuius vtrumque extremum inſpici poteſt, per quadrantem notā efficere. 55
Linearum quarundam, & angulorum mechanicam menſurationem admittendam eſſe. 111
Longitudinem tranſuerſam in Horizonte, cuius vtrumq; extremum inſpici poteſt, per quadrantem notam efficere. 55
Longitudinem trabis ad Horizontem inclinatæ, cuius portio ſuperior tantum conſpiciatur, vna cum angulo inclinationis, diſtantia baſis à menſore, & altitudine faſtigij ſupra Horizontem, per quadratum metiri. 100
Longitudinem rectā è directo menſoris poſita, cuius vtrumque extremum vel alterum non appareat, niſi ad dextram, vel ſiniſtram accedat menſor, per quadrantem comprehendere. 56
Longitudinem vmbræ ab altitudine, Sole lucente, quādo proiecta altitudo eſt cognita, ope quadrati adipiſci. 96
Longitudinem lineæ rectæ, quando menſor in vno eius extremo, vel in altitudine aliqua nota, quæ perpendicularis ſit in eo extremo ad planum, in quo linea iacet, exiſtens alterum extremum videre poteſt, per quadrantem comprehendere. 54
Longitudinem in Horizonte inter turrim aliquam, & aliud quodpiam ſignum, ex turri per duas ſtationes in faſtigio factas, vel in duabus feneſtris quarum vna ſit ſub alia ad perpendiculum, quando ſpatium inter illas feneſtras notum eſt, etiamſi totius turris altitudo ignota ſit, per quadrantem dimetiri. Atq; hinc obiter altitudinem turris patefacere. 55
Longitudinem in Horizonte extenſam per quadratum metiri, quando menſor in vno eius extremo exiſtens alterum videre non poteſt, propter tumorem aliquem interiectum, neque altitudo in promptu eſt, ſed ſolum ad dextram, vel ſiniſtram per lineam perpendicularem recedere poteſt ad locum, è quo alterum extremum appareat. 84
Longitudinem in Horizonte è directo menſoris iacentem, per quadratum cognoſcere, ad cuius extrema neq; accedere liceat, neq; è loco menſoris eam dimetiri, neq; vlla adſit altitudo: dummodo ad dextram, vel ſiniſtram per lineam perpendicularem ad locum aliquem ire poſſit menſor, ex quo vtrumq; extremum appareat. 85
Longitudinem, ad cuius extrema accedere non liceat, dummodo ea appareant, & ipſa longitudo producta ad pedes menſoris pertingat, ex altitudine aliqua nota, per quadrantem metiri. 54
Longitudinem aſcenſus alicuius montis, ſi eius cacumen ab oculo in radice conſtituto videatur, per inſtrumentum ſimpliciſſimum cognoſcere. 97

M.

Magnitudinum quatuor proprietas quædam. 196
Magnitudinibus in partes proportionales ſectis, ſi in ſingulis vna pars iterum ſecetur proportionaliter, erunt ibidem tota etiam ſectæ proportionaliter. 148
Marmoris regularis ſoliditas. 13
Mechanica menſuratio in nonnullis lineis, & angulis admittenda eſt. 111
Medias duas proportionales inter duas datas, ex Nicomede, prope verum, adinuenire. 163

Medias duas proportionales inter duas datas, ex Diocle, prope verum inquirere. 162
Medias duas proportionales inter datas duas, ex Herone, & Apollonio Pergao, prope verum, inuenire. 160
Medias duas proportionales inter duas datas, ex Phylone Byſantio, & Philopono, prope verum, inquirere. 161
Medium numerum proportionalem, vel duos medios inter datos duos numeros comperire. 165
Menſorum ratio communis in area cuiuſuis figura, vel agri inueſtiganda. 112
Menſurandi varia inſtrumenta. 42
Menſura linearum, ſuperficierum, ac ſolidorum penes quid ſumantur. 103
Milleſimarum decima partes quo modo ſumantur, etiamſi inſtrumentum partium diuiſum ſit in 100. partes duntaxat. 7
Milleſima partes quomodo capiantur, etiamſi in inſtrumento partium contineantur tantum 100. partes. 7
Milleſima, vel centeſima partes in quauis recta linea quo pacto capiantur, ope inſtrumenti partium. 6
Minuta quolibet quo pacto ex gradu quouis abſcindantur per circinum. 34
Minuta ac ſecunda quo pacto per circinum in quauis particula gradus deprehendantur. 33
Minuta, & ſecunda quo pacto ex quadrante constructo reperiantur. 14
Minutia, cuius Numerator ex duarum minutiarum Numeratoribus, & Denominator ex denominatoribus conflatur maior eſt minore, & maiore minor. 163
Minutia inter duas media facilis inuentio. 116
Minutiam magnam ad minorem fere aquiualentem reducere. ibid.
Montis altitudinem metiri per quadrantem. 47.48
Montis, vel turris altitudinem ex eius ſummitate per vnicam ſtationem ope quadrati ſtabilis metiri, vna cum diſtantia ſigni in HoriZonte viſi vſq; ad perpendiculum montis, aut turris. 82
Montis, aut turris altitudinem ex eius vertice per quadrantē metiri, ſi in plano, cui inſiſtit, ſpatium aliquod è directo menſoris notum ſit, deprehendere. 52
Montis, aut turris altitudinem ex eius ſummitate per quadratum dimetiri, quando in plano ſummitati HoriZonti aquidiſtante dua ſtationes fieri poſſunt, & ſignum aliquod in HoriZonte cernitur. 81
Montis, aut turris altitudinem ex eius vertice per duas ſtationes in haſta aliqua erecta, vel in duabus feneſtris turris, quarum vna ſit ſupra aliam, factas, è quibus ſignum aliquod in HoriZonte videri poſſit, per quadrantem metiri. Atque hinc diſtantiam quoque à perpendiculo montis, vel turris, vſq; ad ſignum viſum cognoſcere. 50
Montis, aut turris altitudinem ex eius vertice per duas ſtationes in eiuſdem ſummitate factas, è quibus ſignum aliquod in HoriZonte appareat, per quadrantem dimetiri. Atque hinc ipſam quoque diſtantiam à montis perpendiculo, vel turris baſe ad ſignum illud inueſtigare. 48
Montis vel turris altitudinem ex eius faſtigio, quando è directo menſoris interuallum aliquod inter duo ſigna vel etiam inter ſignum quodpiam ac turrim cognitum eſt, per quadratum conijcere. 85
Montis, vel turris altitudinem ex eius ſummitate per duas ſtationes in haſta aliqua erecta factas, inueſtigare per quadratum, quando ſignum aliquod in HoriZonte videri poteſt. 82
Multilatera figura irregularis area qua. 112
Muri cuiuſq; ſoliditas. 133

N.

Norma beneficio altitudinem turris, aut alterius rei inueſtigare. 94
Norma beneficio diſtantiam in plano HoriZontis inter menſorem, & ſignum quoduis, percipere. ibid.
Numeros particulares pro ſingulis radicum ſpeciebus, quo modo reperiantur. 167
Numeros impares datum cubū componentes reperire. 228
Numerum aliquo concipiente, quot es vnitates remaneant poſt tres operationes imperatas, conijcere. 200

O.

Obliquanguli trianguli area, ex vno latere, ac duobus angulis. 111
Obliquanguli trianguli area, ex duobus lateribus, & angulo ab ipſis comprehenſo. ibid.
Obliquangulorum quadrilaterorum area. ibid.
Obliquangulorum triangulorum rectilineorū problemata. 40
Obſeruationis angulus quis. 44
Ouatam figuram Ellipſi ſimilem circino deſcribere. 218
Octogonum regulare ad datam altitudinem latitudinemue conſtituere. 215
Octogonum regulare circulo inſcriptum medium proportionale eſt inter quadratum circulo circumſcriptū, & quadratum eidem inſcriptum. ibid.

P.

Parabolici Conoidis ſoliditas. 144
Parabola data area. 129
Parallelepipedum ſub quadrato alterutrius extremarum, (ſi ſint quatuor linea continue proportionales) & altera extrema comprehenſum, aquale eſt cubo media proportionalis, qua priori extrema aſſumpta eſt propinquior. 165
Parallelepipedorum, Priſmatum, & cylindrorum area. 130.131
Parallelepipedo rectangulo cubum aqualem exhibere. 216
Parallelepipedum, aut cubum in datam proportionem diuidere. 218
Parallelepipedum rectangulum ſub data altitudine, vel ſupra datam baſem dato cubo aquale conſtituere. 216
Parallelogrammum datum in quotcunq; partes aquales diuidere per rectas duobus lateribus oppoſitis parallelas. 160
Parallelogrammum datum per rectam ex puncto ſiue extra, ſiue intra ipſum, ſiue in aliquo latere dato ductam bifariā ſecare. ibid.
Parallelogrammum in dato angulo aquale dato quadrilatero conſtituere. 199
Pars imperata quo pacto ex data recta abſcindatur, per inſtrumentum partium. 8
Partes aliquota ſimiles plurium magnitudinum eandem habent proportionem. 137
Partes decima milleſimarum quo pacto ſumantur, etiamſi inſtrumentum partium diuiſum ſit in 100. partes duntaxat. 7
Partes centeſima, vel milleſima in quauis recta linea, quo pacto ope inſtrumenti partium capiantur. 6
Partes quotcunque decima, vel centeſima, &c. quo pacto ex quauis parta recta in partes aquales diuiſa per circinum auferantur. 35
Partes milleſima, quo modo capiantur, etiamſi in inſtrumento partium contineantur tantum 100. partes. 7
Particula qualibet vnius partis centeſima inſtrumenti partium, quot partes decimas vnius centeſima, vel quot milleſimas totius lateris inſtrumenti complectatur, quo pacto cognoſcatur. 7

Par-

INDEX.

Partium inſtrumentum quid, & quo pacto conſtruatur. 3

Partium inſtrumentum, quo pacto aliter conſtruatur. 10

Pendulus quadrans quid. 14

Pentagonum regulare non recte conſtrui ab Alberto Durero, & aliis. 210

Peripheria circuli ex data diametro; & diameter ex data peripheria, accuratior. 128

Peripheria circuli, ac diameter, ex eius area. ibid.

Peripheria circuli quam proportionem habeat ad diametrum ſecundum Archimedem. 120

Peripheria circuli diuiſa per $3\frac{1}{7}$. *gignit numerum maiorem diametro,* 122

Peripheria circuli ad diametrum proportio accuratior, quæ. 126.

Peripheria circulorum inter ſe ſunt, vt diametri. 124.176

Peripheriam circuli vera maiorem; ex data diametro reperire. 123

Peripheriam data recta æqualem reperire. 194

Peripheriam circuli vera minorẽ, ex data diametro elicere. ib.

Perpendicularem in latus quodcunq; trianguli ex angulo oppoſito cadentem, ex omnibus tribus lateribus efficere notam. 42

Perpendicularis quæ ſegmenta faciat in latere trianguli obliquanguli. 40

Perpendicularis ex quolibet gradu quadrantis demiſſa, in quodnam punctum ſemidiametri cadat, per inſtrumentum partium cognoſcere. 9

Perpendicularis in triangulo quãdo eſt numerus ſurdus, quid agendum. 109

Perpendicularis in triangulo æquilatero quo pacto cognoſcatur. 114

Perpendicularis è centro figuræ regularis, quo pacto cognoſcatur. ibid.

Perpendiculi filum ſecans vmbram rectam facit angulũ complementi altitudinis: ſecans vero vmbram verſam, angulum conſtituit ipſius altitudinis. 64

Pinnacidia pro radio viſuali quo pacto conſtruenda ſint. 13

Pinnacidia quo pacto in quadrante ſint affigenda. ibid.

Polygoni propoſiti latus quo pacto in dato circulo per inſtrumentum partium inueniatur. 8

Portionem altitudinis maioris ex minori altitudine, & minoris portionem, ex maiori, per quadrantem cognoſcere. 59

Portionem altitudinis maioris ex minore altitudine, & minoris portionem ex maiore, per quadratum percipere. 90

Portionis ſphæræ ſuperficies conuexa. 142

Portionis ſphæræ ſoliditas. 243

Portionum ſphæroidis ſoliditas. 144

Primi inter ſe numeri ſi ambo non ſint quadrati, aut cubi; neque vlli eorum æque multiplices quadrati erunt aut cubi. Et ſi duorum numerorũ æque multiplices ſint ambo quadrati, aut cubi, etiam ipſi quadrati erunt, aut cubi. 201

Priſma, ac cylindrum in conum, & pyramidem: Item, conum, ac pyramidem in cylindrum, vel priſma æquale tranſmutare. 215

Priſma, conum, cylindrum, ac pyramidem inæqualem ſub data altitudine, & ſupra baſem quotuis angulorum conuertere. ibid.

Priſma, cylindrum, conum, ac pyramidem in parallelepipedũ ſupra baſem quadratam conuertere. ibid.

Priſmati, cono, cylindro, ac pyramidi cubum æqualem conſtruere. 216

Priſmati cuicunq; cylindrum æqualem, & pyramidi conum æqualem: Ac viciſſim cylindro priſma æquale, & cono æqualem pyramidem conſtruere. 215

Priſmati dato ſphæram æqualem conſtruere. 217

Priſma, pyramidem, cylindrum, & conum in parallelepipedũ rectangulum æquale datæ altitudinis, vel baſis commutare. 217

Priſma, vel cylindrum datum in datam proportionem diuidere. 218

Priſmati, aut cylindro æqualem pyramidem vel conum ſub eadem altitudine: Et cõtra pyramidi, vel cono æquale priſma, vel cylindrum conſtituere eiuſdem altitudinis. 214

Priſmatum parallelepipedorum, & cylindrorum area. 130.131

Probatio extractionis radicum. 167

Problemata 3.4.5.6. & 7. libri 3. quo pacto per vnicam ſtationem, ope quadrati ſtabilis abſoluantur. 79

Problemata triangulorum rectilineorum rectangulorum. 39

Profunditatem putei, vel ædificij cuiuſuis ad perpendiculum erecti, ſi modo angulus fundi, vel ſignum aliquod in fundo poſitum conſpiciatur, per quadratum efficere cognitam. 149

Profunditatem putei, vel ædificij cuiuſcunq; ad perpendiculum erecti, ſi modo angulus fundi, vel ſignum aliquod in fundo poſitum conſpiciatur, per quadrantem reperire. 60

Profunditatem vallis, eiuſdemq; deſcenſum obliquum, ſi non ſit valde inæqualis, eiuſq; terminus, vel aliquod in valle ſignum conſpici poſſit, per quadrantem ſcrutari. 61

Profunditatem vallis, eiuſdemq; deſcenſum obliquum, ſi non ſit valde inæqualis, & eius terminus, vel aliquod in ea ſignũ conſpici poſſit, per quadratum cognoſcere. 97

Propinquam radicem veræ, in numeris non quadratis non cubis, non ZenſiZenſis, non ſurdeſolidis, &c. inuenire. 170

Proportionalem numerum medium, vel duos medios, inter datos duos numeros reperire. 165

Proportionales duas medias inter duas datas, ex Diocle; prope verum inueſtigare. 161

Proportionales duas medias inter duas datas, ex Nicomede, prope verum, adinuenire. 163

Proportionales duas medias inter duas datas, ex Philone Byſantio, & Philopono, prope verum, inquirere. 161

Proportionales duas medias inter datas duas rectas, prope verum, ex Herone, & Apollonio Pergæo inuenire. 160.161

Proportionales laterum ex datis angulis cuiuſuis trianguli pateſacere. 25

Proportionalis tertia, & quarta quo pacto per inſtrumẽtum partium reperiatur. 9

Proprietas pulchra quadrati. 213

Proprietas circuli pulcherrima. 209

Proprietas quædam quatuor magnitudinum. 196

Proprietas pulchra Quadratricis. 191

Punctum, in quo duæ rectæ ad inuicem inclinatæ concurrant, inuenire. 46

Punctum declinationis cuiuslibet paralleli in diametro Aſtrolabij per inſtrumentum partium inuenire. 9

Putei, vel ædificij cuiuſcunq; ad perpendiculum erecti profunditatem, ſi modo angulus fundi, vel ſignum aliquod in fundo poſitum conſpiciatur, per quadrantem reperire. 60

Putei, vel ædificij cuiuſuis ad perpendiculum erecti profunditatem, ſi modo angulus in fundo, vel ſignũ aliquod in fundo poſitum conſpiciatur, per quadratum efficere cognitam. 92

Pyramidem, conum, cylindrum, ac priſma inæquale ſub data altitudine, & ſupra baſem quotuis angulorum reuocare. 215

Pyramidem, priſma, conum, & cylindrum in parallelepipedum rectangulum æquale datæ altitudinis, vel baſis commutare. 216

Pyramidem datæ ſphæræ æqualem extruere. 217

Pyramidem, priſma, cylindrum, & conum in parallelepipedum ſupra baſem quadratam conuertere. 215

Pyramidi, cono, cylindro, ac priſmati cubum æqualem efficere. 216.

Pyramidi conum æqualem, & priſmati cylindrum æqualem, Et contra cono, pyramidem æqualem, & cylindro priſma æquale conſtruere. 215

Pyra-

Pyramidi, vel cono æquale priſma, vel cylindrum eiuſdem altitudinis: Et viciſſim cylindro, vel priſmati æqualem conum vel pyramidem ſub eadem altitudine conſtituere. ibid.
Pyramidum, & conorum area. 131
Pyramis cui ſolido rectangulo æqualis ſit. 182

Q.

Quadrans pendulus quid. 14
Quadrans ſtabilis quid. ibid.
Quadrans, ſemidiameter, & baſis Quadratricis, continue ſunt proportionales. 191
Quadrantis lib. 1. cap. 2. constructi vſus in minutis, & ſecundis exquirendis, 14
Quadranti circuli rectangulum conſtituere Iſoperimetrum, & æquale. 186
Quadrantis conſtructio ad Min. & Sec. cognoſcenda. 10
Quadrati area. 100
Quadratæ radicis extractio. 168
Quadratæ, & cubicæ radicis extractio ex data minutia. 172
Quadratam & cubicam radicem in numeris non quadratis, & non cubis per lineas Geometrice inuenire. 173
Quadrati Geometrica conſtructio. 64
Quadrati pulchra proprietas. 213
Quadratorum differentiæ. 227
Quadratorum, & cuborum tabula vſq; ad radicem 1000. 221
Quadratorum generatio. 227
Quadratum, altera parte longius, Rhombum, ac Rhomboides, ex exceſſu diametri ſupra latus, &c. deſcribere. 203
Quadratum numerũ in quotlibet quadratos diſtribuere. 201
Quadrilateri tria latera maiora ſunt quarto latere. 202
Quadrato circulum æqualem deſcribere. 194
Quadratricis latus æquale eſt quadranti circuli, cuius ſemidiameter eſt baſis quadratricis. 192
Quadratricis baſis, ſemidiameter quadrantis, & quadrans ſunt continue proportionales. 191
Quadratricis pulchra proprietas. ibid.
Quadratricem lineam deſcribere. 195
Quadratum pendulum, ac ſtabile, quo modo vſurpetur. 63
Quadratum circumferentiæ circuli maximi in ſphæra ita eſt ad ſuperficiem ſphæræ, vt circumferentia circuli maximi ad diametrum. 137
Quadratum circulo æquale quo pacto facile exhibeatur en propria figura. 193
Quadratum dato circulo æquale conſtituere. 193
Quadratum diametri circuli maximi in ſphæra ad ſuperficiẽ ſphæræ, maiorem proportionem habet quam 7. ad 22. minorem vero, quam 71. ad 223. 138
Quadratũ datæ figuræ æquale, quo pacto facile cõſtruatur. 113
Quadratum diametri circuli ad circulum proportionem habet, quam 14. ad 11. proxime ſecundum Archimedem. 124
Quadratum diametri circuli ad circulum habet maiorẽ proportionem quam 14. ad 11. minorem vero, quam 284. ad 223. 125
Quadratum circumferentiæ circuli ad circulum habet maiorem proportionem, quam 892. ad 71. minorem vero, quam 88. ad 7. ibid.
Quadratum circumferentiæ circuli maximi in ſphæra ad ſuperficiem conuexam ſphæræ, maiorem proportionem habet, quam 223. ad 71. minorem vero, quam 22. ad 7. 138
Quadratum maximi lateris trianguli minus eſt, quam duplũ ſummæ quadratorum ex reliquis duobus lateribus deſcriptorum. 207
Quadratura circuli per numeros ſecundũ Arabes falſa eſt. 187
Quadratura circuli per lineas Campano aſcripta falſa eſt. ibi.
Quadratura circuli per numeros ex Alberto Durero falſa eſt. ibid.
Quadratura circuli per lineas. 186
Quadratura circuli per Hyppocratẽ Chium falſa eſt. 188. 189
Quadraturam circuli eſſe poſsibilem. 189
Quadrilateri omnino irregularis area. 112
Quadrilatero æquale parallelogrammum facile conſtruere in dato angulo. 199
Quadrilaterorum non rectangulorum area. 111
Quantitas anguli, quem latera inſtrumenti partium continent, quo pacto cognoſcatur. 9
Quarta & tertia proportionalis, quo pacto per inſtrumenmentum partium reperiatur. ibid.

R.

Radicis cubicæ extrahendæ regula propria. 170
Radicis cubicæ extractio. 168
Radicis quadratæ, & cubicæ extractio ex data minutia. 172
Radicis quadratæ extractio. 167
Radicis ſurdeſolidæ extractio. 169
Radicem cuiuslibet generis extrahere ex dato numero. 166
Radicem cuiuſq; generis ex data minutia extrahere. 171
Radicem quadratam, & cubicam in numeris non quadratis, & non cubis per lineas Geometrice inuenire. 173
Radicem veræ propinquam in numeris non quadratis, non cubis, non Zenſizenſis, non ſurdeſolidis, &c. inuenire. 170
Radicum infinitæ ſpecies. 168
Radix quadrata numeri fracti quo pacto eruatur. 110
Radix qualibet extrahenda quot figuras habere poſsit. 167
Recta linea in quotuis partes æquales, diuiſa, quot decimæ, vel centeſimæ, &c. in quauis particula vnius partis contineantur, per circinum deprehendere. 34
Recta ducta ex angulo acuto trianguli rectanguli in oppoſitũ latus, maior eſt proportio huius lateris ad eius ſegmentum prope rectum angulum, quam illius anguli acuti ad eius partem dicto ſegmento lateris oppoſitam. 178
Recta linea diuiſa in quotuis partes æquales, quot eiuſmodi partes in quauis alia recta contineantur, ope inſtrumenti partium, cognoſcere. 6
Recta data, quamuis minima, partem, vel partes imperatas ex ea auferre. 208
Recta connectens duos angulos oppoſitos in duobus triangulis æqualibus latus commune habentibus, & in diuerſas partes vergentibus, à communi latere biſariam diuiditur. 157
Recta cuius circumferentiæ æqualis, quo pacto facile reperiatur ex propria figura. 193
Rectæ duæ tangentes circulum, & in vno puncto coeuntes, maiores ſunt omnib. chordis interceptum arcum diuidentibus in quotcunq; partes æquales. 196
Rectæ lineæ adiungere rectam; ita vt quadratum totius compoſitæ æquale ſit quadrato rectæ adiunctæ, vna cum quadrato rectæ, quæ ex adiuncta, & proximo ſegmento prioris lineæ conflatur. 191
Rectæ tres circulum tangentes, & in duobus punctis coeuntes, maiores ſunt omnibus chordis arcus duos interceptos in partes æquales ſecantibus. 196
Recta linea circumferentiam æqualem reperire. 194
Recta quamuis minima exhibere multiplicem quamcumque, etiamſi circino ipſa non accipiatur. 207
Rectæ lineæ ſub dimenſionem cadentes quæ ſint. 43
Rectam lineam tranſuerſam in Horizonte, cuius vtrumque extremum inſpici poteſt, per quadrantem notam efficere. 55
Rectam lineam tranſuerſam in Horizonte, cuius vtrumq; extremum videri poteſt, per quadratum metiri. 68
Rectam lineam, ad cuius extrema accedere non liceat, dummodo ea appareant, & ipſa recta linea producta ad pedes menſoris pertingat, ex altitudine aliqua nota, per quadrantem metiri. 43
Rectam lineam in Horizonte per quadratum metiri, quando menſor in vno eius extremo exiſtens alterum extremum videre

videre non poteſt, neque altitudo in promptu eſt, ſed ſolum ad dextram, vel ſiniſtram per lineam perpẽdicularem recedere poteſt ad locum, è quo alterũ extremũ appareat. 84
Rectam lineam, quando menſor in vno eius extremo, vel in aliqua altitudine nota ad planum, in quo eſt recta, perpendiculari exiſtens alterum extremũ videre poteſt, per quadrantem metiri. 43
Rectam lineam è directo menſoris poſitam, cuius vtrumque extremum, vel alterum non appareat, niſi ad dextram, vel ſiniſtram menſor accedat, per quadrantem comprehendere. 56
Rectam lineam in HoriZonte è directo menſoris iacentem, per quadratum cognoſcere, ad cuius extrema neque accedere liceat, neque è loco menſoris eam dimetiri: dummodo ad dextram, vel ſiniſtram per lineam perpendicularem ad locum aliquem ire poſſit menſor, ex quo vtrumque extremũ appareat. 85
Rectam lineam in HoriZonte inter turrim aliquam, & aliud quodpiam ſignum, ex turri per duas ſtationes in faſtigio factas, vel in duabus feneſtris, quarum vna ſit ad perpendiculum ſub alia, quando ſpatium inter illas feneſtras notum eſt, etiamſi totius turris altitudo ſit ignota, per quadrantem dimetiri. Atque hinc obiter altitudinem turris patefacere. 55
Rectam arcui quadrantis æqualem reperire. 191
Rectam lineam datam per inſtrumentum partium diuidere, vt alia recta diuiſa eſt. 8
Rectanguli trianguli area, ex latere, quod recto angulo opponitur, & vno angulo acuto. 110
Rectanguli trianguli area, ex vno latere circa angulum rectum, & vno angulo acuto. ibid.
Rectangulorum duorum triangulorum ſimilium proprietas quædam. 178
Rectanguli trianguli area, ex vno latere circa angulum rectum, & latere, quod recto angulo opponitur. 110
Rectanguli trianguli area. 109
Rectangulo dato ſupra datam rectam æquale rectangulũ facile conſtruere. 107
Rectangulum, cuius duo exceſſus dantur, quibus diameter vtrumque latus ſuperat, conſtituere. 205
Rectangulum dato rectilineo æquale facile conſtruere. 200
Rectangulum, in quo exceſſus diametri ſupra maius latus, & maioris lateris ſupra minus datur, conſtituere. 206
Rectangulum ſub differentia exceſſuum, quibus diameter alicuius rectanguli vtrumque latus ſuperat, & minore exceſſu bis ſumptum, vna cum quadrato minoris exceſſus bis ſumpto æquale eſt quadrato rectæ, qua minus latus minorem exceſſum ſuperat. 204
Rectangulum ſub ſegmentis diametri alicuius rectanguli (ductis per idem punctum diametri parallelis) comprehẽſum, æquale eſt duobus rectangulis ſub ſegmentis duorum laterum inæqualium comprehenſis. 208
Rectangulum ſub diametro, & circumferentia maximi circuli in ſphæra, quadruplum eſt circuli maximi, & ſuperficiei conuexæ eiuſdem ſphæræ æquale. 137
Rectangulorum area. 103
Rectangulorum triangulorum rectilineorum problemata. 39
Rectarum duarum proportionem habentium, quã latus quadratricis ad baſem, maior æqualis eſt quadranti circuli, cuius ſemidiameter eſt minor recta. 193
Rectilineam figuram planam, vel circulum in data proportione augere, vel minuere. 164
Rectilineum angulum in tres æquales angulos diuidere. 171
Rectis tribus datis in vno plano non parallelis, rectam ducere, etiam per datum interdum punctum in media, ita vt eius ſegmenta inter mediam, & extremas ſint æquales, vel datam habeant proportionem. 169
Rectilineis duobus inæqualib. datis, ex maiore per lineam vni lateri parallelam detrahere rectilineum minori æquale 150
Rectilineo cuilibet æquale rectangulum facile conſtruere. 199
Rectilineo dato æquale quadrilaterum inter duas rectas ſuper datam rectam per lineam parallelam conſtituere. 148
Rectilineo in triangula reſoluto ex vno aliquo puncto, rectas ipſis triangulis ordine proportionales inuenire. 151
Rectilineo dato parallelogrammum rectangulum æquale, & Iſoperimetrum conſtituere. 241
Rectilineum datum per rectam à quouis angulo, vel puncto lateris, in datam proportionem ſecare. 152
Rectilineum datum ex angulo, vel puncto dato in latere, in quotuis partes æquales diſtribuere. 154
Rectilineum datum in quotuis partes æquales per rectam datæ rectæ parallelam diſtribuere. 157
Rectilineum datum per rectam datæ rectæ parallelam in datam proportionem diuidere. 154
Rectilineorum triangulorum obliquangulorũ problemata. 40
Rectilineorum triangulorum rectangulorum problemata. 39
Regionis, aut vrbis, vel campi ſitum in plano deſcribere. 99
Rectis duabus datis, quarum maior diametrum quadrati minoris non ſuperet: maiorem ita ſecare, vt partium quadrata ſimul ſumpta quadrato minoris lineæ ſint æqualia. 206
Reflexionis angulus cur angulo incidentiæ ſit æqualis. 200
Regula communis menſorum in area cuiuſuis figuræ, vel agri inueſtiganda. 113
Regula propria extractionis radicis cubicæ. 170
Regula vnica ad omnes rectas dimetiendas, quando rerum extrema videntur. 101
Regula conſtructio loco fili cum perpendiculo. 13
Regulare corpus quodlibet dato cubo æquale conſtituere. 217
Regulari corpori ſphæram æqualem exhibere. ibid.
Regularis figuræ area, cui rectangulo æqualis ſit. 175
Regularis figuræ area, cui triangulo rectangulo ſit æqualis. ib.
Regularis figura circulo circumſcripta maiorem ambitum habet, quam circulus. 195. 196.
Regularibus figuris rectilineis circulus, cui iſoperimetra ſunt, maior eſt. 223
Regularium figurarum Iſoperimetrarum maior eſt illa, quæ plures continet angulos, pluraue latera. 176
Regularium figurarum area à triangulo vſque ad Dodecagonum, quando latus eſt vnitas. 117
Regularium figurarum area. 114
Regularium quinque corporum ſuperficies conuexa. 135
Regularium quinque corporum area quæ. 133. 135.
Rhomboidis, ac Rhombi area. 156
Rhombi ac Rhomboidis area. ibid.
Rhombum, ac Rhomboides, ex exceſſu diametri ſupra latus, &c. deſcribere. 203

S.

SAccus tritici, quo pacto menſuretur. 133
Saxi regularis ſoliditas. ibid.
Scala altimetra quid. 54
Secãtes ac ſinus quo pacto in inſtrumento partium capiãtur. 7
Sectoris circuli area. 127
Sectoris ſphæræ ſoliditas. 143
Segmenta lateris trianguli obliquanguli à perpendiculari facta, ex datis tribus lateribus cognoſcere. 40
Semicirculo, quadranti, octaua parti circuli, &c, rectangulum conſtituere Iſoperimetrum, & æquale. 241
Semidiametri circuli inuentio ex latere figuræ regularis inſcriptæ. 115
Similem figuram pluribus figuris ſimilibus, quarum latera homologa data ſint, æqualem: Et circulum pluribus circulis, quorum diametri, circumferentiæue data ſint, æqualẽ deſcribere. 128
Similium duorum triangulorum rectangulorum proprietas quædam. 178
Similium duarum figurarum, aut circulorum proportio, ex datis duobus lateribus homologis, vel diametris, circumferentiiſue. 128

Similes partes aliquotæ plurium magnitudinum eandem habent proportionem. 137
Sinus totus quando tam paruus eſt, vt in inſtrumentum partium transferri nequeat, quid agendum. 9
Sinu toto poſito 10000. quo pacto in inſtrumento partiũ Tangentes ſumantur. 7
Sinu toto poſito 100. quo pacto Tangentes per inſtrumentum partium capiantur. 6
Sinus ac ſecantes quo pacto in inſtrumento partium capiantur. 7
Solidam figuram quamcunq; ex iis, de quibus Euclid. in Stereometria agit ſecundum proportionem datam augere, vel minuere. 164
Solida, vel corpora præcipua, quorum area inueſtigantur, quæ 130
Solida, ſuperficies, ac linea, penes quid menſurentur. 103
Soliditas cuiuſuis portionis ſphæræ. 143
Soliditas ſphæræ. 139
Soliditas ſphæræ vera minor, ex circumferentia maximi circuli. 142
Soliditas ſphæræ vera maior, ex diametro circuli maximi. ibi.
Soliditas ſphæræ vera minor, ex diametro maximi circuli. ibi.
Soliditas ſphæræ vera maior, ex circumferentia circuli maximi. ibid.
Soliditas ſphæroidis. 144
Soliditas, vel area hemiſpherij. 143
Soliditas portionum ſphæroidis. 144
Soliditas ſectoris ſphæræ. 143
Soliditas muri cuiuſque. 133
Soliditas fruſti regularis marmoris. ibid.
Soliditas fruſti ſphæræ. 147
Soliditas Conoidis Hyperbolici. 145
Soliditas Conoidis parabolici. 144
Soliditas vaſis excauati. 132
Solidum planis ſuperficiebus contentum, & circa ſphæram circumſcriptibile, cui ſolido rectangulo ſit æquale. 183
Solidorum quinque regularium area quæ. 178.179
Solidorum quinq; regularium ſuperficies conuexa. 179
Solidorum omnino irregularium area. 145
Solidum minus ex maiori detrahere, reſiduumque in cubum transformare. 217
Solidum rectangulum ſupra baſem quotcunque angulorum datæ ſphæræ æqualem conſtruere. ibid.
Solis, vel ſtellæ cuiuſuis altitudinem per quadratum obſeruare. 66
Spatium terræ inæquale pro ducendis aquis librare: aut etiã, ſi lubet, Horizonti æquidiſtãt efficere. 101
Spatium inter duo puncta in quolibet plano eleuato, ſiue illud ad Horizontem ſit rectum, ſiue inclinatum, per quadrantem metiri. 53
Species radicum infinitæ. 166
Speculi plani beneficio altitudinem monti impoſitam, ſi modo altitudinis baſis poſſit conſpici: Vel portionem ſuperiorem alicuius turris, metiri. 99
Speculi plani beneficio altitudinem, ad cuius baſem pateat acceſſus, vna cum diſtantia ſpeculi à cacumine altitudinis, deprehendere. 97
Speculi plani beneficio altitudinem inacceſſibilem, vna cum ſpeculi diſtantia tam à baſe, etiam non viſa, quam à cacumine altitudinis, cognoſcere. 98
Sphæra ad cubum circumferentiæ maximi circuli, maiorem proportionem habet, quam 49. ad 2904. minorem vero, quam 5041. ad 298374. 138
Sphæra quolibet cono, & cylindro ſibi Iſoperimetro maior eſt 141
Sphæra æqualis eſt ſolido rectangulo comprehenſo ſub ſemidiametro, & tertia parte ſuperficiei conuexæ. 183
Sphæra maior eſt quouis corpore regulari ſibi Iſoperimetro 184
Sphæra omnibus corporib. ſibi iſoperimetris, quæ planis ſuperficiebus contineantur, circaq; alias ſphæras circumſcriptibilia ſint, maior eſt. ibid.
Sphæra omnibus corporibus ſibi iſoperimetris, & circa alias ſphæras circumſcriptibilibus, quæ ſuperficieb. conicis contineantur, maior eſt. 185
Sphæræ area, vel ſoliditas, ex diametro maximi circuli. 143
Sphæræ datæ conum efficere æqualem. 217
Sphæræ datæ cylindrum æqualem exhibere. ibid.
Sphæræ datæ cubum æqualem: Et dato cubo æqualem ſphæram efficere 216
Sphæræ datæ pyramidem conſtituere æqualem. 217
Sphæræ datæ ſolidum rectangulum æquale ſupra baſem quotcunq; angulorum conſtituere. ibid.
Sphæræ ſuperficies vera minor, ex circũferentia maximi circuli. 142
Sphæræ ſuꝑficies vera minor, ex diametro circuli maximi. ibi.
Sphæræ ſuperficies vera maior, ex diametro circuli maximi. i.
Sphæræ area, ſeu ſoliditas vera minor, ex circumferentia circuli maximi. 143
Sphæræ area, ſeu ſoliditas maior, quam vera, ex circumferentia maximi circuli. ibid.
Spæræ area, ſiue ſoliditas, ex diametro maximi circuli. ibid.
Sphæræ ſoliditas. 139
Sphæra ad cubum diametri ſphæræ: maiorem proportionem habet, quam 223. ad 426. minorem vero, quam 11. ad 21. ibi.
Sphæræ ſuperficies conuexa cui rectangulo ſit æqualis. 137
Sphæræ ſuperficies conuexa ad quadratum circumferentiæ circuli maximi, maiorem proportionem habet, quam 7. ad 22. minorem vero, quam 71. ad 223. 138
Sphæræ ſegmentorum area. 142
Sphæræ ſuperficies ad quadratum circumferentiæ circuli maximi eſt, vt diameter ad circũferentiã circuli maximi. 137
Sphæræ ſuperficies vera maior, ex circumferentia circuli maximi. 141
Sphæræ portionis ſuperficies conuexa. 144
Sphæræ portionis ſoliditas. 143
Sphæræ area, eiuſdemq; ſuperficies conuexa. 137.139
Sphæræ ſuperficies ad quadratum diametri ſphæræ, vel circuli maximi maiorem proportionem habet, quam 223. ad 71. minorem vero, quam 22. ad 7. 138
Sphærã duabus, aut pluribus ſphæris æqualem deſcribere. 218
Sphærã dato corpori regulari æqualem conſtituere. 217
Sphæram dato priſmati æqualem conſtruere. ibid.
Sphæram minorem ex maiori detrahere, reſiduoq; æqualem ſphæram exhibere. 218
Sphæroidis portionum ſoliditas. 144
Sphæroidis area, vel ſoliditas. ibid.
Sphæram, vel figuram ſolidam in data proportione augere, vel minuere. 164
Squadra Zoppa apud Italos quid, eiuſque vſus. 101
Stabilis quadrans quid. 14
Stationum differentia quid. 44
Stellæ cuiuſuis, vel Solis altitudinẽ ꝑ quadratũ obſeruare. 66
Superficies conuexa quinq; corporum regularium. 135.
Superficiei conicæ proportio ad ſuam baſem: 146
Superficies conuexa ſphæræ, eiuſdemq; area. 137. 140
Superficies conuexa hemiſphærij. 142
Superficies conuexa ſphæræ ad quadratum circumferentiæ circuli maximi, maiorem proportionem habet, quam 7. ad 22. minorem vero quam 71. ad 223. 138
Superficies, linea, ac ſolida, penes quid menſurentur. 103
Superficies conuexa ſphæræ cui rectangulo ſit æqualis. 137
Superficies ſphæræ vera maior, ex circumferentia circuli maximi 141
Superficies ſphæræ vera maior, ex diametro maximi circuli. ibid.
Superficies ſphæræ vera minor, ex circumferentia circuli maximi. ibid.

Superficies ſphæra vera maior, ex diametro maximi circuli. i.
Superficies ſphæra vera minor, ex circumferentia circuli maximi. ibid.
Superficies ſphæra vera maior, ex diametro maximi circuli. i.
Superficies ſphæra ad quadratum circumferẽtia circuli maximi eſt, vt diameter ad circũferentiã circuli maximi. 137
Superficies conuexa portionis ſphæra. 142
Superficies ſphæra ad quadratum diametri circuli maximi, maiorem proportionem habet, quam 223. ad 71. minorem vero quam 22. ad 7. 138
Superficiet conuexa coni, & cylindri recti. 146.
Superficies cylindrica, demptis baſibus. ibid.
Superficies fruſti coni, demptis baſibus. ibid.
Surdeſolida radicis extractio. 168

T.

Tabula continens latera figurarum regularium à triangulo vſque ad figuram 80. laterum, poſita diametro 20000000. vel ſinu toto 10000000. 115
Tabula mirifica ad depromendos numeros pro ſingulis radicum ſpeciebus. 166
Tabula conſtructio & vſus pro minutis, & ſec. ex quadrante cognoſcendis. 16
Tabula gnomonica. 68
Tabula gnomonica facillima conſtructio, eiuſque vſus. 66
Tabula pro minutis ad plures quadrantes extenſio ſine regula aurea. 16
Tabula pro minutis, & ſecundis ex quadrante inueſtigãdis. 17
Tabula quadratorum, & cuborum vſq; ad radicem 1000. 220
Tabella pro min. & ſec. cognoſcendis ex quadrãte cõſtructo. 15
Tangens quando ſuperat ſinum totum, quid agendum, vt per vnicam translationem per inſtrumentum partium punctum quæſitum reperiatur. 9
Tangentes, poſito ſinu toto 10000. quo pacto in inſtrumento partium ſumantur. 7
Tangentes quo modo inueniantur ope inſtrumenti partium, poſito ſinu toto 1000. 7
Tangentes tres in duob. punctis coeuntes, maiores ſunt omnibus chordis duos arcus interceptos in partes æquales ſecantibus. 196
Tangentes duæ in vno puncto coeuntes, maiores ſunt omnibus chordis arcum interceptum in quotcunq; partes æquales diuidentibus. 195
Tangentes quo modo accipiantur reſpectu ſinus totius 100. ope inſtrumenti partium. 6
Tangentes quo pacto ſumantur, quando inſtrumentum partium continet 1000. partes. 6
Tangente aliqua inuenta in latere inſtrumenti partium, quo pacto eadem reperiatur reſpectu dati ſinus totius. 7
Tangentes perexiguæ quo pacto in inſtrumento partium ſumantur. 7
Terræ ambitum ex edito aliquo monte metiri. 214
Tertia & quarta proportionalis, quo pacto per inſtrumentum partium reperiatur. 9
Trabis longitudinem ad HoriZontem inclinatæ, cuius portio ſuperior tantum conſpiciatur, vna cum angulo inclinationis, diſtantia baſis à menſore, & altitudine faſtigij ſupra HoriZontem, per quadratum metiri. 101
TrapeZy habentis duo latera parallela, area. 111
TrapeZii irregularis facilis dimenſio. 114
TrapeZii nulla latera habentis parallela, area. 157
Triangula duo Iſoſcelia ſimilia baſium inæqualiũ, ſimul maiora ſunt duobus Iſoſcelibus ſimul ſuper eaſdem baſes, quæ quidem inter ſe ſint diſsimilia, prioribus vero Iſoperimetra habeantq; quatuor latera inter ſe æqualia. 179
Trianguli Iſoſcelis area. 109
Trianguli obliquãguli area, ex vno latere, ac duob. angulis. 111
Arianguli obliquanguli area, ex duobus lateribus, & angulo ab ipſis comprehenſo. ibid.
Trianguli rectanguli area, ex vno latere circa angulum rectũ & latere, quod recto angulo oppouitur. 110
Trianguli pulchra proprietas, ſi in eo ducatur vni lateri parallela, &c. 158
Triangulis duobus Iſoſcelibus datis, quorum baſes ſint inæquales, & duo latera vnius duobus alterius æqualia; ſuper eiſdem baſibus duo triangula Iſoſcela ſimilia, & prioribus ſimul ſumptis Iſoperimetra conſtituere. 178
Trianguli æquilateri area. 109
Trianguli cuiuslibet area cui rectangulo ſit æqualis. 174
Trianguli rectanguli area. 109
Trianguli rectanguli area, ex vno latere circa angulum rectum, & vno angulo acuto. 111
Trianguli rectanguli area, ex latere, quod recto angulo opponitur, & vno angulo acuto. 110
Arianguli inſignis proprietas, ſi in eo à duobus angulis ad media puncta oppoſiterum laterum rectæ ducantur, &c. 158
Triangulo duorum laterum inæqualium ſupra tertium latus triangulum conſtituere priori Iſoperimetrum duorum æqualium laterum. 177
Triangulo parallelogrammum æquale, & Iſoperimetrum cõſtituere. 186
Triangulorum rectilineorum rectangulorum problemata. 39
Triangulorum duorum rectangulorum ſimilium proprietas quædam. 178
Triangulorum Iſoperimetrerum eandem habentium baſem, maius erit illud, quod duo latera habet æqualia. 177
Triangulorum rectilineorum obliquangulorũ problemata. 40
Triangulum datũ ex dato puncto in latere in quotlibet partes æquales diuidere. 159
Triangulum datum per lineas vni lateri parallelas in quotlibet partes æquales diſtribuere. ibid.
Triangulum datum per rectam ex puncto extra triangulum dato in duas partes æquales partiri. 160
Triangulum totum ad triangulum abſciſſum per rectam, eſt, vt rectangulum ſub duobus laterib. ſectis ad rectangulum ſub duobus lateribus trianguli abſciſsi comprehenſum. 292
Tritici acervum, quo pacto menſuretur. 133
Tritici ſaccm, quo pacto menſuretur. ibid.
Turris, aut montis altitudinem, ex eius ſummitate per quadratum dimetiri, quando in plano ſummitatis HoriZonti æquidiſtante duæ ſtationes fieri poſſunt, & ſignum aliquod in HoriZonte cernitur. 81
Turris, aut alterius rei altitudinem per baculũ indagare. 94
Turris, aut alterius rei altitudinem, per Normam inueſtigare. ibid.
Turris, vel montis altitudinem ex eius ſummitate per duas ſtationes in haſta aliqua erecta factas, inueſtigare per quadratum, quando ſignum aliquod in Horizonte videri poteſt. 82
Turris altitudinem ex eius vertice per vnicam ſtationem per quadrantem metiri, ſi diſtantia ſigni in HoriZonte viſi vſque ad baſem turris nota ſit. 51
Turris, vel montis altitudinem, ex eius ſummitate per vnicã ſtationem, ope quadrati ſtabilis metiri, vna cum diſtantia ſigni viſi in HoriZonte vſq; ad turrem, vel montis perpendiculum. 82
Turris, aut montis altitudinem ex eius vertice per quadrantem metiri, ſi in plano, cui inſiſtit, ſpatium aliquod è directo menſoris poſitum notum ſit. 52
Turris, vel montis altitudinem ex eius faſtigio, quando è directo menſoris interuallum aliquod inter duo ſigna, vel etiam inter ſignum quodpiam, ac turrim cognitum eſt, per quadratum conijcere. 85
Turris, aut montis altitudinem ex eius vertice per duas ſtationes in eiuſdem ſummitate factas, è quibus ſignum aliquod in HoriZonte appareat, per quadrantem dimetiri.

Atque

Atque hinc ipſam quoq; diſtantiam à turris baſe, vel perpendiculo montis ad ſignum illud inueſtigare. 48

Turris, aut montis altitudinem ex eius vertice per duas ſtationes in haſta aliqua erecta, vel in duabus feneſtris turris, quarum vna ſit ſupra aliam, factas, è quibus ſignum aliquod in Horizonte videri poſſit, per quadrantem metiri. Atq; hinc diſtantiam quoque à perpendiculo turris, vel montis, vſque ad ſignum viſum cognoſcere. 50

Turrium duarum ſummitatibus viſis, etiamſi baſes propter ædificia interiecta occultentur, diſtantiam tam inter earum baſes, quam inter earundem faſtigia, vna cum ipſarum altitudinibus, ac diſtantiis à menſore, per quadratum conijcere. 101

V.

Vallis profunditatem, eiuſdemq; deſcenſum obliquum, ſi non ſit valde inæqualis, eiusq; terminus, vel aliquod in valle ſignum conſpici poſſit, per quadrantem ſcrutari. 63

Vallis profunditatem, eiuſdemq; deſcenſum obliquum, ſi non ſit valde inæqualis, & eius terminus, vel aliquod in ea ſignum conſpici poſſit, per quadratum cognoſcere. 92

Varia inſtrumenta menſurandi. 42

Vaſis excauati ſoliditas. 133

Vaſis excauati capacitas. ibid.

Vmbra recta, ac verſa quo pacto in quadrato Geometrico cognoſcenda ſit. 65

Vmbræ longitudinem ab altitudine, Sole lucente, proiectæ, quando altitudo eſt cognita, ope quadrati adipiſci. 96

Vmbra recta ac verſa in quadrato quæ & in quot partes à Geometris vtraque ſecetur. 66

Vmbra recta ac verſa in quot partes in hoc opere diuidatur. ibid.

Vmbræ rectæ ad verſam reductio, & contra. 95

Vrbis, vel campi, aut regionis ſitum in plano deſcribere. 100

Vſus & conſtructio tabulæ pro minutis & ſec. cognoſcendis ex quadrante. 15

Vſus quadrantis conſtructi in minutis, & ſecundis exquirendis. 13

Vſus tabulæ quadratorum, & cuborum in extrahendis radicibus quadratis & cubicis. 14

FINIS.

CHRISTOPHORI CLAVII BAMBERGENSIS E SOCIETATE IESV,

EPITOME ARITHMETICÆ PRACTICAE.

BENEVOLO LECTORI.

In Epinomide.

CVM omnis me Mathematicarum rerum cognitio delectat, tum verò ex Arithmeticæ tractatione incredibilem capio voluptatem; idq́ non ſolum ob eximiam quandam eius dignitatem, ſed etiam, quòd ſine Arithmetica, vt ego quidem exiſtimo, nulla ſcientia, vt Plato audet dicere, neque ipſa hominum ſocietas poſſit conſiſtere. Pluribus enim in mutuis commerciis, conuentisq́, quibus ferè hæc hominum coniunctio continetur, tempora incidunt, vt rationes accepti, & expenſi reddendæ, repoſcendæve ſint, tabulæ conficiendæ, numerus æqualiter, vel inæqualiter, certa quadam proportione ſeruata, in plures partes diuidendus, ſumma ſua ducenda; quibus in rebus circumuenire, & circumueniri, æque turpe, & perniciosum eſt: Itaque audacius illud quidem, ſed tamen verè dixit Plato, prudentiam, atque adeo humanitatem omnem è mundo conſtollere, qui Arithmeticam è vita tollant; cum ſine ea neq; publica, neque priuata res conſtare poſſint. Iam vero cæteræ diſciplinæ ſic Arithmetica nituntur, vt hac non videatur concidere poſſe, quin illæ caſu eodem labefactatæ corruant. Neque enim aut Aſtrologus, aut Geometra theoremata in vulgus probabit ſua, aut non ſolum veritatem, ſed etiam voluptatem habeant cum vtilitate coniunctam, qui vniuerſam numerorum naturam animo penitus comprehenſam non habuerit: quod ſi tantillum in rationibus putandis lapſus fuerit, iam cæterarum rerum ingentem ruinam videas. Atque idcirco princeps ingenij Plato hanc veſtibulum, & aditum ad reliquas doctrinas voluit eſſe, non ea ſolum cauſa, quod illæ ſine numeris nullæ ſint, verum etiam quod numerorum tractatione nitescit animus, & præparatur ad reliquos doctrinæ ſitus recipiendos. Huius ego præſtantiſſimæ ſcientiæ pulchritudine captus, olim dederam me ad totam numerorum naturam inueſtigandam, vt cum illam animo, ſcientiaq́ comprehendiſſem, tum demum literis eam illuſtrarem, atq́ Arithmeticæ præcepta, Algebræq́ documenta, (rem ita non omnibus cognitam) quibus in vita præclarius vix aliquid reperias, ad certa quædam capita, & faciliores demonſtrationes reuocarem, vt cuiuis aperta, & prompta eſſent. Reſerat præclara illa quidem, ſed multi laboris, atque temporis. Itaque interea dum opus illud à me limatur, politius, cœpi, quæ ex multorum libris diſperſa collegeram, ſeparatim ad meum vſum in commentariolum referre, vt videlicet ad manus mihi eſſent, meisq́ auditoribus explicarem: qui enim hactenus Arithmeticam tractarunt, ij aut multitudine præceptorum rem perturbarunt, aut breuitate obſcurarunt, ſic, vt (in quo tamen de nullius exiſtimatione detractum velim) quē in hac ſcientia magiſtrum, & ducem tyrones ſequantur, vix inueniant. Is libellus cum imprudenti mihi excidiſſet, & in manus hominum veniſſet, ſummis precibus contenderunt à me viri graues, vt eum cum plurimis communicarem, quòd fore dicerent, vt is vtiliſſimus accideret cum cæteris ſtudioſis, tum vero iis, qui noſtras ſcholas frequentant: quorum vtilitati nolle conſultum, non eſſe eius, qui ſua, ſuaq́ omnia Dei gloriæ, omniumq́ commodis conſecraſſet. Horum ego precibus, & auctoritate inductus, hunc libellum typis mandare conſtitui, quem tu videlicet, Lector, eo animo ſuſcipias velim, quo damus: atq́ eo tantiſper vtere, dum maius illud Arithmeticæ opus in lucem exeat, quod propediem, Deo iuuante, fore ſperamus. Vale.

In Epinomide, & in 7. de Repub.

In 7 de Repub.

NVME-

NVMERATIO INTEGRORVM NVMERORVM.

CAPVT I.

NVMERATIO eſt cuiuſuis numeri propoſiti per proprios characteres, ac figuras deſcriptio, atque expreſſio.

Numeratio quid.

VTVNTVR autem Arithmetici decem characteribus, ſiue figuris ad omnium numerorum deſcriptionem, videlicet.

Decem figuræ numerorum.

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 0.

quarum priores nouem dicuntur ſignificatiuæ. Quælibet enim illarum tot vnitates ſignificat, quotum ipſa locum in appoſita ſerie occupat, vt hæc figura 6 ſignificat ſex vnitates: quia ſexto loco poſita eſt: atque ita de cæteris. Decima autem figura, & vltima nihil per ſe ſignificat, diciturque cifra; auget tamen ſignificationem, ac valorem aliarum figurarum, vt ex ſequentibus perſpicuum fiet.

IN quolibet numero, qui pluribus figuris ſcribitur tot dicuntur eſſe loca, quot ſunt figuræ ſiue ſignificatiuæ, ſiue non ſignificatiuæ: primusque locus, ſeu prima figura eſt, quæ extrema eſt verſus dexteram; ſecundus vero locus, ſeu ſecunda figura eſt illa, quæ proxime primam conſequitur verſus ſiniſtram, atque ita deinceps: adeo vt ille locus, ſeu figura dicatur vltima, quæ primam ſedem ad ſiniſtram occupat. vt hic 4352. prima figura eſt 2. & vltima 4. Si tamen ſingulæ figuræ ſingulos numeros repræſentent, hoc modo. 4. 3. 5. 2. prima figura erit 4 vltima vero 2. Cur autem ordo locorum, figurarumve in quolibet numero progrediatur à dextra verſus ſiniſtram, cauſa hæc eſt: quoniam à Phœnicibus inuenta eſſe dicitur Arithmetica, qui ſcribere ſolent à dextra ſiniſtram verſus, more Hebræorum, Arabum, & Chaldæorum.

Quot loca ſint in quolibet numero.
Prima figura, & vltima in quouis numero quæ ſit.
Ordo locorum in quouis numero cur à dextra ſiniſtram verſus procedat.

QVÆLIBET figura in primo loco poſita ſeipſam ſimpliciter repræſentat, in ſecundo decies ſeipſam ſignificat, in tertio centies, in quarto millies, in quinto decies millies, in ſexto centies millies, in ſeptimo millies millies, atque hoc pacto in infinitum: ita vt loca ordine ſeſe ſuperent in decupla proportione, vt ſecundus primum, tertius ſecundum, quartus tertium, &c. vt hic 34567. prima figura 7. ſignificat tantum ſeptem vnitates: ſecunda 6. ſignificat ſexaginta, nempe decies 6. tertia 5. quingentas, id eſt, centies 5. quarta 4. quatuor millia vnitatum, hoc eſt, millies 4. quinta 3. triginta millia vnitatum, ſiue decies millies 3. Itaque totus ille numerus ita proferendus erit. Triginta quatuor millia, quingenta, & ſexaginta ſeptem. Eodemque modo quicunque alius numerus exprimi poterit, ſi diligenter notetur, quoties quęlibet figura ſeipſam ſignificat in varijs locis poſita.

Quid quælibet figura in dato numero ſignificet.

CÆTERVM vt facilior reddatur numeratio, diſtribuendus erit numerus in membra, hoc modo. Supra primam figuram ad manum dextram ponatur punctum: Deinde procedendo verſus ſiniſtram, & omiſſis duabus figuris ſupra ſequentem figuram quarto loco poſitam aliud punctum ſtatuatur: Et ſic deinceps, omiſſis ſemper duabus figuris ſine punctis, ſupra ſequentem figuram punctum ſcribatur. vt hic factum eſſe vides.

Figuræ in quouis numero ſe ordine ſuperant in decupla proportione.

4232908956280 0

Quælibet enim figura ſub quocunque puncto cum duabus antecedentibus verſus ſiniſtram conſtituit vnum membrum, ita vt ſingula membra ternis figuris conſtent, vltimo membro verſus ſiniſtram excepto, quod aliquando vnicam figuram habere poteſt, illam nimirum, quæ ſub puncto collocatur; quemadmodum in propoſito exemplo in quinque membra diſtributo contingeret, ſi vltima hęc figura 4. tolleretur: aliquando verò duas, vt in dato exemplo.

Quid obſeruandũ ſit, vt aptius numerus exprimatur.

ITAQVE vt quicunque numerus enuncietur, ſatis eſt, ſi quotlibet membrum ſeorſum exprimatur, cuius prima figura vnitates ſignificat, ſecunda denas vnitatum, & tertia centenas. Sed poſt pronuntiationem cuiuſuis membri apponenda eſt hæc vox [Mille] toties, quot membra ſequuntur illud, quod enunciatur, ita tamen, vt primum ea vox ponatur in recto pluralis numeri, deinde vero ſemper dicatur [Millies] vt mox audies,

ILLVD porro membrum, quod vltimum eſt verſus ſiniſtram, primum eſt in enunciatione, & quod

 primum

primum eſt ad partem dexteram, in enunciatione eſt vltimum. Numerus ergo paulò ante propoſitus ita pronunciabitur. PRIMVM membrum 42.ſic. Quadraginta duo millia, millies, millies, millies, ita vt vox [mille] quater audiatur, propter quattuor membra, quæ hoc, quod enunciatur, ſubſequuntur.

SECVNDVM membrum 329. hoc modo, Trecenta, vigintinouem millia, millies, millies.

TERTIVM membrum 089. ita Octoginta nouem millia, millies.

QVARTVM membrum 562. ſic. Quingenta, ſexaginta duo millia.

QVINTVM denique membrum 800. hoc pacto. octingenta.

FACILIOR adhuc reddetur numeratio, ſi pro primo puncto ponatur o. & 1. pro ſecundo puncto, & 2. pro tertio, & 3. pro quarto, & ita deinceps, vt hic in eodem exemplo factum eſſe vides.

4 3 2 1 0
42329089562800

HAC enim ratione facile intelligitur, quoties vox [mille] apponenda ſit in cuiuſque membri enunciatione. Toties enim proferenda eſt, quot vnitates in figura, quæ ſupra membrum pronuntiandum poſita eſt, continentur.

IAM vero ſi more Italorum millena millia appellare velimus Milliones, paucioribus verbis, & fortaſſe ſignificantius, numerum quemcunq; propoſitum exprimemus, ſi in maiora eum membra diſtribuamus, hoc, qui ſequitur, modo. Supra primam figuram ad manum dextram ponatur o. Deinde, omiſſis quinq; figuris intermedijs, collocetur 1. ſupra ſequentem figuram, quæ ſeptimum locum occupat. Poſt hanc, omiſſis rurſus quinq; figuris, ſcribatur 2. ſupra figuram, quę tertium decimum occupat locum. Atq; ita deinceps, omiſſis ſemper quinque figuris, ponatur 3. 4. 5. &c. Vt hic in eodem exemplo factum eſt.

2 1 0
42329089562800

QVODLIBET membrum continet ſex figuras (vltimo membro excepto, quod vnicam poteſt habere figuram, vel duas, vel tres, vel quatuor, vel quinq; tantum) quę omnes ſimul enunciandę ſunt, & poſt enunciationem cuiuſuis membri toties dictio [Millio] addenda, quot vnitates ſunt in figura ſupra membrum poſita, primo quidem in recto, deinde vero ſemper in aliquo. Vt autem quodlibet membrum facilius enuncietur, ponendum erit punctum ſub quarta eius figura, quod ſignificabit, locum ibi millenarum eſſe. Igitur ſuperius exemplum ita proferendum erit. Quadraginta duo milliones millionum; trecenta viginti nouem millia millionum, octogintanouem milliones: quingenta ſexaginta duo millia, octingenta.

ADDITIO INTEGRORVM NVMERORVM.

CAPVT II.

Additio quid.

ADDITIO eſt duorum, vel plurium numerorum in vnam ſummam collectio.

Numeri addendi quo pacto ſint collocandi.

NVMERI addendi ita ſunt collocandi, vt vno ſub altero poſito primæ figuræ inter ſe reſpondeant, item ſecundæ inter ſe, & tertiæ, & quartæ, &c. adeo vt defectus figurarum, ſi quis eſt, cernatur ex parte ſiniſtra. Vt hi numeri addendi, 710654. 8907. 56789. 880. collocandi erunt, vt hic apparet.

Quo pacto fiat additio.

```
710654
  8907
 56789
   880
------
777230
```

8X8

DVCTA deinde linea ſub numeris addendis, adduntur primum omnes primæ figurę inter ſe, & numerus compoſitus, ſi vnica figura ſcribi poteſt, ſub primis figuris infra lineam ponitur, ſi vero duabus figuris ſcribendus eſt, ponitur ſola prima earum, & reliqua ſeruatur, vt deinde ſecundis figuris inter ſe addẽdis adijciatur. Poſt hæc adduntur ſecundæ figuræ eodem modo, addita prius illa, quæ ſeruata eſt, ſi qua tamẽ ſeruata ſit, itemq; tertiæ, quartæ, & aliæ. Quod ſi ex additione vltimarum figurarum numerus componatur duabus figuris ſcribendus, ponendæ ſunt ambæ ſub linea, nulla retenta, quod tunc tota additio peracta ſit. Verbi gratia. In primis figuris propoſiti exempli o. & 9. faciunt 9. addo 7. fiunt 16. addo 4. fiunt 20. Pono ergo ſub primis figuris o. & ſeruo 2. Deinde in ſecundis figuris, ex 2. (quam figuram ſeruauerã) & 8. fiunt 10. addo 8. fiunt 18. addo 5. fiunt 23. Pono ergo figuram 3. ſub ſecundis figuris, & retineo 2. Poſt hæc accedo ad tertias figuras, vbi ex 2. (quam figuram retinueram) & 8. fiunt 10. addo 7. fiũt 17. addo 9. fiunt 26. addo 6. fiũt 32. Pono ergo 2. ſub tertijs figuris, & retineo 3. Rurſus in quartis figuris, ex 3. (q̃ figura retẽta erat) & 6. fiunt 9. addo 8. fiunt 17. addo o. fiũt 17. Pono ergo 7. ſub quartis figuris & ſeruo 1. quam addo quintis figuris, efficioq; 7. Pono igitur 7. ſub dictis figuris, & nihil reſeruo. Poſtremo quia in vltimo loco ſola hæc figura 7. reperitur, pono eam ſub linea, abſolutaque erit additio. Quemadmodum autem figuras numerorum addendorum inter ſe addidimus ab inferioribus verſus ſuperiores aſcendendo, ita quoq; colligi poſſunt in vnam ſummam, ſi à ſuperioribus verſus inferiores deſcendatur.

QVOD ſi quando ex additione figurarum vnius loci exreuerit numerus tribus figuris ſcribendus, ponenda erit prima figura ſub illo loco, & reliquæ duæ figuris ſequentium locorum addendæ, prima videlicet earum figuris proximi loci, & ſecunda figuris alterius loci: aut certe numerus duabus illis figuris retentis expreſſus ſequentis loci figuris addendus. Vt in appoſito exemplo, quoniã ex primis figuris colligitur numerus hic 102. ſcribenda erit figura 2. ſub primo loco, & figura 0. addenda figuris ſecundi loci, figura vero 1. figuris tertij loci. Vel totus numerus retentus 10. addendus figuris ſecundi loci, vt colligatur numerus 15. cuius figura 5. ſub ſecundo loco ponatur, & figura 1. figuris tertij loci addatur, &c. Vtroq; enim modo idem ſemper numerus colligetur. Examinatum autem vides hoc exemplum per abiectionem 9. de quo examine mox dicemus.

Quid faciendum ſit, quando ex figuris vnius loci colligitur numerus tribus figuris ſcribendus.

6008
5009
4009
308
239
108
108
309
4128
3009
209
308
23752

1 X 1

Recte porro feceris, quando ſunt multi numeri addendi, ſi eos in plures claſſes diſtribuas, & ex ſingulis claſſibus ſingulas ſummas colligas. Nam ſi demum haſce ſummas in vnam redigas ſummam, habebis ſummam ex omnibus datis numeris collectam, vitabiſque moleſtiam, quæ in tot figuris in vnam ſummam colligendis

Quid faciendum ſit, quãdo multi numeri addendi ſunt.

6008	308	108	3009
5009	239	309	209
4009	108	4128	308
15026	655	4545	3526

neceſſario occurrit. Vt ſi proximum exemplum in quatuor haſce claſſes partiaris, & ſingularum ſummas, 15026. 655. 4545. 3526. in vnam ſummam redigas, efficies ſummam, 23752. eandem, quam prius collegeramus, vt hic apparet. Perſpicuum autem eſt, hoc poſteriori modo non tam facile errorem poſſe committi, quam priori, quod in hoc non tot figuræ, quot in illo ſimul addantur.

15026
655
4545
3526
23752

Poſt abſolutam additionem ſolent Arithmetici eam examinare, ſicut & alias operationes, quæ ſequuntur, num recte facta ſit, an non. Quod quatuor modis fieri poteſt in additione. Primum per abiectionem nouenarij hoc pacto. Reiiciantur 9. ex omnibus numeris addendis, quoties fieri poteſt, & quod reliquum eſt, ponatur ſeorſum. Deinde ex ſumma collecta reiiciantur quoque 9. quoties fieri poteſt, & quod reliquum eſt, notetur. Si enim hoc illi priori, quod reliquum fuit, æquale eſt, recte inſtituta fuit additio: Si vero inæquale, non recte. Vnde iteranda erit additio, vt error corrigatur. Ita vides in ſuperiori exemplo relictum fuiſſe numerum 8. poſt abiectionem numeri 9. tam ex omnibus numeris addendis, quam ex ſumma collecta, qui numerus 8. collocatus eſt in cruce quadam in hunc finem constructa.

Prima probatio additionis per 9

Cæterum, vt facile abiiciantur 9. ſatis eſt, vt figuræ numerorum, ac ſi omnes primum occuparent locum, inter ſe addantur, & cum primum ſumma fuerit 9. aut exceſſerit 9. ita vt duabus figuris ſcribatur, reiiciantur 9. vel duæ illæ figuræ inter ſe addantur, & ſumma hæc cum ſequenti figura addatur eodem modo, &c. Eſt enim mirabilis hæc proprietas nouenarij, vt ſi figuras cuiuſcunque numeri inter ſe addas, & ex ſumma reiicias 9. vel certe, ſi ſumma hæc duabus figuris ſcribitur, duas has figuras in vnam ſummam colligas, tantundem relinquatur, vel componatur, quantum relinqueretur, ſi reiiceres 9 toties ex toto numero, quoties potes. Vt ſi ex hoc numero 38. reiiciantur 9. quoties id fieri poteſt, nempe quater remanent 2. quater enim 9. faciunt 36. Quod ſi dicas, 3. & 8. (ſumendo figuras eiuſdẽ numeri 38. ſeorſum.) faciunt 11 & reiicias 9. Vel certe dicas, 1. & 1. faciunt 2. (ſumendo etiam figuras huius numeri 11. proxime compoſiti ſeorſum) habebis eadem 2. quæ prius reliqua fuerunt. Ita quoque ſi ex hoc numero 41. reiiciantur 9. quoties fieri poteſt, nempe quater, remanent 5. Et ſi dicas, ex 4. & 1. (ſumendo figuras numeri 41. ſeorſum) fiunt etiam 5. Denique ex numero 78. ſi abiiciantur 9. quoties fieri poteſt, nempe octies, relinquuntur 6. Et ſi dicas, 7. & 8. faciunt 15. reiiciasque hinc 9. Vel certe dicas, 1 & 5. faciunt 6. tantundem habebis, quantum prius reliquum fuit. Eademque ratio eſt de cæteris.

Qua ratione ex quouis numero reiiciantur facile 9. quoties fieri poteſt.

Mirabilis proprietas nouenarij.

Itaque vt videas, qua ratione examen additionis inſtituendum ſit, examinabimus primum exemplum hoc modo.

7. & 1. faciunt 8. Additis 6. fiunt 14. id eſt, 5. Nam 1 & 4. faciunt 5. quantum nimirum relinqueretur, ſi 9. ex 14. reiicerentur, vt dictum eſt. Additis 5. ad illa 5. fiunt 10. id eſt, 1. Additis 4. fiunt 5. Additis 8. fiunt 13. hoc eſt, 4. additis 7. fiunt 11. (Nam 9. ſemper omittuntur, cum ſint perpetuo abiicienda) id eſt, 2. Additis 5. fiunt 7. Additis 6. fiunt 13. hoc eſt, 4. Additis 7. fiunt 11. id eſt, 2. Additis 8. fiunt 10. id eſt, 1. Additis 8, fiunt 9. id eſt, 0. Nam 9. reiicienda ſunt. Remanent autem 8. quæ in altera parte crucis colloco. Deinde in ſumma producta, ex 7. & 7. fiunt 14. id eſt, 5. Additis 7. fiunt 12. id eſt, 3. Additis 2. fiunt 5. Et tandem additis 3. fiunt 8. vt prius, quæ ſtatuo in oppoſita parte crucis, vt appareat æqualitas numerorum, qui poſt abiectionem 9. reliqui fuerunt.

710654
8907
56789
880
777230

8 X 8

Quoniam vero hac ratione non reiiciuntur 9. quoties fieri poteſt, ſed tantum per dictam proprietatem nouenarij inquiritur reſiduum, quod remaneret, ſi omnia 9. reiicerentur, fit, vt hoc examen per abiectionem 9. inſtitutum fallax ſit; vt in hoc exemplo apparet. Nam ſumma collecta falſa eſt, & nihilominus examen per 9. inſtitutum indicat, eam recte collectam eſſe, cum vtrobique vnitas ſuperſit: Quod ſi reiiciantur 9. quoties fieri poteſt, ſtatim apparebit falſitas ſummæ collectæ. Sæpius enim reiicientur 9. ex ſum-

Probatio per 9 fallax eſt, & quare fallax ſit.

25¦7
30¦3
64¦1

1 X 1

ma, quam ex numeris additis. In ſumma enim hae 64. continentur 9. ſepties, ſupereſtque vnitas, propterea quod ſepties 9 ſunt 63. At in numero 25. continentur 9. bis, & ſuperſunt 7. quæ ad partem dextram repono. In 30. vero continentur 9. ter, & ſuperſunt 3. quæ etiam ex parte dextra noto. Itaque ex numeris additis reiiciuntur 9. quinquies, & ſuperſunt 7. & 3. in quibus adhue ſemel continentur 9. ſupereſtq; vnitas, adco vt vere ſexies tantum reiecta ſint 9. ex numeris additis, ex ſumma vero ſepties. Vnde mirum non eſt, ſummam eſſe falſam, quamuis ſemper reliqua fuerit vnitas. Vera autem ſumma eſſet hæc 55. in qna continentur 9. ſexies, & ſupereſt vnitas, quemadmodum in numeris additis.

Eodem pacto, ſi quis poſt ſummam recte collectam permutaret aliqnas figuras, vel interponeret figuris ſiue ſummæ, ſiue numerorum addendorum hanc figuram 9. aut 0. quoties voluerit, vel haſce duas 7.2. aut 6 3. aut 4.5. aut 8.1. ſemper indicaret examen, ſummam adhuc recte eſſe collectam: qnod tamen falſum eſt. Nam poſtquam hæc additio recte cum ſuo examine inſtituta fuerit, ſi quis per calumniam ita permutaret ſummam 1565. adhue haberet examen ſuam vim, & tamen ſumma vera non eſſet. Idem dices, ſi ordinem figurarum in numeris addendis quis permutaret: vel certe interponeret hanc figuram 9. aut 0. vt hic apparet.

```
 1425
  230      8 X 8
 ----
 1655

14925
 2309      8 X 8
-----
10655
```

Cur ab Arithmeticis probatio per 9. adhibeatur cũ fallax ſit.

Hæc cum ita ſint, merito quis roget, cur ab Arithmeticis hæc probatio per 9. adhibeatur. Cui reſpondendum eſt, licet per calumniam hæc probatio oſtendatur eſſe vitioſa, vt in proximis exemplis patuit, non immerito tamen à peritis Arithmeticis eam vſurpari. Nam nemo, (niſi quis dedita opera errare velit) talem errorem committet, vt examen iſtud locum habeat, ſed ſolum vna, aut altera vnitate à ſcopo aberrabit; ita vt facile tunc examen hoc oſtendat, errorem fuiſſe commiſſum, indiectque proinde, corrigendam eſſe additionem. Quis enim ita inſanus fuerit, vt vltimam illam ſummam ex primis duobus numeris colligat? Denique niſi de induſtria numeri ita diſponantur, vt reiectis 9 ſemper idem reſiduum ſit, vix aut raro admodum continget, vt examen iſtud ſuccedat, niſi quando in additione erratum non fuerit.

Secunda probatio additionis per 7.

Alio modo fit examen per abiectionem ſeptenarij hoc pacto. Reiiciantur 7. ex omnibus numeris addendis, quoties fieri poteſt, & id quod ſupereſt ſeorſum ponatur in vna parte crucis Deinde ex ſumma collecta reiiciantur quoque 7. quoties fieri poteſt, ac reſiduum in altera parte crucis collocetur. Si enim hoc illi priori reſiduo fuerit æquale, recte facta eſt additio; ſi vero inæquale non recte. Reiicienda autem ſunt 7 ex ſingulis numeris addendis ſeorſum, reſiduaque ad dexteram è regione ipſorum locanda, & ex his reſiduis in vnam ſummam collectis etiam abiicienda 7. atque hoc vltimum reſiduum in vna parte crucis ponendum. Cæterum non eodem modo reiicienda ſunt 7. quo abiicienda eſſe 9. diximus, cum hic numerus 7. illam proprietatem nouenarij non habeat: ſed aſſumendæ ſunt duæ figuræ primæ ad ſiniſtram, ac ſi prior earum denas, & poſterior vnitates ſignificaret, dummodo prior minor ſit quam 7. (Nam ſi eſſet 7. vel maior, reiicienda forent 7. ex illa ſola.) & ex eo numero quem duæ illæ figuræ referunt, abiicienda 7. quoties fieri poteſt, & reſiduũ pro denis accipiendum, eique ſequens figura addenda pro vnitatibus, atque ex hoc numero, quem reſiduum, & ſequens figura exprimunt, iterum abiicienda 7. quoties fieri poteſt, atque ita deinceps. Vt ex numero 2379. ita reiicientur 7 Ex 23. ſi ter abiiciantur 7. remanent 2. Item ſi ex 27. (Nam figura 2. relicta, & ſequens figura 7. conſtituunt hunc numerum 27.) reiiciantur ter 7 relinquuntur 6. Si tandem ex 69 (qui numerus conſtituitur ex reſiduo 6. & figura 9.) reiiciantur 7 quoties fieri poteſt remanent 6 Qui numerus etiam reliquus fuiſſet, ſi omnia 7. ex dato numero fuiſſent abiecta Eodem modo ex hoc numero 783. ita abiicientur 7. Si ex 8. (Nam 7. omittuntur, vt dictum eſt, & ex 8. reiiciuntur 7.) abiiciantur 7. remanet 1. Rurſus ſi ex 13. reiiciantur 7. remanent 6. atque ita de cæteris.

Quo pacto reiicienda ſint 7. ex quolibet numero.

Itaque hac ratione ſuperius exemplum examinabitur.

```
710654 | 0
  8907 | 3        6 X 6
 56789 | 5
   880 | 5
------
777230 |
```

Omiſſa figura 7. ſi ex 10. abiiciantur 7. remanent 3. Item ſi ex 36. abiiciantur 7. remanet 1. Abiectis vero 7. ex 15. remanet 1. Abiectis tandem 7. ex 14. remanet 0. quam figuram colloco ad dexteram primi numeri, ducta prius linea, quæ numeros addendos diſtinguat à figuris ad dexteram collocandis. Deinde in ſecundo numero abiectis 7. ex 8. remanet 1. abiectis item 7. ex 19. remanent 5. Abiectis quoque 7. ex 50. remanet 1. Denique abiectis 7. ex 17. remanent 3. quæ ad dextram repono. Rurſus in tertio numero abiectis 7. ex 56. remanet 0. Omiſſa deinde figura 7. & abiectis 7. ex 8. remanet 1. Abiectis denique 7. ex 19. remanent 5. ad dexteram collocanda. In quarto denique numero, abiectis 7. ex 8. remanet 1. Abiectis autem 7 ex 18. remanent 4. Et abiectis 7. ex 40. remanent 5. ad dexteram ponenda. Quoniam vero 5.5.3 & 0. efficiunt 13. ex quibus ſi abiiciantur 7. remanent 6. repono 6. in vna parte crucis. Sed ex hiſce reſiduis facilius reiicientur 7. ſi dicatur 5. & 5. efficiunt 10. Abiectis 7. remanent 3. Additis 3. fiunt 6 quemadmodum ſupra de abiectione 9. dictum eſt. Poſtremo in ſumma, omiſſis 7.7.7. ſi ex 23. abiiciantur 7. remanent 2. Item ſi ex 20. abiiciantur 7. remanent 6. in altera parte crucis reponẽda.

Probatio per 7. fallax eſt, ſed minus quã probatio per 9. & quare.

Verum quemadmodum examen per abiectionem 9. fallax eſt, vt diximus, ita quoque hoc per abiectionem 7. vitioſum eſſe deprehenditur: quia non conſideramus, an toties reiiciantur 7. ex numeris addendis, quoties ex ſumma, nec ne; ſed ſolum, an idem reſiduum vtrobique reperiatur, an non. Nihilominus tamen non ſine ratione huiuſmodi examen ab Arithmeticis adhiberi ſolet, quemadmodum & illud prius per abiectionem 9. inſtitutum ob rationem ſupradictam: quia, niſi quis per calumniam numeros peruertat, vix aut raro idem reſiduum vtrobique reperietur, niſi recte facta ſit additio: Et multo quidem rarius in hoc quam in illo examine per 9. inſtituto; propterea quod non ita ſimpliciter reiiciuntur 7. vt 9. ſed maiori quodam artificio: vt non tam facile quis alium poſſit decipere, aut ab alio decipi.

```
203 | 0
134 | 1       1 X 1
---
344
```

In hoc appoſito exemplo additio vitioſa eſt & tamen examen per abiectionem 7. indicat, eam rite eſſe inſtitutam.

Propo-

Propoſita autem hæc tabella docet, ex quibuſnam numeris abiecta 7. nihil relinquunt, vt examen iſtud per 7. reddatur facilius pro ijs, qui parum in numeris ſunt exercitati. Cuius vſus hic eſt. Si numerus duabus figuris ſcriptus, ex quo debent reiici 7. in hac tabella reperitur, nihil ſupererit poſt abiectionem 7. vt cifræ è regione numerorum huius tabellæ indicant. Si autem non reperitur in hac tabella, accipiendus erit numerus in ea proxime minor. Nam differentia inter hunc, & numerum propoſitum relinquitur poſt abiectionem 7. Vt ſi numerus propoſitus ſit 69. ſumendus erit numerus 63. in tabella, qui ſex vnitatibus à 69. differt. Reiectis igitur 7. ex 69. remanent 6. Item ſi propoſitus numerus ſit 37. accipiendus erit in tabella numerus 35. qui duabus vnitatibus ſuperatur à 37. Reiectis igitur 7. ex 37. ſuperſunt 2. Atque ita de cæteris.

7	0
14	0
21	0
28	0
35	0
42	0
49	0
56	0
63	0

Tertia probatio additionis per additioné.

Tertio hac ratione Arithmetici additionem factam examinare ſolent. Si additio facta eſt ab inferioribus figuris verſus ſuperiores, inſtituunt eandem à ſuperioribus figuris verſus inferiores, vel contra: Et ſi poſteriori via eadem prorſus ſumma colligatur, quæ priori inuenta eſt, non dubitant, quin recte ſit facta additio, propterea quod incredibile quodammodo ſit, ſi priori modo error aliquis eſſet commiſſus, eundem prorſus poſteriori via committi, cum alio modo figuræ numerorum inter ſe additæ ſint poſteriori via, quam priori. Nam ſi errauero in additione harum figurarum 5. 2. 9. hoc modo dicendo, 5. & 2 faciunt 7. additis 9. fiunt 15. non tam facile in eundem errorem incidero, ſi è contrario eas inter ſe addam. Dicam enim 9. & 2. efficiunt 11. additis 5. fiunt 16. quia operatio aliquo modo variatur.

Poteſt probatio hæc per additionem ita quoque inſtitui. Diuidantur numeri addendi in duas, aut plures claſſes, & ſingularum ſummæ colligantur. Nam ſi ex hiſce ſummis vnam ſummam conficias, neceſſe eſt, ſummam hanc æqualem eſſe ſummæ prius collectæ, ſi erratum non eſt.

710654	56789
8907	880
719561	57669

719561
57669
———
777230

Vt ſi primum exemplum in hæc duo membra diſtribuatur, & eorum ſummæ collectæ in vnam redigantur ſummam, vt hic factum eſt, prodibit eadem ſumma, quæ prius.

Quarta probatio additionis per ſubtractionem.

Quarto & vltimo examinari ſolet additio per ſubtractionem, hac ratione. Quando duo numeri ſunt additi, ſubtrahatur vteruis eorum ex ſumma: quod quo pacto fiat, capite ſequenti docebimus. Si enim numerus ex hac ſubtractione relictus æqualis fuerit alteri numero addito, argumento eſt, nullum peccatum in additione fuiſſe commiſſum. Nam ſi ex 12. & 20. fiunt 32. neceſſe eſt, detractis 12. ex 32. relinqui 20. vel detractis 20. ex 32. relinqui 12. Quando vero plures numeri ſunt additi, ſubtrahatur vnus eorum ex ſumma, & reliqui omnes in vnam ſummam colligantur. Nam ſi hæc ſumma illi reſiduo fuerit æqualis, recte facta erit additio. Vel certe, ſubtracto primo numerorum addendorum ex ſumma, ſubtrahatur ex reſiduo ſecundus, & ex hoc reſiduo tertius, & ita deinceps, vltimo excepto. Si enim vltimum reſiduum vltimo numerorum addendorum æquale fuerit, dubium non eſt, quin additio recte facta ſit. Atque hoc examen certiſſimum eſt, licet ſit alijs paulo longius.

SVBTRACTIO INTEGRORVM NVMERORVM.

CAPVT III.

Subtractio quid.

SVbtractio eſt minoris numeri ex maiori, vel æqualis ex æquali, ſubductio.

Vter duorum numerorum maior ſit, quo pacto cognoſcatur.

Facile autem cognoſces, vter duorum numerorum maior ſit, ex vltimis eorum figuris. Cuius enim figura vltima maior eſt, ille numerus maior etiam erit. Vt horum duorum numerorum ſuperior maior eſt inferiore, quia vltima eius figura 3. maior eſt, quam 2 vltima figura inferioris. Quod ſi vltimæ figuræ duorum numerorum ſint æquales, ille maior erit, cuius penultima figura maior eſt. Et ſi penultimæ etiam figuræ ſint æquales, ille maior erit numerus, in quo prius occurret maior figura, vt in his exemplis ſemper numerus ſuperior inferiore maior eſt.

3001234
2986789

445078	700001000.
444899	700000999.

Sic etiam numerus, qui plures habet figuras, maior eſt eo, qui pauciores figuras continet, vt hic ſuperior numerus inferiore maior eſt.

12345
9968

Subtrahendus numerus quo pacto locandus ſit.

Numerus ſubtrahendus ſub eo, à quo fieri debet ſubtractio, ita collocandus eſt, vt prima figura primæ, ſecunda ſecundæ, tertia tertiæ, &c. reſpondeat: adeo vt defectus figurarum in numero ſubtrahendo, ſi quis eſt, cernatur ex parte ſiniſtra. Vt ſi numerus 40236. ex numero 3271589. ſubducendus ſit, collocandus erit ille ſub hoc, vt hic apparet.

3271589
40236
———
3231353

Subtractio quomodo fiat.

Ducta deinde linea ſub duobus illis numeris, ſubtrahuntur ſingulæ figuræ inferioris numeri à ſingulis figuris ſuperioris numeri, initio facto à primis figuris; & reſidua ſub linea collocantur eo ordine, quo facta eſt ſubtractio. Quod ſi in ſuperiori numero aliquæ figuræ non habeant reſpondentes figuras in numero inferiori, ita vt ab illis nihil ſubtrahatur, reponendæ illæ erunt ſub linea. Verbi gratia. Subductis 6. ex 9. remanent 3. ſub linea collocanda. Item ſubductis 3. ex 8. relinquuntur 5. Et demptis 2. ex 5 relinquuntur 3. Subtracta autem figura 0. ex 1. remanet 1. At ſubductis 4. ex 7. remanent 3. Quia vero ex figuris 2. & 3 nihil ſubtrahitur, ponendæ eæ erunt eodem ordine ſub linea.

Quid agendum ſit, quando figura inferior maior eſt, quam ſuperior.

Quando autem figura aliqua inferior maior eſt ſuperiore ſibi reſpondente, ita vt ſubtractio fieri non poſſit, ſeruanda erit hæc regula. A proxima figura ſuperiori verſus ſiniſtram mutuo accipiatur vnitas, quæ decem vnitates ſignificabit reſpectu illius figuræ, à qua ſubtractio fieri non poteſt. Deinde huic vnitati apponatur figura illa, vt fiat numerus duabus figuris ſcribendus, à quo detrahatur illa figura inferior maior: ſed tunc illa figura, à qua mutuo accepta eſt vnitas, reputanda erit vna vnitate minor. Quod ſi proxima illa figura ſuperior ſit 0. mutuabimur vnitatem ab alia figura verſus ſiniſtram, quæ vnitas ſignificabit 100. vnitates reſpectu illius figuræ, à qua ſubtractio non poteſt fieri: ſed tunc loco figuræ 0. animo reponenda erit figura 9. & figura, à qua mutuo accepta eſt vnitas, vna vnitate minor erit. Ita quoque ſi plures huiuſmodi figuræ 0. antecederent illam, à qua vnitatem mutuamur, cogitandæ eſſent omnes veluti 9. & illa, quæ mutuo dedit vnitatem, vna vnitate minor. Quæ omnia hoc exemplo fient perſpicua.

4500026304827
3929034567892

570991736935

Primum ſubductis 2. ex 7. remanent 5. Deinde, quia 9. detrahi non poſſunt ex 2. mutuabimur vnitatem ab 8. & ita detractis 9. ex 12. (quem numerum exprimunt 1. quam mutuo accepimus, & 2.) relinquuntur 3. Rurſus quia 8. ex 7. (ſuperior enim figura 8. cum mutuo dederit vnitatem, valet tantum 7.) ſubtrahi nequeunt, mutuabimur vnitatem à 4. & ſic ſubductis 8. ex 17. remanent 9 Poſt hæc, quia 7. ex 3. (figura enim 4. ob vnitatem mutuo datam valet tantum 3.) non poſſunt auferri, accipiemus mutuo vnitatem à 3. poſt 0. Sed quoniam hæc vnitas valet 100. reſpectu figuræ 3. à qua non poteſt fieri ſubtractio, & nos indigemus tantum 10. neceſſe eſt, vt ſi à 100. mutuemur 10. relinquantur 90. Hinc fit, vt figura 3 valeat tantum 2. & ſupra 0. reponenda ſit animo figura 9. quæ ſignificat 90. reſpectu figuræ, à qua ſubtractio fieri non poterat. Itaq; ſubductis 7. ex 13. remanent 6. Et ſubductis 6. ex 9. (ſupra 0. namque diximus cogitari debere 9.) remanent 3. Quoniam vero 5. ex 2. (Nam figura ſuperior 3. valet tantum 2. vt diximus.) auferri nequeunt, accipiemus mutuo 1. à 6. detrahemusque 5. ex 12. vt ſuperſint 7. Subductis deinde 4. ex 5. (figura enim 6. valet tantum 5. ob vnitatem mutuo datam) remanet 1. Et quia rurſus 3. ex 2. non poſſunt detrahi, mutuabimur vnitatem à 5 Sed cum hæc vnitas valeat 10000. reſpectu figuræ 2. à qua ſubductio fieri nequit, nos vero indigeamus tantum 10. neceſſe eſt, vt ſi à 10000. mutuemur 10. remanent 9990. Hinc fit, vt figura 5. valeat ſolum 4. & ſupra ſingulas cifras cogitatione reponenda ſit figura 9. hoc modo, 999. Hæ namque figuræ 999. ſignificant 9990. reſpectu figuræ 2. à qua ſubductio fieri non poterat. Itaque ſubductis 3. ex 12. remanent 9. Et ſubducta figura 0. ex 9. (quam figuram 9. ſupra 10. diximus cogitandam eſſe.) remanent 9. Et ſubductis 9. ex 9. (quam etiam figuram 9. ſupra 0. imaginamur) remanet 0. Item ſubtractis 2. ex 9. (ſupra 0. namque reponenda quoque animo eſt figura 9.) ſuperſunt 7. At vero quoniam 9. ſubtrahi non poſſunt ex 4. (Figura enim 5. ob mutuo datam vnitatem valet tantum 4.) mutuabimur 1. à 4. & deducemus 9. ex 14. vt ſuperſint 5 Poſtremo ſubductis 3. ex 3. (Nam figura 4. ob mutuo datam vnitatem valet tantum 3.) remanet 0 quæ figura 0. quia vltima eſt in hoc exemplo, nihilque propterea ſignificat, omittenda eſt.

Facilior ratio ſubtractionis, quando figura inferior ſuperiore maior eſt

Hac regula plerique Arithmetici vtuntur, quam nos multo facilius ita proponemus. Quando inferior figura maior eſt ſuperiore, accipiatur differentia inter ipſam & 10 atque huic differentiæ addatur ſuperior figura, à qua ſubtractio non poterat fieri, aggregatumque ſcribatur ſub linea. Hoc enim aggregatum relinqueretur ſi figura illa maior auferretur ex numero compoſito ex 10. & figura illa ſuperiore, à qua non poteſt fieri ſubtractio, non ſecus, ac ſi vnitas fuiſſet mutuo accepta: cum figura illa maior primum ſubtrahatur à 10. vt habeatur differentia inter 10. & illam figuram, deinde reſiduo, ſiue differentiæ huic ſuperior figura addatur. Poſtea ne cogamur vnitatem cogitatione auferre ex ſuperiore figura, à qua mutuo ſumpta eſt implicite vnitas, addemus proximæ figuræ inferiori verſus ſiniſtram vnitatem, & hoc aggregatum ex ſuperiori figura (nulla ex ea prius dempta vnitatē) ſubducemus. Eadem enim ſemper differentia erit inter inferiorem, ac ſuperiorē figuram, ſiue ex ſuperiore auferas vnitatem, & inferiori nihil addas, ſiue ex ſuperiori nihil auferas, & inferiori vnitatem adiicias. Vt propoſitis hiſce duabus figuris 7. 4. ſi ex 7 tollatur vnitas, erit 2. differentia inter reſiduum 6. & 4. Et ſi ex 7. nihil dematur, adiiciatur autem vnitas ad 4. eadem differentia 2. erit inter 7. & 5. Atque hoc modo, quotieſcunque facta fuerit mentio differentiæ inter 10. & figuram inferiorem, quæ ex ſuperiori non poteſt ſubtrahi, addenda erit vnitas proximæ inferiori figuræ verſus ſiniſtram. Sed hæc omnia clariora fient ex eodem exemplo, quod hic repetiuimus.

4500026304827
3929034567892

570991736935

Primum ſubductis 2. ex 7. ſuperſunt 5. Quia vero 9. ſubtrahi non poſſunt ex 2. ſubtrahemus 9. ex 10. & reliquæ vnitati (quæ differentia eſt inter 10 & 9.) adiiciemus 2. vt habeamus 3. pro reſiduo ſub linea ponendo. Hoc facto ſtatim inferiori figuræ 8. addemus 1. propter illam differentiam inter 10. & 9. vt fiant 9. Quæ quoniā rurſus ex 8. non poſſunt ſubduci, detrahemus 9. ex 10. & reliquæ vnitati (quæ rurſus differentia eſt inter 10. & 9.) addemus

demus

demus 8 vt habeamus 9. collocanda ſub linea. Quo peracto, ſtatim inferiori figuræ 7. addemus 1. propter illam differentiam ioter 10. & 9. efficiemusque 8. Quæ quoniam ex 4. demi nequeunt, auferemus 8. ex 10. & reſiduo 2. (hoc eſt, differentiæ inter 10. & 8.) adijciemus 4. vt fiant 6. reponenda infra lineam. Deinde ſtatim inferiori figuræ 6. adiungemus 1. propter differentiam illam inter 10. & 8. efficiemuſque 7. Quæ, quoniam ex 0. ſubtrahi nequeunt, ſubduco ex 10. & reſiduo 3. (id eſt, differentię inter 10. & 7.) addo 0. efficioque 3. ponenda ſub linea. Rurſus inferiori figuræ 5. addo 1. propter illam differentiam inter 10. & 7. efficioq; 6. Quæ, quoniam ſubduci nequeunt ex 3. detraho ex 10. & reſiduo 4. (id eſt, differentiæ inter 10. & 6.) addo 3. efficioq; 7. infra lineam ſcribenda. His peractis, ſtatim inferiori figuræ 4. addo 1. propter dictam differeotiam inter 10. & 6. facioq; 5. quibus ſubductis ex 6. ſupereſt 1. Quia vero in hac ſubductione mentio facta non eſt differentiæ inter 10. & 5. cum 5 ſubduci potuerint ex 6. non addo 1. inferiori figuræ 3. ſed eam, quooiam ſubduci non poteſt, ex 2. ſubtraho ex 10. & reſiduo 7. (ſiue differentiæ inter 10. & 3.) addo 2. facioque 9. locanda ſub linea, Poſt hæc ſtatim figuræ inferiori 0. addo 1. propter differentiam dictam inter 10. & 3. efficioq; 1. Et quoniam 1. ſubtrahi non poteſt ex 0. demo 1. ex 10. reſiduoq; 9. (id eſt differentiæ inter 10. & 1.) addo 0. efficioq; 9. infra lineam reponenda. Poſtea iterū ſtatim addo 1 figuræ inferiori 9. ꝑpter illam differentiam inter 10. & 1. vt habeam 10. quæ, quoniam ex 0. non poſſunt detrahi; aufero ex 10. reſiduoq; 0. (ſiue differentiæ inter 10. & 10 addo 0.) facioq; 0. pro reſiduo ſub linea collocando. Rurſus quam primum inferiori figuræ 2. addo 1. propter dictam differentiam inter 10. & 10. efficioque 3. quæ cum ex 0. ſubduci nequeant, ſubtraho ex 10. reſiduoque 7. (nempe differentiæ inter 10. & 3.) addo 0. facioque 7. collocanda ſub linea. Præterea mox addo 1. ad figuram inferiorem 9. propter differeotiam illam inter 10. & 3. facioque 10. quæ quoniam ex 5. non poſſunt detrahi, aufero ex 10. ac reſiduo 0. (differentiæ nimirum inter 10. & 10.) addo 5. efficioq; 5. pro reſiduo ſub linea reponendo. Poſtremo ſtatim figuræ inferiori 3. adijcio 1. propter illam differentiam inter 10. & 10. vt habeam 4. quæ ſubducta ex 4. reliquunt 0. quam figuram 0. quoniā ſupervacanea eſt in principio numeri ex parte ſiniſtra, omittemus, cum poſita fruſtra locū occuparet.

4500016304827
3929034567892
____
570991736935

Aliud Exemplum.

per 7. per 9.

5 X 5 3 X 3

4000134 | 5
67823 | 0
____
3932311 | 5

IN hoc exemplo, quoniam ablatis omnibus figuris inferioribus ex ſuperioribus vnitas adijcienda eſſet ſequenti figurę inferiori, quæ nulla eſt, reponemus eam in ſeqoentem locum: quę, quoniam auferri nequit ex 0. detrahenda erit ex 10. & reſiduum 9. infra lineam ponendum; Ac rurſus vnitas ſequenti loco adijcieoda, atque ex 4. auferenda, vt habeatur reſiduum 3. ſub linea collocandum.

QVOD ſi numerus ex pluribus numeris, vel plures numeri ex pluribus, vel ex vno numero ſint ſubducendi, colligendi prius erunt plures oumeri illi, à quibus fieri debet ſubtractio, in vnam ſummam; Itemq; plures illi, qui ſubtrahi debent, inter ſe addendi, priuſquam ſubtractio ioſtituatur.

Quando numeri ſint plures quid agendum.

EXAMEN ſubtractionis quadruplex eſt. Primum fit per abiectionem 9. Si n. ex ſuperiori numero, à quo facta eſt ſubtractio, reijciantur 9. quoties fieri poteſt, eo modo, qun in additione diximus abijcienda eſſe 9. & reſiduū collocetur in vna parte crucis, neceſſe eſt, vt idem numerus relinquatur, ſi abijciantur 9. ex numero ſubtracto, & ex relicto, quoties fieri poteſt, oiſi in ſubtractione erratum ſit. Ita vides in proximo exemplo ad dextram reſiduum ſemper eſſe 3. ſiue 9. abijcias, quoties potes, ex numero 4000134. à quo facta eſt ſubtractio, ſiue ex numeris 678823. 3932311. ſimul, quorum ille ſubtractus eſt, hic vero reliquos fuit ex ſubtractione.

Prima probatio ſubtractionis per 9.

SECVNDVM examen fit per abiectionem 7. Nam ſi ex numero, à quo facta eſt ſubtractio, reijciantur 7. quoties fieri poteſt, eo modo, quo in additione diximus abijcianda eſſe 7. & reſiduum ponatur in vna parte crucis, neceſſe eſt, ſi ſubtractio recte facta eſt, vt idem numerus relinquatur, ſi reijciātur 7. ex numero ſubtracto, ponendo reſiduum ad dexteram illius, & ex numero relicto, ponendo etiam reſiduom ad dextram illius, ac tandem duo hæc reſidua ad dexteram collocata in vnam ſummam colligantur, & ex ea reijciātur 7. ſi reijci poſſunt. Ita in ſuperiori exemplo, reiectis 7. quoties fieri poteſt, ex numero 4000134. relinquuntur 5. Reiectis autem 7. ex 67823. remanet 0. & abiectis 7. & ex 3932311. ſuperſunt 5. quæ addita ad 0. faciuot quoque 5. vt in cruce ad ſiniſtram ſuperioris exempli poſita apparet.

Secunda probatio ſubtractionis per 7.

CÆTERVM vtrumq; hoc examen fallax eſſe poteſt, ſi quis per calumniam numeros permutet, aut alios numeros apponat, quemadmodum in additione diximus.

TERTIVM examen fit per additionem. Nam ſi numerum reſiduum ſubtracto numero adijcias, neceſſario componetur numerus, à quo ſubtractio facta eſt. vt in hoc exemplo vides.

Tertia probatio ſubtractionis per additionem.

NVMERVS, à quo fit ſubtractio.	60123
NVMERVS ſubtractus.	45678
NVMERVS reſiduus.	14445
SVMMA ex numero ſubtracto.	60123

& reſiduo compoſita, æqualis numero, à quo facta eſt ſubtractio.

QVAR-

Quarta probatio ſubtractionis per ſubtractionem.

60123
14445
45678

QVARTVM examen fit per ſubtractionem. Facta enim ſubtractione, ſi reſiduum ab eodem numero, à quo facta eſt ſubtractio, auferas, ſupererit neceſſario numerus ſubtractus. Vt in proximo exemplo, ſi numerum reſiduum 14445. ex numero 60123. detrahas, reliquus erit numerus ſubtractus 45678. vt hic apparet.

Hæc poſteriora duo examina certiſſima ſunt, nullamque admittere poſſunt fallaciam, aut fraudem.

MVLTIPLICATIO INTEGRORVM NVMERORVM.

CAPVT IV.

Multiplicatio quid

MVLTIPLICATIO eſt ductus vnius numeri in alium. Tunc autem numerus quilibet in alium duci dicitur, cum alter ipſorum toties augetur, quoties in altero continetur vnitas. Vt numerus 6. in numerum 5. vel numerus 5. in numerum 6. duci dicitur, quando numerus 6. quinquies accipitur, vel numerus 5. ſexies. quo pacto ſemper accipientur 30. atque huiuſmodi ductus Multiplicatio appellatur. Itaque numerus ex multiplicatione, ſiue ductu vnius numeri in alterum procreatus toties vtrumlibet multiplicatorum continebit, quoties alter vnitatem complectitur, vt in dato exemplo manifeſtum eſt. Ex quo fit, Multiplicationem ita quoque deſcribi poſſe. Multiplicatio duorum numerorum eſt inuentio numeri, qui toties vtrumuis eorum contineat, quoties alter vnitatem continet.

VT expedite omnis multiplicatio fiat, neceſſe eſt noſſe, qui numerus producatur ex ductu, ſiue multiplicatione cuiuslibet figuræ numericæ in quamuis aliam figuram, vt ex 7. in 8. vel ex 8. in 7. Item ex 7. in 9. vel ex 9. in 7. &c. Hoc enim ſi bene tenueris, nullam in multiplicatione ſenties difficultatem, aut laborem. Id quod aſſiduo exercitio magis diſcitur, quam vllo præcepto. Interim tamen mirifice tibi inſeruiet ſequens tabula, quæ Pythagorica dici ſolet; ea fortaſſis de cauſa, quod Pythagoras eam vel primus excogitauerit, vel certe diſcipulos ſuos in ea mirifice exercuerit.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Conſtructio tabulæ Pythagoricæ.

Conſtructio huius tabulæ perfacilis eſt. Prima enim linea ab 1. incipiens progreditur per continuam additionem vnitatis, vſque ad 9. vt ex 1. & 1. fiunt 2. Ex 2. & 1. fiunt 3. Ex 3. & 1. fiunt 4. &c. Secunda vero linea à 2. incipit, progrediturque per continuam additionem 2. Vt ex 2 & 2. fiunt 4. Ex 4. & 2. fiunt 6. Ex 6. & 2. fiunt 8. &c, Ita quoque tertia linea initium ſumit à 3. & per continuam additionem 3. progreditur. Atq; eodem modo reliquæ lineæ compoſitæ ſunt. Quælibet enim per continuam additionem eius numeri, à quo incipit, progreditur.

Vſus tabulæ Pythagoricæ.

Vſus autem eiuſdem tabulæ, quod ad multiplicationem attinet, (infinitos enim alios vſus habet) hic eſt. Propoſitis duabus figuris inter ſe multiplicandis, ſi altera in ſuperiori linea, & altera in ſiniſtro latere ſumatur, & in illa linea deorſum, in hoc vero latere dextrorſum quis progrediatur, reperiet in communi concurſu numerum ex multiplicatione duarum illarum figurarum inter ſe productum. Ita vides ex multiplicatione 7. in 8. vel 8. in 7. produci 56. Item ex 8. in 8. produci 64. & ſic de cæteris.

Regula multiplicandi figuram in figuram.

QVOD ſi huiuſmodi tabula in promptu non ſit, vtendum erit hac regula. Scribatur vna figura ab altera, & vtriuſq; diſtantia à 10. ad latus ponatur. Deinde hæ diſtantiæ inter ſe multiplicentur. Productus enim numerus, ſi vnica figura ſcribitur, dabit primam ſummæ producendæ ex figurarum multiplicatione; ſi vero duabus figuris ſcribitur, ſeruanda erit figura denarum, & prior ponenda pro prima figura ſummæ producendæ. Secunda autem figura eiuſdem huius ſummæ habebitur, ſi alterutra diſtantia ab altera figura denarum reſeruata addatur, ſi qua ſeruata eſt: Vel certe ſi figuræ propoſitæ inter ſe addantur, addita prius figura denarum reſeruata, ſi qua ſeruata eſt, dabit prima figura huius aggregati (reiecta ſecunda figura tamquam ſuperuacanea) ſecundam figuram ſummæ producendæ. Exemplis res fiet illuſtrior.

9.	1.	8.	2.	7.	3.
8.	2.	8.	2.	6.	4.
7	2	6	4	4	2.

In primo exemplo figuræ multiplicandæ ſunt 9. & 8. earumque diſtantiæ à 10. ſunt 1. & 2. quæ inter ſe multiplicatæ, (erit autem multiplicatio diſtantiarum à 10. facillima, cum minores ſint, quam figuræ multiplicandæ. De his n. regula hæc intelligēda eſt) dicendo ſemel 2. vel bis 1. faciunt 2. quę ſub diſtantijs ſcribo pro prima figura

ſummæ

ſummæ producendæ. Ablata autem diſtantia 2. ex 9. vel diſtantia 1. ex 8. relinquuntur 7. quæ ſcribo ſub figuris pro ſecunda figura ſummæ producendæ. Quam ſecundam figuram etiam dabit prima figura aggregati figurarum 9. & 8. quod eſt 17. relicta ſecunda 1. tanquam omnino ad hoc negotium, inutili. Itaque multiplicatio figurarum 9. & 8. efficit 72.

IN ſecundo autem exemplo figuræ propoſitæ ſunt 8. & 8. quarum diſtantiæ à 10. ſunt 2. & 2. His inter ſe multiplicatis, diceodo, bis 2. habebimus 4. pro prima figura ſummæ ptoducendę. Dempta autem vtrauis diſtantia ex 8. ſupererũt 6. pro ſecunda figura, quam nobis etiam dabit prima figura aggregati ex 8. & 8. quod eſt 16. relicta ſecunda 1. tanquam ſuperuacanea. Figuræ igitur 8. & 8. inter ſe multiplicatæ faciunt 64.

IN tertio deniq; exemplo figuræ datæ ſunt 7. & 6. quarum diſtantiæ à 10. ſunt 3. & 4. Hæ intet ſe multiplicatæ, dicendo, ter 4. vel quater 3. faciunt 12. Prima ergo figura ſummæ producendæ erit 2. ſecunda vero figura 1. ſeruanda erit. Deinde ablata diſtantia 4. ex 7. vel diſtãtia 3. ex 6. ſuper ſunt 3. quibus ſi addatur vnitas, quã ſeruauimus, fient 4. pro ſecunda figura ſummæ producendæ: quam etiam figuram dabit ptima figura aggregati ex 7. & 6. addita prius vnitate ſeruata, quod eſt 14. omiſſa prorſus ſecunda figura 1. Producuntur ergo 42. ex multiplicatione 7. per 6. vel 6. per 7. Eadem ratio in cæteris eſt dummodo duæ figuræ propoſitæ inter ſe additæ ſuperent 10. Alias diſtantiæ illarum à 10. maiores eſſent ipſis figuris, ac ptoinde facilius multiplicarentur figuræ, quam diſtantiæ. Rectius tamẽ feceris, ſi vſu, & exercitatione memotitet ediſcas huiuſmodi multiplicationes figurarum inter ſe, quam vt vel ad tabulam Pythagoricam, vt ad hanc regulam confugias.

Qua ratione collocãdi ſint numeri inter ſe multiplicandi.

IAM vero propoſitis duobus numeris inter ſe multiplicandis, ſcribẽdus eſt minot ſub maiore, ita vt prima figuta reſpondeat primæ figuræ, & ſecunda ſecundæ, &c. vt in additione, & ſubtractione diximus. Quod tamen neceſſarium nõ eſt, cum etiam maior ſub minore ſcribi poſſit, dicto tamen ordine figurarum ſeruato. Vt ſi multiplicanda ſint 4300678. per 600394. collocandi erunt numeri altero horum modorum, quamuis primus ſit magis vſitatus.

4300678 Vel 600394.
600394 4300678.

SED doceamus prius, quo pacto numerus aliquis per vnam ſolam figuram multiplicandus ſit. Ita enim facilius intelligetur, qua ratione numerus per numerum plurium figurarum debeat multiplicari.

Quomodo numerus per vnam figuram multiplicatur.

QVANDO ergo numerus aliquis per vnam tantum figuram multiplicandus eſt, ſolet ſemper figura hæc multiplicans ſubſcribi primæ figuræ numeri multiplicandi. Vt ſi numerus 600394. multiplicandus proponatur per 8. ſic ſtabit exemplum. Multiplicatio autem fiet ſi figura 8. multiplicetur per omnes figuras numeri 600394. incipiendo à dextra, & ſiniſtram verſus progrediendo, ſingulosque numeros productos ſub linea, quæ infra numeros multiplicandos ducitur, ſcribendo; ita tamen, vt ſi productus aliquis numerus duabus figuris ſcribendus ſit, prima earum ponatur, ſecunda vero ſeruetur ſequenti producto adiicienda, hoc videlicet modo. Primum multiplico 8. per 4. dicendo octies 4. faciunt 32. pono 2. ſub 4. & ſeruo 3. Item octies 9. faciunt 72. & additis 3. ſeruatis, fiunt 75. pono 5. ſub 9. & ſeruo 7. Item octies 3. faciũt 24. & additis 7. ſeruatis, fiunt 31. pono 1. ſub 3. ſeruoq; 3. Deinde octies 0. facit 0. & additis 3. ſeruatis, fiunt 3, quæ pono ſub 0. nihilq; reſeruo. Rurſus octies 0. facit 0. cui, quia nihil ſeruaui in præcedenti producto, nihil addendũ eſt. Pono ergo 0. ſub 0. nihilq; reſeruò. Deniq; octies 6. faciunt 48. quibus quia in proximo producto nihil ſeruaui, nihil addo. Pono igitur totum hunc numerum ſub linea, quia multiplicatio ad finem perducta eſt, cum nulla alia figura ſuperioris numeri reſtet multiplicanda per 8. Itaque ſi totum numerum 600394. multiplicemus per 8 procreabimus hunc numerum 4803152. Atque hoc modo quemcunque numerum per quamuis figuram multiplicabis.

600394
8
———
4803152

5
4 X 8
5

Quomodo numerus per numerum pluribus figuris ſcriptum multiplicetur.

SI vero numerus pet numerum plurium figurarum ſit multiplicandus, ducatur ſub ipſis diſpoſitis, vt dictum eſt, linea recta. Deinde ſingulæ figuræ inferioris numeri per ſingulas figuras oumeri ſuperioris multiplicentur, vt proxime docuimus; hoc ſolum diligenter obſeruato, vt numerus productus ex quacunque figura inferioris numeri per primam figuram numeri ſuperioris multiplicata collocetur ſub illa figura inferioris numeri, per quam ſuperior numerus multiplicatur, reliqui autem numeri ex multiplicatione eiuſdem figuræ numeri producti ſtatuantur ſuo ordine deinceps verſus ſiniſtram, vt in hoc exemplo factum eſſe vides, in quo quatuor ordines nnmerorum ſub linea conſtituti ſunt ex numeris ptoductis.

per 9. per 7.

4300678
600394
———
17202712
38706102
12902034
25804068
———
2582101267132

4
1 X 4
4

2
4 X 4
2

Totus enim nnmerus productus ex multiplicatione 4. in omnes figuras ſuperioris numeri habet primam ſuam figuram ſub 4. Ita quoque nnmerus productus ex multiplicatione 9. in omnes figuras numeri ſuperioris primam ſuam figuram habet ſub 9. Eadẽ ratione prima figura numeri producti ex multiplicatione 3. in omnes figuras numeri ſuperioris collocata eſt ſub 3. Deniq; prima figura oumeri ꝓducti ex multiplicatione 6. in omnes figuras ſuperioris numeri poſita eſt ſub 6. Reliquæ autem figuræ ordine ſuo progrediuntur verſus ſiniſtram.

QVO-

QVONIAM verò cifra ſiue multiplicans ſiue multiplicata producit o. omiſimus in numero inferiori duas cifras, ita vt eas non multiplicauerimus in numerum ſuperiorem, quia ſemper produxiſſent o. Idem faciendum eſt, quotieſcunq; in numero inferiori fuerint aliqnot cifrę. Eas n. ſemper omittemus, & ad proximè ſequētem figuram ſignificatiuam nos conferemus. Cifræ tamen ſuperioris numeri, ſi quæ ſint, negligendæ non ſunt. Nam licet multiplicatæ per figuras inferioris numeri ſignificatiuas producant o. ſæpenumero tamen ꝓducto illi o. addendum eſt aliquid, illud nimirum, quod in præcedenti multiplicatione aliquando reſeruatum eſt, idq; loco prodncti repouendum ſub linea. Immo etiam ſi nihil reſeruatum aliquando, ponenda tamen eſt figura o. ſub linea loco producti. Quæ omnia iu ſuperioribus exemplis obſeruanta ſunt. In priori enim cum multiplicauimus 8. per o. produximus o. ſed quia in præcedenti multiplicatione reſeruata erant 3. poſuimus 3. loco producti o. Rurſus cum multiplicauimus iterum 8. per o. produximus etiam o. & qnoniam nihil reſeruatum fuit, poſuimus o loco producti. Idemq; factum eſt in poſteriori exemplo.

POST hæc infra omnes nnmeros productos alia linea ducatur, vt ſub ea ponatur ſumma ex omnibus illis productis collecta. Quæ quidem ſumma colligenda eſt, vt in additione traditum eſt; dummodo prima figura cuiuslibet producti cum intelligatur locum occupare, quem figura primi producti, ſub qua illa collocatur, occupat: Hoc eſt, vt figura 2. quæ prima eſt ſecundi numeri producti in propoſito exemplo cogitetur eſſe poſita ſub ſecundo loco primi producti; figura autem 4. quæ prima eſt in tertio productó, intelligatur eſſe locata ſub tertio loco primi producti; Denique figura 8. quæ prima etiam eſt in quarto producto, concipiatur occupare ſextum locum ſub primo producto. In his enim locis omnes has figuras vides eſſe poſitas. Itaque vt exemplo rem monſtremus, hac ratione ſumma colligetur. In numeris productis ſola figura 2. occupat primnm locum; Ea igitur ſola ponenda eſt in primo loco ſub linea. Deinde in ſecundo loco ſunt 1. & 2. quæ faciunt 3. ſub linea in ſecundo loco ponenda. Rurſus in tertio loco ſunt 7. o. 4. quæ efficiunt 11. Collocanda ergo erit 1. ſub linea in tertio loco, & ſeruanda 1. vt figuris quarti loci adijciatur, &c. Hac ratione ſumma collecta erit 258210126713 2. atque hic numerus producitur ex multiplicatione 4300678. in 600394.

VT autem videas eundem numerum gigni, etiam ſi maiorem numerum ſub minore ſtatuamus, appoſuim⁹ hoc alterum exemplum ſequēs, in quo ijdem duo numeri 4300678. & 600394. inter ſeſe multiplicantur, ſed maior numerus ſub minore poſitus eſt, factique ſunt qnluque ordines numerorum prodnctorum, quot nimirum ſunt figuræ ſignificatiuæ in numero inferiori. Idem tamen numerus productus eſt, qui prius.

per 9. per 7.

```
                 600394
                4300678
        ---------------
                4803152
               4202758
      4        3602364           2
    4 X 1     1801182          4 X 4
      4      2401576             2
        ---------------
        2582101267132
```

HIC modus multiplicandi, quem hacten⁹ expoſuimus, apud omnes magis vſitatus eſt: alias tamen multiplicandi rationes non iniucundas in pleniore noſtra Arithmetica explicabimus.

Prima probatio multiplicationis per 9.

EXAMEN multiplicationis triplex eſt. Primum fit per abiectionem 9. hoc modo. Reijciantur primū 9. ex primo numero multiplicato; quoties fieri poteſt, vt in additione diximus, reſiduumq; in ſiniſtra parte crucis ponatur. Deinde reiectis 9. eodem modo ex altero numero multiplicato locetur reſiduum in dextra parte crucis. Poſt hæc, multiplicatis his duobus reſiduis inter ſe, & ex producto reiectis 9. ſtatuatur reſiduum in ſuperiori parte crucis. Poſtremo ex ſumma omnium productorū reiectis quoque 9. ſcribatur reſiduum in parte crucis inferiore. Neceſſe enim eſt, reſiduum hoc æquale eſſe reſiduo ſuperiori, ſi erratum in multiplicatione non eſt. Exempla poſita ſunt in ſuperioribus multiplicationibus. Nam in primo exemplo, reiectis 9. ex 600394. reſiduū eſt 4. Reſiduum autem huius numeri 8. eſt 8. quia 9. abijci non poſſunt. Multiplicatis autem his reſiduis 4. & 8. inter ſe, fiunt 32. à quib⁹ ſi reijciantur 9. ex prodncto 4803152. In ſecundo autem exemplo, reſiduum primi numeri eſt 1. ſecundi antem 4. Multiplicatiſq; inter ſe his reſiduis 1. & 4. fiunt 4. in ſuprema parte crucis locanda, quia 9. abijci non poſſunt. Reiectis autem 9. ex tota ſumma, ſuperſunt etiam 4.

Secunda probatio multiplicationis. per 7.

ALTERVM examen fit per reiectionem 7. ſi nimirum ex iiſdem numeris abijciantur 7. vt in additione diximus, ex quibus in ſuperiori examine præcepimus reijcienda eſſe 9. Exemplum habes in poſtremis duab⁹ multiplicationibus. Sed duo hæc examina ſunt etiam fallacia, propter cauſas ſupra adductas.

Tertia probatio multiplicationis per diuiſionem.

TERTIVM examen certiſſimum eſt, fitque per diuiſionem. Si enim tota ſumma producta diuidatur per alterutrum numerorum multiplicatorum, prodibit neceſſario in Quotiente alter numerus. Quæ quidem diuiſio facillima erit, cum opus non ſit, Quotientes figuras inquirere, cum ex ordine omnes contineantur in altero numero multiplicato. Sed hoc examen planius intelligetur, cum Diuiſio explicata fuerit.

Alia duo exempla cum probatione per 9.

```
 4058                       3069
   23          0              45          0
 -----       0 X 5          -----       0 X 0
 12204         0           15345          0
 8136                      12276
 -----                     -----
 93564                    138105
```

In

Digitized by Google

In priori horum exemplorum primnm reſiduum eſt o. Vndelicet ſecundum reſiduum ſit 5. tamen reſiduorum multiplicatio facit o. In poſteriori autem vtrumque reſiduum numerorum multiplicatorum eſt o. Vnde eorum multiplicatio dabit etiam o. atque ita in vtroque exemplo reſiduum numeri producti etiam neceſſario erit o.

Quod ſi vterque numerus multiplicandus; vel alter tantum, habuerit in principio aliquot cifras, multiplicatio admodum facilis erit. Abiectis enim omnibus cifris illis, multiplicandi erunt reliqui numeri inter ſe, & producto numero appotiendæ ordine omnes illæ cifræ abiectæ. Vt ſi multiplicandus ſit numerus 3406. per 4000. reiectis cifris 000. multiplicetur datus numerus per 4. & numero producto 1 3 6 2 4. apponantur eædem cifræ, hoc modo. 13624000. Sic etiam, ſi multiplicanda ſint 3040000. per 203000. reiectis 7. cifris ad dextram horum numerorum poſitis, multiplicentur reliqui numeri 304. & 203. inter ſe, & producto numero 61712. apponantur reiectæ illæ ſeptem cifræ, hoc modo. 61712000000.

Facilitas multiplicationis, cum numeri in principio habent cifras.

Hinc fit, ſi numerus aliquis multiplicandus ſit per 10. vel 100. vel 1000. vel 10000. &c. addendas eſſe illi numero ad dextram tot cifras, quot continentur in numero multiplicante, ſine vlla alia multiplicatione: quia reiectis cifris, ſupereſt ſola vnitas, quæ numerum datum multiplicans eundem numerum producit. Vt 5067. multiplicata per 10. faciunt 50670. Multiplicata autem per 100000. faciunt 506700000. Ita quoq; 3000. multiplicata per 100. faciunt 300000. &c.

DIVISIO INTEGRORVM NVMERORVM.

CAPVT V.

DIVISIO eſt diſtributio propoſiti numeri in partes ab altero numero dato denominatas. Vt diuiſio nnmeri 36. per 9. eſt diſtributio eius in nonas partes, nempe à 9. denominatas; quarũ quidem ſingulæ quatertias vnitates continebunt: ita vt 4. ſit numerus ex hac diuiſione productus, qui Quotiens dici ſolet, propterea quod indicat, quoties numerus 9. qui diuidens, ſiue diuiſor appellatur, in diuidendo numero 36. contineatur. Indicat enim contineri quater, toties nimirum, quoties numerus Quoticus 4. vnitatem continet. Ex quo fit, Diuiſionem ita quoque deſcribi poſſe. Diuiſio eſt inuentio numeri, qui toties vnitatem contineat, quoties numerus diuidendus diuiſorem continet. Vt in propoſito exemplo perſpicuum eſt.

Diuiſio quid.

Quotiens quid.

In diuiſione ſcribitur diuiſor ſub numero diuidendo, non quidem ponendo primam figuram ſub prima, & ſecundam ſub ſecunda, &c. vt in additione, ſubtractione, & multiplicatione factum eſt, ſed contrario ordine. Ponenda enim hic eſt vltima figura diuiſoris ſub vltima figura diuidendi numeri, & penultima ſub penultima, &c. Vt ſi diuidendus ſit numerus 7809. per 47. collocandi erunt numeri, vt in appoſito exemplo apparet.

7809
47

Quo pacto numeri in diuiſione ſint collocandi.

Quod ſi vltima figura diuiſoris maior fuerit vltima figura numeri diuidendi, collocanda erit vltima figura diuiſoris ſub penultima figura numeri diuidẽdi, & penultima ſub antepenultima, &c. vt in hoc exemplo eſt manifeſtum. Idem faciendum eſt, ſi vltima figura diuiſoris æqualis fuerit vltimæ figuræ numeri diuidendi, ſed penultima maior quam penultima: vel ſi & vltima vltimæ, & penultima penultimæ fuerit æqualis, ſed antepenultima diuiſoris maior, quã antepenultima numeri diuidendi: Vel denique, quotieſcunque diuiſor maior fuerit eo numero, quem tot figuræ vltimæ numeri diuidendi exprimunt, quot figuris diuiſor ſcribitur. Quæ omnia in his duobus prioribus exemplis hic poſitis manifeſta ſunt. Quod ſi diuiſor æqualis fuerit illi numero, quem tot figuræ numeri diuidendi exprimunt, quot figuris diuiſor ſcribitur, collocandus erit diuiſor ſub eo numero, vt in poſteriore tertio exemplo factum eſſe vides.

37800
47

46800.
47

476047.
4762

4793.
47

Ita autem diuiſio fiet. Primum quæratur, quoties diuiſor in numero ſibi ſupraſcripto contineatur, & numerus indicans, quoties continetur, ad dexteram numeri diuidendi poſt lineam hanc curuam (ſcribatur; atq; hic numerus (qui ſemper vnica figura ſcribitur, nunquam enim maior numerus, quam 9. poni poteſt in Quotiente; etiamſi diuiſor videatur ſæpius aliquando contineri in numero ſupraſcripto, quam nouies, vt in exemplis patebit) in diuiſorem multiplicetur, productuſque numerus (qui ſeorſum ſcribendus non eſt, ſed memoria retinendus) ex ſupraſcripto numero ſubtrahatur, vt in ſubtractione docuimus, ſcribendo ſingulos numeros reſiduos ſupra figuras, à quibus facta eſt ſubtractio, deletis prius hiſce figuris vna cum diuiſore. Numerus autem totus reſiduus ſupra diuiſorem notatus minor eſſe debet diuiſore, alias erratum eſſet. Id quod etiam in aliis reſiduis obſeruandum erit.

Diuiſio quomodo fiat.

In Quotiente non poteſt poni maior numerus quã 9.

Reſiduus numerus ſemper debet eſſe minor diuiſore.

Deinde promouendus erit diuiſor dextram verſus in proximum locum, & iterum quærendum, quoties in numero ſibi ſupraſcripto contineatur, & reliqua facienda, vt prius. Quod ſi in aliqua promotione diuiſor maior fuerit numero ſupraſcripto, ita vt nec ſemel quidem in eo contineatur, ſcribenda erit figura o. poſt illum numerum, quem poſt lineam curuam ſcribendum eſſe diximus, & diuiſor delendus, iterumque promouendus ad proximum locum, & quærendum, vt prius, quoties in numero ſupraſcripto contineatur, &c. Atque ita ſemper promouendus erit diuiſor, donec nullus locus in numero diuidendo ſuperſit, in quem diuiſor poſſit promoueri. Verum hæc exemplis fient planiora.

Sit primum diuidendus numerus 76048. per vnicam figuram, vt per 8. Primnm innenio diuiſorem 8. contineri in numero ſupraſcripto 76. nouies. Dicitur autem ille numerus ſupra diuiſorem eſſe ſcriptus, qui exprimitur figura ſupra primam figuram diuiſoris poſita, & omnib. aliis verſus ſiniſtrã, ſi quæ ſint, vt in dato exemplo numerus ſupra diuiſorẽ poſitus eſt 76. Porro ex tabula Pythagorica, quæ ſupra poſita eſt, cognoſces facile, quoties figura diuiſoris in ſupra poſito numero contineatur. Si enim figuram diuiſoris ſumas in vertice tabulæ, & in eius linea, deorſum deſcendendo, accipias numerum ſupra poſitum, vel, ſi is non inuenitur, eo proximè minorem, indicabit figura ei reſpondens in ſiniſtro latere, quoties figura diuiſoris in numero ſupraposi-

Quomodo numerus per vnicã figuram diuidatur.

Qui numerus dicatur ſupra diuiſorem poſitus.

Quo pacto ex tabula Pythagorica cognoſcatur, quoties figura diuiſoris in ſuprapoſito numero contineatur.

to contineatur. Vt in dato exemplo, ſub figura 8. non reperitur numerus 76. ſuprapoſitus: ſi igitur accipiatur 72 proximè minor, reperietur in ſiniſtro latere figura 9. Nouies ergo continetur figura 8 in 76. atque ita de cæteris. Pono igitur 9. poſt lineam curuam, & multiplico 9. per 8. dicendo, octies 9 faciunt 72. quæ ſubtrahenda ſunt ex numero 76. ſupra diuiſorem poſito, hoc modo. Subtractis 2. ex 6. remanent 4. Deleta igitur figura 8. in diuiſore, & figura 6. in numero diuidendo, pono 4. ſupra 6. Subtractis item 7. ex 7. nihil remanet. Deleta igitur figura 7. nihil pono ſupra 7. quia poni deberet cifra, quæ ſuperuacanea eſſet, eo quod illam nulla alia figura ſequatur verſus ſiniſtram. Atque ita abſoluta eſt vna operatio diuiſionis, remanetque hic numerus 4048. vt in propoſito exemplo vides.

4
7604 8 (9
8

Deinde promoto diuiſore in præcedentem locum ſub 0 vt hic vides in ſecundo exemplo, video diuiſorem 8. in numero ſupraſcripto 40. contineri quinquies. Pono igitur 5. poſt figuram 9. iam inuentam, vt in tertio exemplo vides, & dico; quinquies 8. (multiplicando nimirum figuram 5. inuentam per diuiſorem) faciunt 40. quæ ſubtracta ex numero 40 ſupra diuiſorem poſito nihil reliquunt. Deleta igitur figura 8. in diuiſore, & figuris 0. & 4. in numero diuidendo, abſoluta erit ſecunda operatio diuiſionis, remanebitq; hic numerus 48. vt in eodem tertio exemplo apparet.

4
76048 (9
88

4
76048 (95
88

Rurſus diuiſore promoto in præcedentem locum ſub 4. vt hic in quarto exemplo cernis, reperio diuiſorem 8. nec ſemel quidem contineri in ſupraſcripto numero 4. Pono igitur 0. poſt figuram 5. vltimo inuentam, vt in quinto exemplo factum eſt. Et quoniam figura 0. multiplicata per diuiſorem nihil producit, nihil ſubtrahendum erit ex numero 4. ſupra diuiſorem poſito. Deleto igitur diuiſore, abſoluta erit tertia operatio diuiſionis, remanebitque numerus 48. vt in hoc eodem quinto exemplo manifeſtum eſt.

4
76048 (95
888

4
76048 (950
888

Poſtremo, promoto diuiſore in præcedentem locum ſub 8. vt hic in ſexto exemplo cernitur, inuenio diuiſorem 8. in numero 48. ſupraſcripto contineri ſexies. Pono igitur 6. poſt figuram 0. vltimo repertam, vt hic in 7. exemplo factum eſt, & dico; ſexies 8. (multiplicando nimirũ figuram 6. inuentam in diuiſorem) faciunt 48. quæ ſubtracta ex numero 48. ſupra diuiſorem poſito nihil relinquunt. Deleta igitur figura 8. in diuiſore, & figuris 8. & 4. in numero diuidendo, abſoluta erit tota diuiſio, cum nullus alius locus ſuperſit in numero diuidendo, in quem diuiſor poſſit promoueri; nihilque in diuiſione ſupererit. Itaq; totus quotiens numerus eſt 9506.

4
76048 (950
8888

4
76048 (9506
8888

Poſui tot exempla in hac diuiſione, vt diſtinctius appareret, quidnam in qualibet operatione relinquatur, & quid deleatur; quamuis ſolum extremum ſit inſtar omnium, ita in operatione neceſſe non ſit alia exempla depingere, ſed ſatis ſit, ſi vltimum deſcribatur.

Quotiens quot figuras habeat.

Vides igitur, Quotientem tot habere figuras, quoties diuiſor ſub numero diuidendo poſitus eſt. Id quod in omnibus aliis diuiſionibus, etiam per plures figuras inſtitutis, euenit. Semper enim tot figuras habebit Quotiens, quoties totus diuiſor ſub numero diuidendo ponitur.

Quomodo numerus per plures figuras diuidatur.

Sit deinde numerus 1832487. diuidendus per numerum 469. qui non vna, ſed pluribus figuris ſcribitur. Hic vt ſciatur, quoties diuiſor in numero ſupraſcripto contineatur, (eſt autem in hoc exemplo numerus 1832 ſupra diuiſorem poſitus.) non eſt id de toto diuiſore inquirendum, ſed ſatis eſt, ſi inueſtigetur, quoties vltima eius figura, qualis hic eſt 4. contineatur in numero ſuprapoſito,

42
685
1832487 (3
469

Qui numerus dicatur ſupra quamcunq; figuram diuiſoris eſſe poſitus.

(Dico autem etiam hic illum numerum ſupra vltimam figuram diuiſoris, vel ſupra quamcunq; aliam, eſſe poſitum, qui exprimitur figura ſupra eam ſcripta, & omnibus aliis verſus ſiniſtram, ſi quæ ſint. Vt in dato exemplo, ſupra figuram 4. poſitus eſt numerus 18. ſupra 9. autem numerus 1832. qui hic eſt 18. hac tamen adhibita cautione, vt non ſemper in Quotiente ponatur figura tot vnitatum, quoties vltima diuiſoris figura in numero ſupra eam poſito continetur, ſed diligenter curetur, vt ea figura ponatur, quæ in totum diuiſorem multiplicata eo ordine, quem iam præſcribemus, talem numerum producat, qui & ex numero ſupra diuiſorem poſito ſubtrahi poſſit, & ſubtractus relinquat numerum (ſi quem relinquas) diuiſore minorem. Itaque (vt ad exemplum propoſitũ veniamus) quamuis vltima figura diuiſoris, quæ eſt 4. cõtineatur in ſuprapoſito numero 18. quater, tamen quia figura 4. multiplicata in totum diuiſorem producit maiorem numerum, quam 1832. qui ſupra diuiſorem poſitus eſt, ita vt ex ſuprapoſito numero ſubtrahi non poſſit, non pono 4. in Quotiente, ſed 3. Quod ſi hæc figura 3. multiplicata in totum diuiſorem produceret maiorem etiam numerum, quam 1832. ponerem 2. loco 3. Et ſi figura 2. multiplicata in diuiſorem adhuc maiorem numerum procrearet, ponerem 1. atque ita ſemper minuam figuram Quotientis vna vnitate, donec figuram inueniam, quæ in diuiſorem multiplicata numerum gignat, qui ex ſupraſcripto numero detrahi poſſit.

Quomodo ducenda ſit figura Quotientis inuenta in diuiſorem.

Sic autem multiplicanda erit figura Quotientis inuenta in totum diuiſorem. Primum ducenda eſt in vltimam figuram diuiſoris, & hoc productum ex numero ſupra vltimam figuram illam poſito auferendum, deleta prius illa figura diuiſoris, vna cum numero, ex quo facta eſt ſubtractio. Deinde multiplicanda eſt in figuram penultimam diuiſoris, productumque ex numero ſupra poſito detrahendum, vt prius. Atque hoc modo in omnes figuras diuiſoris multiplicanda eſt, &c. vt in noſtro exemplo. Ex 3. in 4. fiunt 12. quæ ita ſubtrahenda ſunt ex 18. numero ſuprapoſito. Demptis 2. ex 8. remanent 6 Deleta ergo figura 4. in diuiſore, & figura 8. in numero diuidendo, repono 6. ſupra 8. Dempto item 1. ex 1. nil remanet. Deleo igitur 1. Deinde ex 3. in 6. fiunt 18. quæ ex numero ſuprapoſito 63. ſic ſubducenda ſunt. Diſtantia 8. à 10. (Nam 8. ex 3. ſubtrahi nequeunt.) eſt 2. additis 3. fiunt 5. quæ pono ſupra 3. deleta prius figura 6. in diuiſore, vna cum figura 3. in numero diuidendo.

Addo

Addo autem 1. propter diſtantiam à 10. cuius mentio facta eſt, ad 1. (nempe ad denam numeri 18. qui ſubtrahitur.) fiuntq; 2. quæ ex 6. ablata relinquunt 4. quæ pono ſupra 6. deleta prius dicta figura 6. Tandē ex 3. in 9. fiant 27. quæ ſic ex ſuprascripto numero 452. detrahuntur. Diſtantia 7. à 10. (quoniam 7. ex 2. detrahi non poſſunt) eſt 3. additis 2. fiunt 5. quæ pono ſupra 2. deleta prius figura 9. in diuiſore, & figura 2. in numero diuidendo. Addo autem 1. ad 2. (nempe ad denas numeri 27. ſubtrahendi) propter dictam diſtantiam à 10. facioque 3. quæ ablata ex 5. (nimirum ex ſecunda figura numeri 452. à quo ſubtractio fit) relinquunt 2. Pono ergo 2. ſupra 5. deleta prius dicta figura 5. Atque ita deinceps pergendum eſſet, ſi plures figuræ in diuiſore reperirentur. Abſoluta ergo hac ratione erit diuiſionis vna operatio, remanebitque hic numerus 425487. vt in exemplo ſuprascripto vides.

Promoto iam diuiſore in præcedentem locum, ita vt ſingulæ figuræ diuiſoris locum vnum mutent, vt hic vides, intelligo vltimam figuram diuiſoris, nempe 4. in ſuprapoſito numero 42. contineri nouies. Pono igitur 9. poſt figuram 3. in priori operatione inuentam, vt in ſequenti exemplo patet, & dico. ex 9. in 4. fiunt 36. quæ ita ſubtraho ex numero 42. ſuprascripto. Diſtantia 6. à 10. (quoniam 6. ex 2. ſubduci non poſſunt) eſt 4. additis 2. fiunt 6. quæ pono ſupra 2 deleta prius figura 4. in diuiſore, vna cum figura 2. in numero diuidendo.

42
655
2832487 (3
4699
46

Addo autem 1. ad 3. (nimirum ad denas numeri 36. ſubtrahendi.) propter dictam diſtantiam à 10. facioque 4. quæ ex 4. ablata nihil relinquunt. Deleo ergo 4. rurſus ex 9. in 6. fiunt 54. Detractis igitur 4. ex 5. remanet 1. Demptis quoque 5. ex 6. remanet etiam 1. Quare deleta figura 6. in diuiſore, vna cum figuris 5. & 6. in numero diuidendo, pono ſupra ſingulas figuram 1. Denique ex 9. in 9. fiunt 81. quæ ita ſubduco ex numero 114. ſuprapoſito. Dempto 1. ex 4. remanent 3. Pono ergo 3. ſupra 4. deleta prius figura 9. in diuiſore, & figura 4. in numero diuidendo. Diſtantia autem 8. à 10. (quia 8. ex 1. ſubduci nequeunt) eſt 2. ſi addatur 1. fiunt 3. quæ ſupra 1. colloco, deleta prius figura 1. Et propter dictam diſtantiam à 10. ſubtraho 1. ab 1. nihilque remanet. Deleo ergo 1. abſolutaque erit ſecunda diuiſionis operatio. Numerus autem remanens erit 3387. vt in exemplo patet.

2
63
422
6553
2832487 (390
469999
4666
44

Rurſus promoto diuiſore in proximum locum, vt in proximo exemplo apparet, ita vt figura 9. locetur ſub 8. at 6. ſub 3. & 4. ſub 3. video vltimam figuram diuiſoris, puta 4. nec ſemel quidem in ſuprapoſito numero contineri, quare ſcribo 0. poſt figuram 9. proxime inuentam, deleoque diuiſorem. Abſoluta namque ita erit tertia operatio diuiſoris, remanebitque idem numerus 3387. qui in antecedente operatione reliquus fuit.

Poſtremo promoto diuiſore in primum locum, vt in eodem proximo exemplo manifeſtum eſt, reperio vltimam diuiſoris figuram 4. in ſuprascripto numero 33. contineri ſepties tantum; quia ſi ſumeretur octies, non poſſet à numero 3387. ſuprapoſito fieri ſubtractio numerorū productorum ex 8. in totum diuiſorem. Itaque pono in Quotiente figuram 7. poſt alias figuras inuentas, vt in hoc exemplo apparet & dico: Ex 7. in 4. fiunt 28. quæ hac ratione ex numero 33. ſuprapoſito demo. Diſtantia 8. à 10. (Nam 8. ex 3. non poſſunt ſubtrahi) eſt 2. ſi addantur 3. fiunt 5. Deleta ergo figura 4. in diuiſore, & figura 3. in numero diuidendo, pono 5. ſupra 3. Addo autem 1. ad 2. (nempe ad denas numeri 28. ſubtrahendi) propter dictam diſtantiam à 10. facioq; 3. quæ ex 3. ablata nihil relinquunt. Quare deleta figura 3. rurſus dico: Ex 7. in 6. fiunt 42. quæ ex 58. numero ſuprapoſito ita tollentur. Detractis 2. ex 8. relinquuntur 6. Deleta ergo figura 6. in diuiſore, & figura 8. in numero diuidendo, pono 6. ſupra 8. Detractis item 4. ex 5. remanet 1. Deleta ergo figura 5. pono 1. ſupra eam, & tandem dico: Ex 7. in 9. fiunt 63. quæ ex 167. numero ſuprapoſito ſunt deducenda hoc modo. Demptis 3. ex 7. ſuperſunt 4. Deleta igitur figura 9. in diuiſore, & figura 7. in numero diuidendo, ſtatuo 4. ſupra 7. Detractis item 6. ex 6. remanet 0. Deleta ergo figura 6. pono 0. ſupra eam. Atque ita tota diuiſio abſoluta eſt, remanetque numerus hic 104. qui poſt Quotientem 3907. collocandus eſt ſupra diuiſorem 469. interiecta linea inter ipſos, vt fiat numerus fractus, hoc eſt, partes 104. ex partibus 469. in quas totum aliquod concipitur eſſe diuiſum. Eodem pacto in aliis diuiſionibus ponitur reſiduum, ſi quod fuerit, ſupra diuiſorem, linea inter ipſos interiecta, vt fiat fractus numerus.

2
631
42250
655364
2832487 (3907. $\frac{104}{469}$
469999
4666
44

Quid agendum ſit cū numero ex diuiſione relicto.

Imo vero, quando minor numerus per maiorem proponitur diuidendus, ponendus erit numerus diuidendus ſupra diuiſorem, interiecta dicta linea inter ipſos, vt fiat numerus fractus; Vt ſi diuidendi ſint 48. aurei in 60. milites, fiet numerus fractus, quem hic vides eſſe appoſitū, ita vt quilibet accipiat 48. partes ex 60. in quas vnus aureus intelligitur eſſe diuiſus. Quid autem ſit huiuſmodi fractus numerus, & quomodo eius valor exploretur tam in monetis, quam in ponderibus, aut menſuris, prout numerus diuidendus ſignificat monetam, aut pōdera, menſuraſue, dicemus in tractatione fractorum numerorum.

$\frac{48}{60}$

Quando numerus minor per maiorem proponitur diuidēdus, quid agendum.

Sunt nonnulli, qui alio modo multiplicant figuram Quotientis inuentam in totum diuiſorem. Nam primum eam multiplicant in primam figuram diuiſoris, productumque ex numero ei figuræ ſuprapoſito auferunt: Deinde eandem ducūt in ſecundam figuram diuiſoris, & ita deinceps in reliquas, donec ad vltimam peruenerint, productoſque numeros ex ſuprascriptis numeris tollunt. Vt ſi diuidendus ſit numerus 3387. per 469 (quemadmodum in vltima operatione ſuperioris exempli factum eſt.) poſtquam repererunt, vltimam figuram diuiſoris, nimirum 4. contineri ſepties in ſuprapoſito numero 33. (Nam octies comprehendi non poteſt, vt paulo ante diximus.) ponentes in Quotiente figuram 7. non dicunt, ex 7. in 4. fiunt 28. vt nos fecimus, ſed; Ex 7. in 9. fiunt 63. quæ ita ex ſuprapoſito numero 3387.

10
2924
3387 (7
469

Quomodo nonnulli ducant figurā Quotientis inuentam in diuiſorem.

ro 3387.ſubtrahunt. Ablatis 3. ex 7. relinquuntur 4. Deleta ergo figura 9. in diuiſore, & figura 7. in numero diuidendo. ponunt 4. ſupra 7. Ablatis quoque 6. ex 8. remanent 2. ponenda ſupra 8. prius deleta. Deinde iterum dicunt. Ex 7. in 6. fiunt 42. quæ ita demunt ex ſuprapoſito numero 332. Ablatis 2. ex 2. nihil relinquitur. Deleta igitur figura 6. in diuiſore vna cum figura 2. in numero diuidendo, ponunt 0. ſupra 2. Et quoniam 4. (nempe altera figura producti numeri 42.) auferri non poſſunt ex 3. ſumunt diſtantiam 4. à 10. nempe 6. cui addunt 3. vt fiant 9. ponenda ſupra 3. prius deleta. Propter dictam autem diſtantiam à 10. auferunt 1. ex vltima figura 3. ponuntque reliqua 2. ſupra 3. deleta prius figura 3. Poſtremo dicunt. Ex 7. in 4. fiunt 28. Subductis ergo 8. ex 9. remanet 1. ponenda ſupra 9. ſi prius deleatur in diuiſore figura 4. vna cum figura 9. in numero diuidendo. Ablatis item 2. ex 2. nil remanet: abſolutaque erit operatio. Hac porro ratione plerunque fit, vt non ſcribantur tot figuræ ſupra numerum diuidendum, quot in priori illo modo multiplicandi figuram Quotientis in diuiſorem ponuntur, quando ea ducitur primum in vltimam figuram diuiſoris, deinde in penultimam, &c, vt ſupra explicauimus. Id quod exemplis addiſces. Verum prior ille modus apud Mathematicos, & mercatores magis eſt in vſu, faciliusq; in eo error corrigi poteſt, ſi quãdo nimis magna figura poſita fuerit in Quotientē, vt mox docebimus.

In quo difficultas diuiſionis conſiſtat.

Hoc exemplo, quod explanauimus, plane percepto, nulla erit difficultas in diuidendo quouis numero per numerum quotcunque figurarum. Totus enim labor in eo poſitus eſſe videtur, vt cognoſcatur, quoties vltima figura diuiſoris in numero ſupraſcripto ſumi debeat, vt videlicet figura hæc Quotientis in omnes figuras diuiſoris multiplcata numerum procreet, qui ex ſuprapoſito numero ſubduci poſſit, numeruſque poſt hanc ſubtractionem relictus ſit diuiſore minor.

Quando in Quotiente ſumpta eſt figura nimis parua, vel magna quid agendum.

Quod ſi quando contingat, (id quod non raro ijs euenire ſolet, qui parum in hoc negotio ſunt exercitati) figuram talem in Quotiente poni, vt ea in omnes figuras diuiſoris multiplicata, productiſque ex numero ſupra diuiſorem poſito ſubductis, numerus relictus maior ſit diuiſore, vel certe non omnes producti ſubtrahi poſſint; ſi id quidem accidat in principio diuiſionis, facile error corrigetur, ſi accipiatur in Quotiente figura maior, aut minor, prout res exiget; quia tunc notæ adhuc ſunt figuræ numeri diuidendi ſupra diuiſorem poſitæ, etiam ſi deletæ ſint, ita vt facile ab ijs numeri ex multiplicatione nouæ figuræ Quotientis in figuras diuiſoris producti iterum poſſint ſubduci, præſertim ſi figuræ illæ numeri diuidendi deletæ ſcribantur ordine ſupra alias figuras deletas, diuiſor etiam ſub diuiſore deleto reponatur, ne figuræ deletæ negotium nobis faceſſant. Si vero in media operatione, vel prope finem id contingat, nõ tam facile errorem quis corriget, cum vix dignoſcãtur figuræ numeri diuidendi ſupra diuiſorem in illa operatione poſitæ ab aliis figuris; quippe quæ iam deletæ ſint, & cum aliis permixtæ, ac ſupra numerum diuidendum poſitæ. Quare ne tunc cogamur diuiſionem totam iterare, (quod neceſſario faciendum eſſe omnes docent. Id quod permoleſtum eſſet, præſertim ſi iam plures operationes diuiſionis forent abſolutæ.) excogitauimus huiuſmodi remedium.

Si figura Quotientis accepta ſit nimis parua, ita vt numerus relictus poſt ſubtractionẽ numerorum, qui ex multiplicatione illius figuræ in omnes figuras diuiſoris producuntur, maior ſit diuiſore, ſubtrahemus diuiſorẽ ex numero relicto toties, quoties poſſumus, donec numerus relinquatur minor diuiſore, & quoties is ſubtractus erit, tot vnitates illi figuræ Quotiẽtis addemus. Si vero figura Quotiẽtis accepta ſit nimis magna, adeo vt poſt ſubtractionẽ aliquot numerorum, q̃ ex multiplicatione illius figuræ in aliquot figuras diuiſoris, pducuntur, in aliquẽ numerum productum incidamus, qui amplius ſubduci non poſſit, multiplicabimus figuram illam Quotientis in figuras diuiſoris deletas, quarum nimirum numeri producti ſubtracti iam ſunt, & productos numeros, additis prius figuris numeri relicti, ordine ſupra illas figuras diuiſoris ſcribemus, deletis prioribus figuris relictis. Hac enim ratione reſtituetur numerus, qui ſupra diuiſorem poſitus erat ante illam operationem. Quocirca cum iterum per diuiſorem (renouatum tamen, quoad figuras deletas, ne confuſionem pariant) partiemur, accipiendo aliam figuram in quotiente, quæ vna vnitate minor ſit, quam prior accepta. Et ſi hæc figura etiam nimis magna ſit, reſtituemus eodem modo numerum ſupra diuiſorem collocatum, & accipiemus aliam figuram minorem. Idque toties faciemus, donec figuram inueniamus, quæ in omnes figuras diuiſoris multiplicata numeros producat, qui & ſubtrahi poſſint, & numerum relinquant diuiſore minorem. Sed hæc omnia hoc propoſito exemplo fient magis perſpicua.

Exemplũ correctionum, quando nimis parua figura in Quotiente accepta eſt.

Sit diuidendus numerus 1653149. per 2899. Collocato diuiſore ſub numero diuidendo, ponamus quempiam parum exercitatum accepiſſe in Quotiente figuram 4. Vnde ſi dicamus. Ex 4. in 2. fiunt 8. quibus detractis (eo modo, quem in proximo exemplo explicauimus) ex 16. remanent 8 Deinde ex 4. in 8. fiunt 32. quibus ſubductis ex 82. remanent 50. Rurſus ex 4 in 9. fiunt 36. quibus ſublatis ex 503. remanent 467. Deniq; ex 4. in 9. fiunt 36. quibus ex 4671. ablatis, relinquuntur 4635. qui numerus maior eſt diuiſore. Nimis ergo parua eſt figurã accepta 4. Quare deleto reſiduo hoc, vna cum accepta figura 4. ponemus has figuras 16231. numeri diuidendi deletas ſupra alias figuras deletas, & diuiſorem deletum renouatum ſub diuiſore collocabimus, vt in proximo exemplo factum eſſe vides. Qua ratione reſtitutus erit totus numerus diuidendus 1653149. vna cum diuiſore, ac ſi nondum inchoata eſſet diuiſio. Ponemus ergo figuram 5. vna vnitate maiorem, quam 4. in Quotiente, vt in hoc altero exemplo vides, & dicemus. Ex 5. in 2. fiunt 10. quibus detractis ex 16. remanent 6. Deleta igitur figura 2. in diuiſore, & figura 1. in numero diuidẽdo, q̃ decem ſignificat reſpectu figuræ 6. dicemus rurſum. Ex 5. in 8. fiunt 40. quibus ſubtractis ex 62. remanent 22. Item ex 5. in 9. fiunt 45. quibus ex 223. ſubductis, remanent 178. Denique ex 5. in 9. fiunt 45. quibus demptis ex 1781. relinquuntur 1736. qui numerus diuiſore minor eſt. Recte ergo accepta eſt figura 5.

4
563
8075
1623149. (4
2899

6
423
5631
18275
1623149 (4
2899
2889

10
23
678
4236
5631
18075
1623149 (45
28999
2899
289

Sed

Exempli correctionis, quando nimis magna figura in Quotiente accepta eſt.

Sed vt exemplum etiam habeas, quando nimis magna figura accipitur, ponamus in Quotiente poſitam eſſe figuram 6. Hæc multiplicata in 2. facit 12. quibus ablatis ex 16. remanent 4. Deinde quia ex 6. in 8. fiunt 48. quæ ex 42. detrahi nequeunt, fit vt figura accepta 6. ſit nimis magna.

4
1623149 (6
2899

Quamobrem deleto reſiduo hoc 4. vna cum accepta figura 6. ſcribemus figuras 1. & 6. numeri diuidendi deletas ſupra eaſdem, & figuram 2. in diuiſore deletam infra eandem, ita vt totus numerus diuidendus ab initio propoſitus, vna cum diuiſore reſtituatur, ac ſi diuiſio nondum eſſet inchoata, vt in hoc exemplo appoſito factum eſſe vides.

6
14
1623149 (6
2899
2

Ponemus ergo, vt in ſequenti exemplo apparet, figuram 5. vna vnitate minorem, quam 6. in Quotiente, & dicemus. Ex 5. in 2. fiunt 10. quibus ſublatis ex 16. relinquuntur 6. Deleta igitur figura 2. in diuiſore, & figura 1. in numero diuidendo, quæ decem ſignificat reſpectu figuræ 6. dicemus rurſum. Ex 5. in 8. fiunt 40. quibus detractis ex 62. remanent 22. Item ex 5. in 9. fiunt 45. quibus demptis ex 223. remanent 178. Denique ex 5. in 9. fiunt 45. quibus ſubductis ex 1781. remanent 1736. Potuerunt ergo omnes numeri producti ſubduci, relictuſq; eſt numerus diuiſore minor. Quare recte accepta eſt in Quotiente figura 5. Ex his facile intelliges, quid agendnm ſit, quando in principio diuiſionis accepta eſt figura nimis parua, aut magna. Nunc attende, quo pacto error corrigatur, ſi in media operatione nimis magna aut parua figura in Quotiente accepta ſit.

1
2
63
14786
1623149 (65
2899
2

Promoueatur ergo diuiſor in ſuperiori exemplo, in quo nimis parua figura ſumpta fuit in principio diuiſionis, vt ibidem cernis in tertia poſitione exempli. Fingamus auté, vltimam diuiſoris figuram 2. in ſuprapoſito numero 17. contineri ſeptics, atque adeo in Quotiente poſt figuram 5. inuentam ſcribi 7. Quo poſito dicemus. Ex 7. in 2. fiunt 14. quibus detractis ex 17. remanent 3. quæ ſupra 7. ſcribo, deleta prius figura 2. in diuiſore, vna cum figuris 7. & 1. in numero diuidendo. Deinde rurſus dicemus. Ex 7. in 8. fiunt 56. quæ ex 33. auferri nequeunt. Eſt ergo figura 7. accepta nimis magna. Vt igitur reſtituatur numerus 17. à quo facta eſt ſubtractio, ſi forte is inter tot figuras deletas non internoſceretur, muliplicanda eſt figura 7. accepta in figuram 2. in diuiſore deletam, & producto addenda figura 3. ſupra dictam figuram diuiſoris poſita.

1
233
678
4236
5631
15075
1623149 (457
28999
2899
289

Vt quoniam ex 7. in 2. fiunt 14. ſi addantur 3. fiunt 17. Deleta igitur figura 3. ſcribemus ſupra eam numerum 7. & ſupra figuram 1. deletam ponemus 1. atq; ita reſtitutus erit numerus 17. à quo facta eſt ſubtractio, vt in hoc appoſito exemplo apparet. Poſita autem figura 2. ſub figura 2. in diuiſore deleta, vt etiam diuiſor reſtituatur, vt in eodem hoc exemplo manifeſtum eſt, concipiamus vltimam figuram diuiſoris 2. contineri in 17. non ſepties, ſed ſexies, atq; adeo, deleta figura 7. in Quotiente, poni figuram 6. vt in exemplo hoc altero apparet.

1
17
233
678
4236
5631
18075
1623149 (457
28999
2899
289
2

Quo poſito, dicemus. Ex 6. in 2. fiunt 12. quibus detractis ex 17. remanent 5. Deleta ergo figura 2. in diuiſore, vna cum figuris 7. & 1. in numero diuidendo, ſcribemus 5. ſupra 7. & dicemus. Ex 6. in 8. fiunt 48. quibus demptis ex 53. relinquuntur 5. Deleta igitur figura 8. in diuiſore, vna eum figuris 3. & 5. in numero diuidendo, ſcribemus 5. ſupra 3. & rurſus dicemus. Ex 6. in 9. fiunt 54. quibus ſubductis ex 56. remanent 2. Deleta ergo figura 9. in diuiſore vna cum numero 56. in diuidendo numero, ponemus 2. ſupra 6. ac tandem dicemus. Ex 6. in 9. fiunt 54. quæ ex 24. ſubtrahi nequeunt. Nimis ergo magna etiam eſt figura 6. in Quotiente. Quare vt ſciamus, quinam numerus ſupra diuiſorem collocatus fuerit, antequam hanc operationem inciperemus, multiplicabimus figuram dictam 6. in figuras diuiſoris deletas, vt dictum eſt.

15
175
233
6782
4236
5631
18075
1623149 (4576
28999
289
2

Vt ex 6. in 9. fiunt 54. Additis 2. quæ ſupra figuram diuiſoris 9. deletam poſita ſunt, fiunt 56. Deleta ergo figura 2. ſcribemus ſupra eam 6. & retinebimus 5. Deinde ex 6. in 8. fiunt 48. Additis 5. quæ ſeruauimus, fiunt 53. Scribemus ergo 3. ſupra 5. & retinebimus 5. Poſtremo ex 6. in 2. fiunt 12. Additis 5. quæ reſeruauimus, fiunt 17. quæ ſupra 15. collocabimus: atque ita reſtitutus erit numerus, qui ante hanc operationem ſupra diuiſorem poſitus erat. Reſtitutis autem tribus quoque figuris 2. 8. 9. in diuiſore deletis, atque deleta figura 6. in Quotiente, ponamus 5. loco illius, vt in hoc exemplo vides. Quoniam vero ex 5. in 2. fiunt 10. quibus ablatis ex 17 remanent 7. delebimus figuram 2. in diuiſore, vna cum figura 1. in diuidendo numero, quæ decem ſignificat reſpectu figuræ 7. & dicemus. Ex 5. in 8. fiunt 40. quib. ſubductis ex 73. remanent 33. Deleta ergo figura diuiſoris 8. vna cum figura 7. in numero diuidendo, ſcribemus 3. ſupra eam, rurſuſque dicemus. Ex 5. in 9. fiunt 45. quibus demptis ex 336.

17
153
175
2336
6782
4236
5631
18075
1623149 (4576
28999
2899
289
289
2

 rema-

remanent 291. Deleta igitur figura diuiſoris 9. vna cum numero diuidendo 336. ponemus loco illius 291. & tandem dicemus. Ex 5. in 9. fiunt 45. quibus ſubtractis ex 2914. relinquuntur 2869. qui numerus diuiſore minor eſt. Recte ergo accepta eſt figura 5.

Promoto tandem diuiſore in proximum locum, nimirum in vltimum, vt in præcedenti exemplo vides, cogitemus vltimam diuiſoris figuram 2. in ſupraſcripto numero 28. contineri ſepties. Poſita igitur figura 7. in Quotiente, vt in hoc altero exemplo appoſito vides, dicemus. Ex 7. in 2. fiunt 14. quibus ablatis ex 28. remanent 14. Item ex 7. in 8. fiunt 56. quibus detractis ex 146. remanent 90. Item ex 7. in 9. fiunt 63. quibus ſubductis ex 909. relinquuntur 846. Item ex 7. in 9. fiunt 63. quibus demptis ex 8469. remanent 8406. qui numerus maior eſt diuiſore; & proinde figura accepta 7. nimis parua eſt. Quare ſubtrahemus diuiſorem ex dicto reſiduo, quoties poſſumus, & tot vnitatibus maiorem figuram, quam 7. ſcribemus in Quotiente, quoties diuiſor detractus fuerit. Ita autem diuiſorem detrahemus in hoc ſequenti exemplo, reſtituto prius diuiſore. Ablatis 2. ex 8. remanent 6. Item demptis 8. ex 64. remanent 56. Item ſubductis 9. ex 560. remanent 551. Tandem detractis 9. ex 5516. remanet 5507. qui numerus adhuc maior eſt diuiſore. Detractis igitur 2. ex 5. remanent 3. Demptis autẽ 8. ex 35. remanent 27. Item ſubductis 9. ex 270. remanent 261. Deniq; ſubtractis 9. ex 2617. relinquuntur 2608. qui numerus minor iam eſt diuiſore. Quia ergo bis detractus eſt diuiſor, ſcribemus in quotiente, deleta prius figura 7. numerũ 9. duab. videlicet vnitatibus maiorem, quã 7. Itaq; totus numerus Quotiens eſt 559. Coacti autem ſumus rẽ tot exemplis exponere, vt clarius intelligeretur, q̃d in ſingulis operationib. relinquatur, quãuis ſolum hoc vltimũ inſtar ſit omniũ. Et licet tot verbis remedium iſtud expoſuerimus, vſus tamen facile docebit, rem eſſe breuiorem ac faciliorem, quam vt verbis exprimi poſſit.

2
38
179
1536
1752
2336
6782
4236
5632
180759
1623149 (45765
289999
28999
289
289
228

8
19
24

364
1790
1536
1752
2336
6782
42360
36316
1807596
1623149 (457057
289999
28999
289
289
228

Hoc ergo remedium, ſi adhibeatur, quotieſcunq; in Quotiente figura maior, aut minor, quam oportet, ſumpta fuerit, incredibile eſt, quam expedite numerus quilibet per quemcunque numerum diuidatur: quia hac ratione non opus eſt, vt ſimus nimis anxii, qualem figurã in quauis operatione ſcribere debeamus in Quotiente, cum illo remedio errorem, ſi quis commiſſus erit, ſine vllo fere labore corrigere poſſimus: ita vt hic modus diuidendi, quem hactenus præſcripſimus, ſit inter omnes, qui ab aliis auctoribus explicari ſolent, præſtantiſſimus, atque expeditiſſimus, ac propterea ſumma diligentia, & cura adhibenda, vt in eo ſeſe exerceat is, qui in arte ſupputandi cupit eſſe excellens, & præſtans.

Facilior ratio diuiſionis. Sed quia, ſi prædictum remedium adhibeatur, diuiſio in nimis magnam molem excreſcit, vti poterimus hoc alio artificio. Abſoluta prima operatione diuiſionis, ſcribatur reſiduum ſeorſum vna cum ſequente figura numeri diuidendi, & ſub hoc numero diuiſor reponatur, incipiendo ab vltima figura ad dextram, & verſus finiſtram procedendo: Ac rurſus ſecunda operatio diuiſionis expediatur; qua expedita, reſiduum iterum ſeorſum ſcribatur, cum inſequenti figura numeri diuidendi, atq; ita deinceps vſq; ad finem. Hac enim ratione omnis confuſio figurarum deletarum vitabitur. Nam quando in aliqua harum partialium diuiſionum pro Quotiente ſumpta fuerit figura nimis magna, aut parua, facile error corrigetur, ſi illa partialis diuiſio repetatur, quod moleſtum non erit, cum opus non ſit totam diuiſionem ab initio repetere. Exemplum habes in diuiſione numeri 2596860019. per 38748. Vt autem ſcias, quamnam figuram numeri diuidendi poſt quodlibet reſiduum ſcribere debeas, recte feceris, ſi ſub vltima figura primæ operationis, vt in dato exemplo ſub 6. punctum poſueris, vt indicet in ſecunda operatione aſſumendam eſſe figuram poſt illud punctum. Sub hac figura aliud punctum eſt ſignandum, vt ſignificet in tertia operatione ſumendam eſſe figuram poſt illud punctum, &c. veluti hic obſeruatum eſſe vides.

2
3
5
66
87
195
246
384
1790
15360
17511
23360
67821
423608
563167
1807596
1623149 (4576579
289999
28999
2899
289
228
28

Opera-

Operatio. 1.

2 1
3729
71448
259686 (6
38748

Diuidendus 2596860019
....
Diuiſor 38748

Operatio 2.

7
284
65984
271980 (7
38748

Operatio 3.

7449 (0
38748

Operatio 4.

3565
46763
74401 (1
38748

Operatio 5.

7
2880
84277
356539 (9
38748

Totus Quotiens. 67019 $\frac{7807}{38748}$

Probatio per 9. totius exempli.

1
3 X 5
1

Poſitis ergo ordine omnibus Quotientibus, habebitur totus Quotiens 67019. Habet hoc artificium commoditatem hanc, quod ſi probatio non ſuccedat ex ſententia, non neceſſe ſit totam diuiſionem repetere, ſed ſatis eſt, vt ſingulæ operationes, quæ paucæ ſunt, examinentur, & illa in qua error fuerit deprehenſus, repetatur. Atq; hoc artificium facile eſt, & expeditum, ideoq; à tyronibus adhibendum cenſeo.

Quomodo alÿ diuiſionem abſoluant.

Nam quod alii multiplicent figuram in Quotiente poſitam in totum diuiſorem, productumq; numerum ſub diuiſore collocent, (prima figura poſita ſub prima, & ſecunda ſub ſecunda, &c.) vt eum ex numero ſupra diuiſorem poſito detrahant, res eſt certa illa quidem, ac facilis, ſed quæ longiorem efficiat diuiſionem, quam par eſt, eumq; qui diuidit, non parum remoretur. Vt enim numerum huoc verbi gratia, 40689. per 1 2 9 8. diuidant, poſtquam in prima operatione poſuerunt in Quoticote figuram 3. multiplicant eam in diuiſorem, primum quidem in figuram 8. dicendo. Ex 3. in 8. fiunt 24. ſcribunt ergo 4. ſub 8. & ſeruant 2. Deinde ex 3. in 9. fiunt 27. Additis a. quæ ſeruata ſunt, fiunt 29. Poſitis ergo 9. ſub 9. ſeruant 2. &c. Poſt hæc, deleto diuiſore, auferunt 4. ex 8. collocantq; reſiduum 4. ſupra 8. deletis prius figuris 4. & 8. &c. Promoto deinde diuiſore, progrediuntur eodem modo. Quod tamen nos breuius abſoluimus, cum numerum productum non ſcribamus ſub diuiſore. Habet tamen modus iſte hanc commoditatem, quod ex ipſa operatione facile intelligatur, num figura accepta in Quotiente ſit oimis magna, nec ne. Nam ſi productus numerus ex multiplicatione figuræ illius in diuiſorem ſubtrahi poſſit ex numero ſupra diuiſorem poſito, numerumque relinquat diuiſore minorem, figura illa recte accepta eſt; ſi minus, erratum eſſe, dubitandum non eſt.

45
1741
40689 (31
12988
3894
129

Commoditas in hoc modo diuidendi.

Alia ratio diuiſionis facilis.

Fiet autem hic modus expeditior, ſi pro diuiſore ponatur, productus numerus ex figura Quotientis in diuiſorem, fiantq; partiales diuiſiones, vt paulo ante diximus, vt hic in eodem exemplo patet.

Operatio 1.
259686 (6
232488
27198

Operatio 2.
271980 (7
271236
744

Operatio 3.
7440 (0

Operatio 4.
74401 (1
38748
35653

Operatio 5.
356539 (9
348732
7807

Diuidendus 2596860019
Diuiſor 38748
Quotiens 67019

Verbi g. in prima operatione diuidendus eſt numerus hic 259686. Si igitur ſub ipſo ſcriberetur diuiſor, caderet figura 8. ſub 6. & figura 3. ſub 5. Et quia 3. in 25. numero ſuprapoſito cõtinentur ſexies, (nam figura 7. eſſet nimis magna) dicemus, ex 6. in 8. fiunt 48. ponemus 8. ſub 6. ſeruando 4. Deinde ex 6. in 4. fiunt 24. additiſq; 4. quæ ſeruauimus, fiunt 28. Poſitis ergo 8. ſub 8. ſeruentur 2. & ſic deinceps, donec figura Quotientis in omnes figuras diuiſoris ducta ſit. Facta autem ſubtractione, fit reſiduum 27198 &c. In tertia operatione, quia numerus diuidendus 7440. minor eſt diuiſore, poſita eſt figura 0. in Quotiente. Quod ſi quando productus numerus maior ſit diuidendo in aliqua partiali diuiſione, figura Quotientis accepta ſuit nimis magna: ideoq; repetenda erit illa diuiſio partialis. Hoc modo ſi diuiſio inſtituatur, nulla erit inter figuras deletas confuſio, licet ſutura ſit aliquanto longior illo modo, quem in principio tradidimus.

Alius modus abſoluendi diuiſionem.

Quod etiam alii diuiſorem prius per ſingulas figuras ſignificatiuas multiplicent, quemlibet productum numerum prope figuram multiplicantem ſcribendo, vt inter hos productos quærant numerum poſitum ſupra diuiſorem, eoque inuento, vel certe, ſi non inuenitur, proxime minore accepto, figuram multiplicantem illi aſcriptam in Quotiente ponant, atque numerum acceptum ex numero ſupra diuiſorẽ poſito ſubducant; res etiam

Subtractio quomodo fiat.

Ducta deinde linea ſub duobus illis numeris, ſubtrahuntur ſingulæ figuræ inferioris numeri à ſingulis figuris ſuperioris numeri, initio facto à primis figuris; & reſidua ſub linea collocantur eo ordine, quo facta eſt ſubtractio. Quod ſi in ſuperiori numero aliquæ figuræ non habeant reſpondentes figuras in numero inferiori, ita vt ab illis nihil ſubtrahatur, reponendæ illæ erunt ſub linea. Verbi gratia. Subductis 6. ex 9. remanent 3. ſub linea collocanda. Item ſubductis 3. ex 8. relinquuntur 5. Et demptis 2. ex 5 relinquuntur 3. Subtracta autem figura 0. ex 1. remanet 1. At ſubductis 4. ex 7 remanent 3. Quia vero ex figuris 2. & 3 nihil ſubtrahitur, ponendæ eæ erunt eodem ordine ſub linea.

Quid agendum ſit, quando ſigura inferior maior eſt, quam ſuperior.

Quando autem figura aliqua inferior maior eſt ſuperiore ſibi reſpondente, ita vt ſubtractio fieri non poſſit, ſeruanda erit hæc regula. A proxima figura ſuperiori verſus ſiniſtram mutuo accipiatur vnitas, quæ decem vnitates ſignificabit reſpectu illius figuræ, à qua ſubtractio fieri non poteſt. Deinde huic vnitati apponatur figura illa, vt fiat numerus duabus figuris ſcribendus, à quo detrahatur illa figura inferior maior: ſed tunc illa figura, à qua mutuo accepta eſt vnitas, reputanda erit vna vnitate minor. Quod ſi proxima illa figura ſuperior ſit 0. mutuabimur vnitatem ab alia figura verſus ſiniſtram, quæ vnitas ſignificabit 100. vnitates reſpectu illius figuræ, à qua ſubtractio non poteſt fieri: ſed tunc loco figuræ 0. animo reponenda erit figura 9. & figura, à qua mutuo accepta eſt vnitas, vna vnitate minor erit. Ita quoque ſi plures huiuſmodi figuræ 0. antecederent illam, à qua vnitatem mutuamur, cogitandæ eſſent omnes veluti 9. & illa, quæ mutuo dedit vnitatem, vna vnitate minor. Quæ omnia hoc exemplo fient perſpicua.

4500026304827
3929034567892

570991736935

Primvm ſubductis 2. ex 7. remanent 5. Deinde, quia 9. detrahi non poſſunt ex 2. mutuabimur vnitatem ab 8. & ita detractis 9. ex 12. (quem numerum exprimunt 1. quam mutuo accepimus, & 2.) relinquuntur 3. Rurſus quia 8. ex 7. (ſuperior enim figura 8. cum mutuo dederit vnitatem, valet tantum 7.) ſubtrahi nequeunt, mutuabimur vnitatem à 4. & ſic ſubductis 8. ex 17. remanent 9 Poſt hæc, quia 7. ex 3. (figura enim 4. ob vnitatem mutuo datam valet tantum 3.) non poſſunt auferri, accipiemus mutuo vnitatem à 3. poſt 0. Sed quoniam hæc vnitas valet 100. reſpectu figuræ 3. à qua non poteſt fieri ſubtractio, & nos indigemus tantum 10. neceſſe eſt, vt ſi à 100. mutuemur 10. relinquantur 90. Hinc fit, vt figura 3 valeat tantum 2. & ſupra 0. reponenda ſit animo figura 9. quæ ſignificat 90. reſpectu figuræ, à qua ſubtractio fieri non poterat. Itaq; ſubductis 7. ex 13. remanent 6. Et ſubductis 6. ex 9. (ſupra 0. namque diximus cogitari debere 9.) remanent 3. Quoniam vero 5. ex 2. (Nam figura ſuperior 3. valet tantum 2. vt diximus.) auferri nequeunt, accipiemus mutuo 1. à 6. detrahemusque 5. ex 12. vt ſuperſint 7. Subductis deinde 4. ex 5. (figura enim 6. valet tantum 5. ob vnitatem mutuo datam) remanet 1. Et quia rurſus 3. ex 2. non poſſunt detrahi, mutuabimur vnitatem à 5 Sed cum hæc vnitas valeat 10000. reſpectu figuræ 2. à qua ſubductio fieri nequit, nos vero indigeamus tantum 10. neceſſe eſt, vt ſi à 10000. mutuemur 10. remanent 9990. Hinc fit, vt figura 5. valeat ſolum 4. & ſupra ſingulas cifras cogitatione reponenda ſit figura 9. hoc modo, 999. Hæ namque figuræ 999. ſignificant 9990. reſpectu figuræ 2. à qua ſubductio fieri non poterat. Itaque ſubductis 3. ex 12. remanent 9. Et ſubducta figura 0. ex 9. (quam figuram 9. ſupra 10. diximus cogitandam eſſe.) remanent 9. Et ſubductis 9. ex 9. (quam etiam figuram 9. ſupra 0. imaginamur) remanet 0. Item ſubtractis 2. ex 9. (ſupra 0. namque reponenda quoque animo eſt figura 9.) ſuperſunt 7. At vero quoniam 9. ſubtrahi non poſſunt ex 4. (Figura enim 5. ob mutuo datam vnitatem valet tantum 4.) mutuabimur 1. à 4. & deducemus 9. ex 14. vt ſuperſint 5 Poſtremo ſubductis 3. ex 3. (Nam figura 4. ob mutuo datam vnitatem valet tantum 3.) remanet 0 quæ figura 0. quia vltima eſt in hoc exemplo, nihilque propterea ſignificat, omittenda eſt.

Facilior ratio ſubtractionis, quando figura inferior ſuperiore maior eſt.

Hac regula plerique Arithmetici vtuntur, quam nos multo facilius ita proponemus. Quando inferior figura maior eſt ſuperiore, accipiatur differentia inter ipſam & 10 atque huic differentiæ addatur ſuperior figura, à qua ſubtractio non poterat fieri, aggregatumque ſcribatur ſub linea. Hoc enim aggregatum relinqueretur ſi figura illa maior auferretur ex numero compoſito ex 10. & figura illa ſuperiore, à qua non poteſt fieri ſubtractio, non ſecus, ac ſi vnitas fuiſſet mutuo accepta: cum figura illa maior primum ſubtrahatur à 10. vt habeatur differentia inter 10. & illam figuram, deinde reſiduo, ſiue differentiæ huic ſuperior figura addatur. Poſtea ne cogamur vnitatem cogitatione auferre ex ſuperiore figura, à qua mutuo ſumpta eſt implicite vnitas, addemus proximæ figuræ inferiori verſus ſiniſtram vnitatem, & hoc aggregatum ex ſuperiori figura (nulla ex ea prius dempta vnitate) ſubducemus. Eadem enim ſemper differentia erit inter inferiorem, ac ſuperiorẽ figuram, ſiue ex ſuperiore auferas vnitatem, & inferiori nihil addas, ſiue ex ſuperiori nihil auferas, & inferiori vnitatem adiicias. Vt propoſitis hiſce duabus figuris 7. 4. ſi ex 7 tollatur vnitas, erit 2. differentia inter reſiduum 6. & 4. Et ſi ex 7. nihil dematur, adiiciatur autem vnitas ad 4. eadem differentia 2. erit inter 7. & 5. Atque hoc modo, quotieſcunque facta fuerit mentio differentiæ inter 10. & figuram inferiorem, quæ ex ſuperiori non poteſt ſubtrahi, addenda erit vnitas proximæ inferiori figuræ verſus ſiniſtram. Sed hæc omnia clariora fient ex eodem exemplo, quod hic repetiuimus.

4500026304827
3929034567892

570991736935

Primum ſubductis 2. ex 7. ſuperſunt 5. Quia vero 9. ſubtrahi non poſſunt ex 2. ſubtrahemus 9. ex 10. & reliquæ vnitati (quæ differentia eſt inter 10 & 9. adiiciemus 2. vt habeamus 3. pro reſiduo ſub linea ponendo. Hoc facto ſtatim inferiori figuræ 8. addemus 1. propter illam differentiam inter 10. & 9. vt fiant 9. Quæ quoniã rurſus ex 8. non poſſunt ſubduci, detrahemus 9. ex 10. & reliquæ vnitati (quæ rurſus differentia eſt inter 10. & 9.) ad-

demus

demus 8.vt habeamus 9.collocanda ſub linea. Quo peracto, ſtatim inferiori figuræ 7.addemus 1.propter illam differentiam inter 10.& 9.efficiemusque 8. Quæ quoniam ex 4.demi nequeunt, auferemus 8.ex 10.& reſiduo 2.(hoc eſt,differentiæ inter 10. & 8.) adijciemus 4. vt fiant 6.reponenda infra lineam. Deinde ſtatim inferiori figuræ 6.adiungemus 1.propter differentiam illam inter 10.& 8. efficięmuſque 7. Quæ, quoniam ex 0. ſubtrahi nequeunt,ſubduco ex 10.& reſiduò 3.(id eſt,differentię inter 10.& 7.) addo 0. efficioque 3 ponenda ſub linea. Rurſus inferiori figuræ 5.addo 1. propter illam differentiam inter 10.& 7.efficioq; 6. Quæ,quoniam ſubduci nequeunt ex 3.detraho ex 10.& reſiduo 4.(id eſt,differentiæ inter 10.& 6.)addo 3.efficioq; 7.infra lineam ſcribenda.His peractis,ſtatim inferiori figuræ 4.addo 1.propter dictam differentiam inter 10.& 6.facioq; 5.quibus ſubductis ex 6.ſupereſt 1. Quia vero in hac ſubductione mentio facta non eſt differentiæ inter 10. & 5.cum 5 ſubduci potuerint ex 6.non addo 1.inferiori figuræ 3.ſed eam, quoniam ſubduci non poteſt,ex 2. ſubtraho ex 10. & reſiduo 7. (ſiue differentiæ inter 10. & 3.) addo 2.facioque 9. locanda ſub linea, Poſt hæc ſtatim figuræ inferiori 0.addo 1. propter differentiam dictam inter 10. & 3. efficioq; 1.Et quoniam 1.ſubtrahi non poteſt ex 0.demo 1.ex 10.reſiduoq; 9.(id eſt differentiæ inter 10.& 1.)addo 0. efficioq; 9. infra lineam reponenda. Poſtea iterũ ſtatim addo 1. figuræ inferiori 9.ꝑpter illam differentiam inter 10.& 1.vt habeam 10.quæ, quoniam ex 0.non poſſunt detrahi,aufero ex 10.reſiduoq; 0.(ſiue differentiæ inter 10.& 10 addo 0.)facioq; 0.pro reſiduo ſub linea collocando.Rurſus quam primum inferiori figuræ 2. addo 1.propter dictam differentiam inter 10. & 10.efficioque 3.quæ cum ex 0.ſubduci nequeant, ſubtraho ex 10. reſiduoque 7.(nempe differentiæ inter 10.& 3.)addo 0.facioque 7.collocanda ſub linea.Præterea mox addo 1.ad figuram inferiorem 9. propter differentiam illam inter 10.& 3. facioque 10. quæ quoniam ex 5.non poſſunt detrahi , aufero ex 10.ac reſiduo 0.(differentiæ nimirum inter 10.& 10.)addo 5.efficioq; 5.pro reſiduo ſub linea reponendo.Poſtremo ſtatim figuræ inferiori 3. adijcio 1.propter illam differentiam inter 10.& 10.vt habeam 4.quæ ſubducta ex 4. reliquunt 0. quam figuram 0.quoniã ſuperuacanea eſt in principio numeri ex parte ſiniſtra,omittemus,cum poſita fruſtra locũ occuparet.

```
 4500016304827
 3929034567892
 -------------
  570991736935
```

Aliud Exemplum.

per 7. — per 9.

```
           4000134 | 5
5 X 5        67823 | 0          3 X 3
           -------------
           3932311 | 5
```

IN hoc exemplo, quoniam ablatis omnibus figuris inferioribus ex ſuperioribus vnitas adijcienda eſſet ſequenti figurę inferiori,quæ nulla eſt, reponemus eam in ſequentem locum:quę,quoniam auferri nequit ex 0. detrahenda erit ex 10. & reſiduum 9.infra lineam ponendum;Ac rurſus vnitas ſequenti loco adijcienda,atque ex 4.auferenda,vt habeatur reſiduum 3.ſub linea collocandum.

QVOD ſi numerus ex pluribus numeris,vel plures numeri ex pluribus, vel ex vno numero ſint ſubducendi,colligendi prius erunt plures numeri illi,à quibus fieri debet ſubtractio,in vnam ſummam;Itemq; plures illi,qui ſubtrahi debent,inter ſe addendi,priuſquam ſubtractio inſtituatur.

Quando numeri ſint plures quid agendum.

EXAMEN ſubtractionis quadruplex eſt.Primum fit per abiectionem 9. Si n. ex ſuperiori numero,à quo facta eſt ſubtractio,reijciãtur 9.quoties fieri poteſt,eo modo, quo in additione diximus abijcienda eſſe 9. & reſiduũ collocetur in vna parte crucis,neceſſe eſt,vt idem numerus relinquatur , ſi abijciantur 9. ex numero ſubtracto , & ex relicto, quoties fieri poteſt, niſi in ſubtractione erratum ſit. Ita vides in proximo exemplo ad dextram reſiduum ſemper eſſe 3.ſiue 9.abijcias, quoties potes,ex numero 4000134. à quo facta eſt ſubtractio, ſiue ex numeris 678823.3932311.ſimul,quorum ille ſubtractus eſt, hic vero reliquus fuit ex ſubtractione.

Prima probatio ſubtractionis per 9.

SECVNDVM examen fit per abiectionem 7.Nam ſi ex numero, à quo facta eſt ſubtractio, reijciantur 7.quoties fieri poteſt,eo modo,quo in additione diximus abijcianda eſſe 7.& reſiduum ponatur in vna parte crucis,neceſſe eſt,ſi ſubtractio recte facta eſt,vt idem numerus relinquatur,ſi reijciãtur 7.ex numero ſubtracto, ponendo reſiduum ad dexteram illius,& ex numero relicto, ponendo etiam reſiduum ad dextram illius,ac tandem duo hæc reſidua ad dexteram collocata in vnam ſummam colligantur,& ex ea reijciãtur 7.ſi reijci poſſunt. Ita in ſuperiori exemplo,reiectis 7.quoties fieri poteſt,ex numero 4000134. relinquuntur 5. Reiectis autem 7. ex 67823.remanet 0.& abiectis 7.& ex 3932311.ſuperſunt 5.quæ addita ad 0.faciunt quoque 5.vt in cruce ad ſiniſtram ſuperioris exempli poſita apparet.

Secunda probatio ſubtractionis per 7.

CÆTERVM vtrumq; hoc examen fallax eſſe poteſt, ſi quis per calumniam numeros permutet,aut alios numeros apponat,quemadmodum in additione diximus.

TERTIVM examen fit per additionem. Nam ſi numerum reſiduum ſubtracto numero adijcias, neceſſario componetur numerus,à quo ſubtractio facta eſt. vt in hoc exemplo vides.

Tertia probatio ſubtractionis per additionem.

NVMERVS,à quo fit ſubtractio.	60123
NVMERVS ſubtractus.	45678
NVMERVS reſiduus.	14445
SVMMA ex numero ſubtracto. & reſiduo compoſita,æqualis numero,à quo facta eſt ſubtractio.	60123

QVAR-

Quarta probatio ſubtracti-onis per ſubtracti-onem.

60123
14445
45678

QVARTVM examen fit per ſubtractionem. Facta enim ſubtractione, ſi reſiduum ab eodem numero, à quo facta eſt ſubtractio, auferas, ſupererit neceſſario numerus ſubtractus. Vt in proximo exemplo, ſi numerum reſiduum 14445. ex numero 60123. detrahas, reliquus erit numerus ſubtractus 45678. vt hic apparet.

Hæc poſteriora duo examina certiſſima ſunt, nullamque admittere poſſunt fallaciam, aut fraudem.

MVLTIPLICATIO INTEGRORVM NVMERORVM.

CAPVT IV.

Multiplicatio quid

MVLTIPLICATIO eſt ductus vnius numeri in alium. Tunc autem numerus quilibet in alium duci dicitur, cum alter ipſorum toties augetur, quoties in altero continetur vnitas. Vt numerus 6. in numerum 5. vel numerus 5. in numerum 6. duci dicitur, quando numerus 6. quinquies accipitur, vel numerus 5. ſexies. quo pacto ſemper accipientur 30. atque huiuſmodi ductus Multiplicatio appellatur. Itaque numerus ex multiplicatione, ſiue ductu vnius numeri in alterum procreatus toties vtrumlibet multiplicatorum continebit, quoties alter vnitatem complectitur, vt in dato exemplo manifeſtum eſt. Ex quo fit, Multiplicationem ita quoque deſcribi poſſe. Multiplicatio duorum numerorum eſt inuentio numeri, qui toties vtrumuis eorum contineat, quoties alter vnitatem continet.

VT expedite omnis multiplicatio fiat, neceſſe eſt noſſe, qui numerus producatur ex ductu, ſiue multiplicatione cuiuslibet figuræ numericæ in quamuis aliam figuram, vt ex 7. in 8. vel ex 8. in 7. Item ex 7. in 9. vel ex 9. in 7. &c. Hoc enim ſi bene tenueris, nullam in multiplicatione ſenties difficultatem, aut laborem. Id quod aſſiduo exercitio magis diſcitur, quam vllo præcepto. Interim tamen mirifice tibi inſeruiet ſequens tabula, quæ Pythagorica dici ſolet; ea fortaſſis de cauſa, quod Pythagoras eam vel primus excogitauerit, vel certe diſcipulos ſuos in ea mirifice exercuerit.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Conſtructio tabulæ Pythagoricæ.

Conſtructio huius tabulæ perfacilis eſt. Prima enim linea ab 1. incipiens progreditur per continuam additionem vnitatis, vſque ad 9. vt ex 1. & 1. fiunt 2. Ex 2. & 1. fiunt 3. Ex 3. & 1. fiunt 4. &c. Secunda vero linea à 2. incipit, progrediturque per continuam additionem 2. Vt ex 2. & 2. fiunt 4. Ex 4. & 2. fiunt 6. Ex 6. & 2. fiunt 8. &c, Ita quoque tertia linea initium ſumit à 3. & per continuam additionem 3. progreditur. Atq; eodem modo reliquæ lineæ compoſitæ ſunt. Quælibet enim per continuam additionem eius numeri, à quo incipit, progreditur.

Vſus tabulæ Pythagoricæ.

Vſus autem eiuſdem tabulæ, quod ad multiplicationem attinet, (infinitos enim alios vſus habet) hic eſt. Propoſitis duabus figuris inter ſe multiplicandis, ſi altera in ſuperiori linea, & altera in ſiniſtro latere ſumatur, & in illa linea deorſum, in hoc vero latere dextrorſum quis progrediatur, reperiet in communi concurſu numerum ex multiplicatione duarum illarum figurarum inter ſe productum. Ita vides ex multiplicatione 7. in 8. vel 8. in 7. produci 56. Item ex 8. in 8. produci 64. & ſic de cæteris.

Regula multiplicandi figuram in figuram.

QVOD ſi huiuſmodi tabula in promptu non ſit, vtendum erit hac regula. Scribatur vna figura ab altera, & vtriuſq; diſtantia à 10. ad latus ponatur. Deinde hæ diſtantiæ inter ſe multiplicentur. Productus enim numerus, ſi vnica figura ſcribitur, dabit primam ſummæ producendæ ex figurarum multiplicatione; ſi vero duabus figuris ſcribitur, ſeruanda erit figura denarum, & prior ponenda pro prima figura ſummæ producendæ. Secunda autem figura eiuſdem huius ſummæ habebitur, ſi alterutra diſtantia ab altera figura denarum reſeruata addatur, ſi qua ſeruata eſt: Vel certe ſi figuræ propoſitæ inter ſe addantur, addita prius figura denarum reſeruata, ſi qua ſeruata eſt, dabit prima figura huius aggregati (reiecta ſecunda figura tamquam ſuperuacanea) ſecundam figuram ſummæ producendæ. Exemplis res fiet illuſtrior.

9.	1.	8.	2.	7.	3.
8.	2.	8.	2.	6.	4.
7	2	6	4	4	2.

In primo exemplo figuræ multiplicandæ ſunt 9. & 8. earumque diſtantiæ à 10. ſunt 1. & 2. quæ inter ſe multiplicatæ, (erit autem multiplicatio diſtantiarum à 10. facillima, cum minores ſint, quam figuræ multiplicandæ. De his n. regula hæc intelligẽda eſt) dicendo ſemel 2. vel bis 1. faciunt 2. quę ſub diſtantijs ſcribo pro prima figura ſummæ

ſummæ producendæ. Ablata autem diſtantia 2. ex 9. vel diſtantia 1. ex 8. relinquuntur 7. quæ ſcribo ſub figuris pro ſecunda figura ſummæ producendæ. Quam ſecundam figuram etiam dabit prima figura aggregati figurarum 9. & 8. quod eſt 17. relicta ſecunda 1. tanquam omnino ad hoc negotium, inutili. Itaque multiplicatio figurarum 9. & 8. efficit 72.

IN ſecundo autem exemplo figuræ propoſitæ ſunt 8. & 8. quarum diſtantiæ à 10. ſunt 2. & 2. His inter ſe multiplicatis, dicendo, bis 2. habebimus 4. pro prima figura ſummæ producendę. Dempta autem vtrauis diſtantia ex 8. ſuperer ũt 6. pro ſecunda figura, quam nobis etiam dabit prima figura aggregati ex 8. & 8. quod eſt 16. relicta ſecunda 1. tanquam ſuperuacanea. Figuræ igitur 8. & 8. inter ſe multiplicatæ faciunt 64.

IN tertio deniq; exemplo figuræ datæ ſunt 7. & 6. quarum diſtantiæ à 10. ſunt 3. & 4. Hæ inter ſe multiplicatæ, dicendo, ter 4. vel quater 3. faciunt 12. Prima ergo figura ſummæ producendæ erit 2. ſecunda vero figura 1. ſeruanda erit. Deinde ablata diſtantia 4. ex 7. vel diſtãtia 3. ex 6. ſuper ſunt 3. quibus ſi addatur vnitas, quã ſeruauimus, fient 4. pro ſecunda figura ſummæ producendæ: quam etiam figuram dabit prima figura aggregati ex 7. & 6. addita prius vnitate ſeruata, quod eſt 14. omiſſa prorſus ſecunda figura 1. Producuntur ergo 42. ex multiplicatione 7. per 6. vel 6. per 7. Eadem ratio in cæteris eſt dummodo duæ figuræ propoſitæ inter ſe additæ ſuperent 10. Alias diſtantiæ illarum à 10. maiores eſſent ipſis figuris, ac proinde facilius multiplicarentur figuræ, quam diſtantiæ. Rectius tamẽ feceris, ſi vſu, & exercitatione memoriter ediſcas huiuſmodi multiplicationes figurarum inter ſe, quam vt vel ad tabulam Pythagoricam, vt ad hanc regulam confugias.

IAM vero propoſitis duobus numeris inter ſe multiplicandis, ſcribẽdus eſt minor ſub maiore, ita vt prima figura reſpondeat primæ figuræ, & ſecunda ſecundæ, &c. vt in additione, & ſubtractione diximus. Quod tamen neceſſarium nõ eſt, cum etiam maior ſub minore ſcribi poſſit, dicto tamen ordine figurarum ſeruato. Vt ſi multiplicanda ſint 4300678. per 600394. collocandi erunt numeri altero horum modorum, quamuis primus ſit magis vſitatus. *Qua ratione collocãdi ſint numeri inter ſe multiplicandi.*

4300678
600394

Vel

600394.
4300678.

SED doceamus prius, quo pacto numerus aliquis per vnam ſolam figuram multiplicandus ſit. Ita enim facilius intelligetur, qua ratione numerus per numerum plurium figurarum debeat multiplicari.

QVANDO ergo numerus aliquis per vnam tantum figuram multiplicandus eſt, ſolet ſemper figura hæc multiplicans ſubſcribi primæ figuræ numeri multiplicandi. Vt ſi numerus 600394. multiplicandus proponatur per 8. ſic ſtabit exemplum. Multiplicatio autem fiet ſi figura 8. multiplicetur per omnes figuras numeri 600394. incipiendo à dextra, & ſiniſtram verſus progrediendo, ſingulosque numeros productos ſub linea, quæ infra numeros multiplicandos ducitur, ſcribendo; ita tamen, vt ſi productus aliquis numerus duabus figuris ſcribendus ſit, prima earum ponatur, ſecunda vero ſeruetur ſequenti producto adiicienda, hoc videlicet modo. Primum multiplico 8. per 4. dicendo octies 4. faciunt 32. pono 2. ſub 4. & ſeruo 3. Item octies 9. faciunt 72. & additis 3. ſeruatis, fiunt 75. pono 5. ſub 9. & ſeruo 7. Item octies 3. faciũt 24. & additis 7. ſeruatis, fiunt 31. pono 1. ſub 3. ſeruoq; 3. Deinde octies 0. facit 0. & additis 3. ſeruatis, fiunt 3, quæ pono ſub 0. nihilq; reſeruo. Rurſus octies 0. facit 0. cui, quia nihil ſeruaui in præcedenti producto, nihil addendũ eſt. Pono ergo 0. ſub 0. nihilq; reſeruò. Deniq; octies 6. faciunt 48. quibus quia in proximo producto nihil ſeruaui, nihil addo. Pono igitur totum hunc numerum ſub linea, quia multiplicatio ad finem perducta eſt, cum nulla alia figura ſuperioris numeri reſtet multiplicanda per 8. Itaque ſi totum numerum 600394. multiplicemus per 8 procreabimus hunc numerum 4803152. Atque hoc modo quemcunque numerum per quamuis figuram multiplicabis. *Quomodo numerus per vnam figuram multiplicetur.*

600394
8
———
4803152

5
4 X 8
5

SI vero numerus per numerum plurium figurarum ſit multiplicandus, ducatur ſub ipſis diſpoſitis, vt dictum eſt, linea recta. Deinde ſingulæ figuræ inferioris numeri per ſingulas figuras numeri ſuperioris multiplicentur, vt proxime docuimus; hoc ſolum diligenter obſeruato, vt numerus productus ex quacunque figura inferioris numeri per primam figuram numeri ſuperioris multiplicata collocetur ſub illa figura inferioris numeri, per quam ſuperior numerus multiplicatur, reliqui autem numeri ex multiplicatione eiuſdem figuræ numeri producti ſtatuantur ſuo ordine deinceps verſus ſiniſtram, vt in hoc exemplo factum eſſe vides, in quo quatuor ordines numerorum ſub linea conſtituti ſunt ex numeris productis. *Quomodo numerus per numerum pluribus figuris ſcriptum multiplicetur.*

per 9.

4
1 X 4
4

4300678
600394
———
17202712
38706102
12902034
25804068
———
2582101267132

per 7.

2
4 X 4
2

Totus enim numerus productus ex multiplicatione 4. in omnes figuras ſuperioris numeri habet primam ſuam figuram ſub 4. Ita quoque numerus productus ex multiplicatione 9. in omnes figuras numeri ſuperioris primam ſuam figuram habet ſub 9. Eadẽ ratione prima figura numeri producti ex multiplicatione 3. in omnes figuras numeri ſuperioris collocata eſt ſub 3. Deniq; prima figura numeri ꝑducti ex multiplicatione 6. in omnes figuras ſuperioris numeri poſita eſt ſub 6. Reliquæ autem figuræ ordine ſuo progrediuntur verſus ſiniſtram.

QVO-

QVONIAM verò cifra ſiue multiplicans ſiue multiplicata producit o. omiſimus in numero inferiori duas cifras, ita vt eas non multiplicauerimus in numerum ſuperiorem, quia ſemper produxiſſent o. Idem faciendum eſt, quotieſcunq; in numero inferiori fuerint aliquot cifrę. Eas n. ſemper omittemus, & ad proximè ſequẽtem figuram ſignificatiuam nos conferemus. Cifræ tamen ſuperioris numeri, ſi quæ ſint, negligendæ non ſunt. Nam licet multiplicatæ per figuras inferioris numeri ſignificatiuas producant o. ſæpenumero tamen ꝓducto illi o. addendum eſt aliquid, illud nimirum, quod in præcedenti multiplicatione aliquando reſeruatum eſt, idq; loco producti reponendum ſub linea. Immo etiam ſi nihil reſeruatum aliquando, ponenda tamen eſt figura o. ſub linea loco producti. Quæ omnia in ſuperioribus exemplis obſeruanta ſunt. In priori enim cum multiplicauimus 8. per o. produximus o. ſed quia in præcedenti multiplicatione reſeruata erant 3. poſuimus 3. loco producti o. Rurſus cum multiplicauimus iterum 8. per o. produximus etiam o. & quoniam nihil reſeruatum fuit, poſuimus o loco producti. Idemq; factum eſt in poſteriori exemplo.

POST hæc infra omnes numeros productos alia linea ducatur', vt ſub ea ponatur ſumma ex omnibus illis productis collecta. Quæ quidem ſumma colligenda eſt, vt in additione traditum eſt; dummodo prima figura cuiuslibet producti eum intelligatur locum occupare, quem figura primi producti, ſub qua illa collocatur, occupat: Hoc eſt, vt figura 2. quæ prima eſt ſecundi numeri producti in propoſito exemplo cogitetur eſſe poſita ſub ſecundo loco primi producti; figura autem 4. quæ prima eſt in tertio producto, intelligatur eſſe locata ſub tertio loco primi producti; Denique figura 8. quæ prima etiam eſt in quarto producto, concipiatur occupare ſextum locum ſub primo producto. In his enim locis omnes has figuras vides eſſe poſitas. Itaque vt exemplo rem monſtremus, hac ratione ſumma colligetur. In numeris productis ſola figura 2. occupat primum locum; Ea igitur ſola ponenda eſt in primo loco ſub linea. Deinde in ſecundo loco ſunt 1. & 2. quæ faciunt 3. ſub linea in ſecundo loco ponenda. Rurſus in tertio loco ſunt 7. o. 4. quæ efficiunt 11. Collocanda ergo erit 1. ſub linea in tertio loco, & ſeruanda 1. vt figuris quarti loci adijciatur, &c. Hac ratione ſumma collecta erit 2582101267132. atque hic numerus producitur ex multiplicatione 4300678. in 600394.

VT autem videas eundem numerum gigni, etiam ſi maiorem numerum ſub minore ſtatuamus, appoſuim' hoc alterum exemplum ſequẽs, in quo ijdem duo numeri 4300678. & 600394. inter ſeſe multiplicantur, ſed maior numerus ſub minore poſitus eſt, factique ſunt quinque ordines numerorum productorum, quot nimirum ſunt figuræ ſignificatiuæ in numero inferiori. Idem tamen numerus productus eſt, qui prius.

per 9. per 7.

600394
4300678

4803152
4202758
3602364
1801182
2401576

2582101267132

4
4 X 1
4

2
4 X 4
2

HIC modus multiplicandi, quem hacten' expoſuimus, apud omnes magis vſitatus eſt alias tamẽ multiplicandi rationes non iniucundas in pleniore noſtra Arithmetica explicabimus.

Prima probatio multiplicationis per 9. EXAMEN multiplicationis triplex eſt. Primum fit per abiectionem 9. hoc modo. Reijciantur primũ 9. ex primo numero multiplicato; quoties fieri poteſt, vt in additione diximus, reſiduumq; in ſiniſtra parte crucis ponatur. Deinde reiectis 9. eodem modo ex altero numero multiplicato locetur reſiduum in dextra parte crucis. Poſt hæc, multiplicatis his duobus reſiduis inter ſe, & ex producto reiectis 9. ſtatuatur reſiduum in ſuperiori parte crucis. Poſtremo ex ſumma omnium productorũ reiectis quoque 9. ſcribatur reſiduum in parte crucis inferiore. Neceſſe enim eſt, reſiduum hoc æquale eſſe reſiduo ſuperiori, ſi erratum in multiplicatione non eſt. Exempla poſita ſunt in ſuperioribus multiplicationibus. Nam in primo exemplo, reiectis 9. ex 600394. reſiduũ eſt 4. Reſiduum autem huius numeri 8. eſt 8. quia 9. abijci non poſſunt. Multiplicatis autem his reſiduis 4. & 8. inter ſe, fiunt 32. à quib' ſi reijciantur 9. ex producto 4803152. In ſecundo autem exemplo, reſiduum primi numeri eſt 1. ſecundi autem 4. Multiplicatiſq, inter ſe his reſiduis 1. & 4. fiunt 4. in ſuprema parte crucis locanda, quia 9. abijci non poſſunt. Reiectis autem 9. ex tota ſumma, ſuperſunt etiam 4.

Secunda probatio multiplicationis per 7. ALTERVM examen fit per reiectionem 7. ſi nimirum ex ijſdem numeris abijciantur 7. vt in additione diximus, ex quibus in ſuperiori examine præcepimus reijcienda eſſe 9. Exemplum habes in poſtremis duab' multiplicationibus. Sed duo hæc examina ſunt etiam fallacia, propter cauſas ſupra adductas.

Tertia probatio multiplicationis per diuiſionem. TERTIVM examen certiſſimum eſt, fitque per diuiſionem. Si enim tota ſumma producta diuidatur per alterutrum numerorum multiplicatorum, prodibit neceſſario in Quotiente alter numerus. Quæ quidem diuiſio facillima erit, cum opus non ſit, Quotientes figuras inquirere, cum ex ordine omnes contineantur in altero numero multiplicato. Sed hoc examen planius intelligetur, cum Diuiſio explicata fuerit.

Alia duo exempla cum probatione per 9.

4058
23

12104
8136

93564

o
o X 5
o

3069
45

15345
12276

138105

o
o X o
o

In

In priori horum exemplorum primum reſiduum eſt o. Vnde licet ſecundum reſiduum ſit 5. tamen reſiduorum multiplicatio facit o. In poſteriori autem vtrumque reſiduum numerorum multiplicatorum eſt o. Vnde eorum multiplicatio dabit etiam o. atque ita in vtroque exemplo reſiduum numeri producti etiam neceſſario erit o.

Facilitas multiplicationis, cum numeri in principio habent cifras.

Quod ſi vterque numerus multiplicandus; vel alter tantum, habuerit in principio aliquot cifras, multiplicatio admodum facilis erit. Abiectis enim omnibus cifris illis, multiplicandi erunt reliqui numeri inter ſe, & producto numero apponendæ ordine omnes illæ cifræ abiectæ. Vt ſi multiplicandus ſit numerus 3406. per 4000. reiectis cifris 000. multiplicetur datus numerus per 4. & numero producto 1 3 6 2 4. apponantur eædem cifræ, hoc modo. 13624000. Sic etiam, ſi multiplicanda ſint 3040000. per 203000. reiectis 7. cifris ad dextram horum numerorum poſitis, multiplicentur reliqui numeri 304. & 203. inter ſe, & producto numero 61712. apponantur reiectæ illæ ſeptem cifræ, hoc modo. 617120000000.

Hinc fit, ſi numerus aliquis multiplicandus ſit per 10. vel 100. vel 1000. vel 10000. &c. addendas eſſe illi numero ad dextram tot cifras, quot continentur in numero multiplicante, ſine vlla alia multiplicatione: quia reiectis cifris, ſupereſt ſola vnitas, quæ numerum datum multiplicans eundem numerum producit. Vt 5067. multiplicata per 10. faciunt 50670. Multiplicata autem per 100000. faciunt 506700000. Ita quoq; 3000. multiplicata per 100. faciunt 300000. &c.

DIVISIO INTEGRORVM NVMERORVM.

CAPVT V.

Diuiſio quid.

Quotiens quid.

DIVISIO eſt diſtributio propoſiti numeri in partes ab altero numero dato denominatas. Vt diuiſio numeri 36. per 9. eſt diſtributio eius in nonas partes, nempe à 9. denominatas; quarũ quidem ſingulæ quaternas vnitates continebunt: ita vt 4. ſit numerus ex hac diuiſione productus, qui Quotiens dici ſolet, propterea quod indicat, quoties numerus 9. qui diuidens, ſiue diuiſor appellatur, in diuidendo numero 36. contineatur. Indicat enim contineri quater, toties nimirum, quoties numerus Quotiens 4. vnitatem continet. Ex quo fit, Diuiſionem ita quoque deſcribi poſſe. Diuiſio eſt inuentio numeri, qui toties vnitatem contineat, quoties numerus diuidendus diuiſorem continet. Vt in propoſito exemplo perſpicuum eſt.

Quo pacto numeri in diuiſione ſint collocandi.

In diuiſione ſcribitur diuiſor ſub numero diuidendo, non quidem ponendo primam figuram ſub prima, & ſecundam ſub ſecunda, &c. vt in additione, ſubtractione, & multiplicatione factum eſt, ſed contrario ordine. Ponenda enim hic eſt vltima figura diuiſoris ſub vltima figura diuidendi numeri, & penultima ſub penultima, &c. Vt ſi diuidendus ſit numerus 7809. per 47. collocandi erunt numeri, vt in appoſito exemplo apparet.

7809
47

Quod ſi vltima figura diuiſoris maior fuerit vltima figura numeri diuidendi, collocanda erit vltima figura diuiſoris ſub penultima figura numeri diuidẽdi, & penultima ſub antepenultima, &c. vt in hoc exemplo eſt manifeſtum. Idem faciendum eſt, ſi vltima figura diuiſoris æqualis fuerit vltimæ figuræ numeri diuidendi, ſed penultima maior quam penultimæ: vel ſi & vltima vltimæ, & penultima penultimæ fuerit æqualis, ſed antepenultima diuiſoris maior, quã antepenultima numeri diuidendi: Vel denique, quotieſcunque diuiſor maior fuerit eo numero, quem tot figuræ vltimæ numeri diudendi exprimunt, quot figuris diuiſor ſcribitur. Quæ omnia in his duobus prioribus exemplis hic poſitis manifeſta ſunt. Quod ſi diuiſor æqualis fuerit illi numero, quem tot figuræ numeri diuidendi exprimunt, quot figuris diuiſor ſcribitur, collocandus erit diuiſor ſub eo numero, vt in poſteriore tertio exemplo factum eſſe vides.

37800
47

46800.	476047.	4793.
47	4762	47

Diuiſio quomodo fiat.

In Quotiente non poteſt poni maior numerus quã 9.

Reſiduus numerus ſemper debet eſſe minor diuiſore.

Ita autem diuiſio fiet. Primum quæratur, quoties diuiſor in numero ſibi ſupraſcripto contineatur, & numerus indicans, quoties continetur, ad dexteram numeri diuidendi poſt lineam hanc curuam (ſcribatur; atq; hic numerus (qui ſemper vnica figura ſcribitur, nunquam enim maior numerus, quam 9. poni poteſt in Quotiente; etiamſi diuiſor videatur ſæpius aliquando contineri in numero ſupraſcripto, quam nouies, vt in exemplis patebit) in diuiſorem multiplicetur, productuſque numerus (qui ſeorſum ſcribendus non eſt, ſed memoria retinendus) ex ſupraſcripto numero ſubtrahatur, vt in ſubtractione docuimus, ſcribendo ſingulos numeros reſiduos ſupra figuras, à quibus facta eſt ſubtractio, deletis prius hiſce figuris vna cum diuiſore. Numerus autem totus reſiduus ſupra diuiſorem notatus minor eſſe debet diuiſore, alias erratum eſſet. Id quod etiam in aliis reſiduis obſeruandum erit.

Deinde promouendus erit diuiſor dextram verſus in proximum locum, & iterum quærendum, quoties in numero ſibi ſupraſcripto contineatur, & reliqua facienda, vt prius. Quod ſi in aliqua promotione diuiſor maior fuerit numero ſupraſcripto, ita vt nec ſemel quidem in eo contineatur, ſcribenda erit figura o. poſt illum numerum, quem poſt lineam curuam ſcribendum eſſe diximus, & diuiſor delendus, iterumque promouendus ad proximum locum, & quærendum, vt prius, quoties in numero ſupraſcripto contineatur, &c. Atque ita ſemper promouendus erit diuiſor, donec nullus locus in numero diuidendo ſuperſit, in quem diuiſor poſſit promoueri. Verum hæc exemplis fient planiora.

Quomodo numerus per vnicã figuram diuidatur.

Qui numerus dicatur ſupra diuiſorem poſitus.

Sit primum diuidendus numerus 76048. per vnicam figuram, vt per 8. Primom inuenio diuiſorem 8. contineri in numero ſupraſcripto 76. nouies. Dicitur autem ille numerus ſupra diuiſorem eſſe ſcriptus, qui exprimitur figura ſupra primam figuram diuiſoris poſita, & omnib. aliis verſus ſiniſtrã, ſi quæ ſint, vt in dato exemplo numerus ſupra diuiſorẽ poſitus eſt 76. Porro ex tabula Pythagorica, quæ ſupra poſita eſt, cognoſces facile, qnoties figura diuiſoris in ſupra poſito numero contineatur. Si enim figuram diuiſoris ſumas in vertice tabulæ, & in eius linea, deorſum deſcendendo, accipias numerum ſupra poſitum, vel, ſi is non inuenitur, eo proximè minorem, indicabit figura ei reſpondens in ſiniſtro latere, quoties figura diuiſoris in numero ſupraposito

Quo pacto ex tabula Pythagorica cognoſcatur, quoties figura diuiſoris in ſuprapoſito numero contineatur.

to contineatur. Vt in dato exemplo, ſub figura 8. non reperitur numerus 76. ſuprapoſitus: ſi igitur accipiatur 72 proximè minor, reperietur in ſiniſtro latere figura 9. Nouies ergo continetur figura 8 in 76. atque ita de cæteris. Pono igitur 9. poſt lineam curuam, & multiplico 9. per 8. dicendo, octies 9 faciunt 72. quæ ſubtrahenda ſunt ex numero 76. ſupra diuiſorem poſito, hoc modo. Subtractis 2. ex 6. remanent 4. Deleta igitur figura 8. in diuiſore, & figura 6. in numero diuidendo, pono 4. ſupra 6. Subtractis item 7. ex 7. nihil remanet. Deleta igitur figura 7. nihil pono ſupra 7. quia poni deberet cifra, quæ ſuperuacanea eſſet, eo quod illam nulla alia figura ſequatur verſus ſiniſtram. Atque ita abſoluta eſt vna operatio diuiſionis, remanetque hic nnmerus 4048. vt in propoſito exemplo vides.

4
76048 (9
8

Deinde promoto diuiſore in præcedentem locum ſub 0 vt hic vides in ſecundo exemplo, video diuiſorem 8. in numero ſupraſcripto 40. contineri quinquies. Pono igitur 5. poſt figuram 9. iam inuentam, vt in tertio exemplo vides, & dico; quinquies 8. (multiplicando nimirum figuram 5. inuentam per diuiſorem) faciunt 40. quæ ſubtracta ex numero 40 ſupra diuiſorem poſito nihil reliquunt. Deleta igitur figura 8. in diuiſore, & figuris 0. & 4. in numero diuidendo, abſoluta erit ſecunda operatio diuiſionis, remanebitq; hic numerus 48. vt in eodem tertio exemplo apparet.

4
76048 (9
88

4
76048 (95
88

Rurſus diuiſore promoto in præcedentem locum ſub 4. vt hic in quarto exemplo cernis, reperio diuiſorem 8. nec ſemel quidem contineri in ſupraſcripto numero 4. Pono igitur 0. poſt figuram 5. vltimo inuentam, vt in quinto exemplo factum eſt. Et quoniam figura 0. multiplicata per diuiſorem nihil producit, nihil ſubtrahendum erit ex numero 4. ſupra diuiſorem poſito. Deleto igitur diuiſore, abſoluta erit tertia operatio diuiſionis, remanebitque numerus 48. vt in hoc eodem quinto exemplo manifeſtum eſt.

4
76048 (95
888

4
76048 (950
888

Poſtremo, promoto diuiſore in præcedentem locum ſub 8. vt hic in ſexto exemplo cernitur, inuenio diuiſorem 8. in numero 48. ſupraſcripto contineri ſexies. Pono igitur 6. poſt figuram 0. vltimo repertam, vt hic in 7. exemplo factum eſt, & dico; ſexies 8. (multiplicando nimirũ figuram 6. inuentam in diuiſorem) faciunt 48. quæ ſubtracta ex numero 48. ſupra diuiſorem poſito nihil relinquunt Deleta igitur figura 8. in diuiſore, & figuris 8. & 4. in numero diuidendo, abſoluta erit tota diuiſio, cum nullus alius locus ſuperſit in numero diuidendo, in quem diuiſor poſſit promoueri; nihilque in diuiſione ſupererit. Itaq; totus quotiens numerus eſt 9506.

4
76048 (950
8888

4
76048 (9506
8888

Poſui tot exempla in hac diuiſione, vt diſtinctius appareret, quidnam in qualibet operatione relinquatur, & quid deleatur; quamuis ſolum extremum ſit inſtar omnium, ita in operatione neceſſe non ſit alia exempla depingere, ſed ſatis ſit, ſi vltimum deſcribatur.

Quotiens quot figuras habeat.

Vides igitur, Quotientem tot habere figuras, quoties diuiſor ſub numero diuidendo poſitus eſt. Id quod in omnibus aliis diuiſionibus, etiam per plures figuras inſtitutis, euenit. Semper enim tot figuras habebit Quotiens, quoties totus diuiſor ſub numero diuidendo ponitur.

Quomodo numerus per plures figuras diuidatur.

Sit deinde numerus 1832487. diuidendus per numerum 469. qui non vna, ſed pluribus figuris ſcribitur. Hic vt ſciatur, quoties diuiſor in numero ſupraſcripto contineatur, (eſt autem in hoc exemplo numerus 1832. ſupra diuiſorem poſitus.) non eſt id de toto diuiſore inquirendum, ſed ſatis eſt, ſi inueſtigetur, quoties vltima eius figura, qualis hic eſt 4. contineatur in numero ſuprapoſito,

42
685
1832487 (3
469

Qui numerus dicatur ſupra quamcunq; figuram diuiſoris eſſe poſitus.

(Dico autem etiam hic illum numerum ſupra vltimam figuram diuiſoris, vel ſupra quamcunq; aliam, eſſe poſitum, qui exprimitur figura ſupra eam ſcripta, & omnibus aliis verſus ſiniſtram, ſi quæ ſint. Vt in dato exemplo, ſupra figuram 4. poſitus eſt numerus 18. ſupra 9. autem numerus 1832. qui hic eſt 18. hac tamen adhibita cautione, vt non ſemper in Quotiente ponatur figura tot vnitatum, quoties vltima diuiſoris figura in nnmero ſupra eam poſito continetur, ſed diligenter curetur, vt ea figura ponatur, quæ in totum diuiſorem multiplicata eo ordine, quem iam præſcribemus, talem numerum producat, qui & ex numero ſupra diuiſorem poſito ſubtrahi poſſit, & ſubtractus relinquat numerum (ſi quem relinquas) diuiſore minorem. Itaque (vt ad exemplum propoſitũ veniamus) quamuis vltima figura diuiſoris, quæ eſt 4. cõtineatur in ſuprapoſito numero 18. quater, tamen quia figura 4. multiplicata in totum diuiſorem producit maiorem numerum, quam 1832. qui ſupra diuiſorem poſitus eſt, ita vt ex ſuprapoſito numero ſubtrahi non poſſit, non pono 4. in Quotiente, ſed 3. Quod ſi hæc figura 3. multiplicata in totum diuiſorem produceret maiorem etiam numerum, quam 1832. ponerem 2. loco 3. Et ſi figura 2. multiplicata in diuiſorem adhuc maiorem numerum procrearet, ponerem 1. atque ita ſemper minuam figuram Quotientis vna vnitate, donec figuram inueniam, quæ in diuiſorem multiplicata numerum gignat, qui ex ſupraſcripto nnmero detrahi poſſit.

Quomodo ducenda ſit figura Quotientis inuenta in diuiſorem.

Sic autem multiplicanda erit figura Quotientis inuenta in totum diuiſorem. Primum ducenda eſt in vltimam figuram diuiſoris, & hoc productum ex numero ſupra vltimam figuram illam poſito auferendum, deleta prius illa figura diuiſoris, vna cum numero, ex quo facta eſt ſubtractio. Deinde multiplicanda eſt in figuram penultimam diuiſoris, productumque ex numero ſupra poſito detrahendum, vt prius. Atque hoc modo in omnes figuras diuiſoris multiplicanda eſt, &c. vt in noſtro exemplo. Ex 3. in 4. fiunt 12. quæ ita ſubtrahenda ſunt ex 18. numero ſuprapoſito. Demptis 2. ex 8. remanent 6 Deleta ergo figura 4. in diuiſore, & figura 8. in numero diuidendo, repono 6. ſupra 8. Dempto item 1. ex 1. nil remanet. Deleo igitur 1. Deinde ex 3. in 6. fiunt 18. quæ ex numero ſuprapoſito 63. ſic ſubducenda ſunt. Diſtantia 8. à 10. (Nam 8. ex 3. ſubtrahi nequeunt.) eſt 2. additis 3. fiunt 5. quæ pono ſupra 3. deleta prius figura 6. in diuiſore, vna cum figura 3. in numero diuidendo.

Addo

Addo autem 1. propter diſtantiam à 10. cuius mentio facta eſt, ad 1. (nempe ad denam numeri 18. qui ſubtrahitur.) fiuntq; 2. quæ ex 6. ablata relinquunt 4. quæ pono ſupra 6. deleta prius dicta figura 6. Tandẽ ex 3. in 9. fiant 27. quæ ſic ex ſupraſcripto numero 452. detrahuntur. Diſtantia 7. à 10. (quoniam 7. ex 2. detrahi non poſſunt) eſt 3. additis 2. fiunt 5. quæ pono ſupra 2. deleta prius figura 9. in diuiſore, & figura 2. in numero diuidendo. Addo autem 1. ad 2. (nempe ad denas numeri 27. ſubtrahendi) propter dictam diſtantiam à 10. facioque 3. quæ ablata ex 5. (nimirum ex ſecunda figura numeri 452. à quo ſubtractio fit) relinquunt 2. Pono ergo 2. ſupra 5. deleta prius dicta figura 5. Atque ita deinceps pergendum eſſet, ſi plures figuræ in diuiſore reperirentur. Abſoluta ergo hac ratione erit diuiſionis vna operatio, remanebitque hic numerus 425487. vt in exemplo ſupraſcripto vides.

Promoto iam diuiſore in præcedentem locum, ita vt ſingulæ figuræ diuiſoris locum vnum mutent, vt hic vides, intelligo vltimam figuram diuiſoris, nempe 4. in ſuprapoſito numero 42. contineri nouies. Pono igitur 9. poſt figuram 3. in priori operatione inuentam, vt in ſequenti exemplo patet, & dico. ex 9. in 4. fiunt 36. quæ ita ſubtraho ex numero 42. ſupraſcripto. Diſtantia 6. à 10. (quoniam 6. ex 2. ſubduci non poſſunt) eſt 4. additis 2. fiunt 6. quæ pono ſupra 2 deleta prius figura 4. in diuiſore, vna cum figura 2. in numero diuidendo.

```
  42
 655
2832487  (3
 4699
  46
```

Addo autem 1. ad 3. (nimirum ad denas numeri 36. ſubtrahendi.) propter dictam diſtantiam à 10. facioque 4. quæ ex 4. ablata nihil relinquunt. Deleo ergo 4. rurſus ex 9. in 6. fiunt 54. Detractis igitur 4. ex 5. remanet 1. Demptis quoque 5. ex 6. remanet etiam 1. Quare deleta figura 6. in diuiſore, vna cum figuris 5. & 6. in numero diuidendo, pono ſupra ſingulas figuram 1. Denique ex 9. in 9. fiunt 81. quæ ita ſubduco ex numero 114. ſuprapoſito. Dempto 1. ex 4. remanent 3. Pono ergo 3. ſupra 4. deleta prius figura 9. in diuiſore, & figura 4. in numero diuidendo. Diſtantia autem 8. à 10. (quia 8. ex 1. ſubduci nequeunt) eſt 2. ſi addatur 1. fiunt 3. quæ ſupra 1. colloco, deleta prius figura 1. Et propter dictam diſtantiam à 10. ſubtraho 1. ab 1. nihilque remanet. Deleo ergo 1. abſolutaque erit ſecunda diuiſionis operatio. Numerus autem remanens erit 3387. vt in exemplo patet.

```
    2
   63
  421
 6553
2832487  (390
 469999
  4666
   44
```

Rurſus promoto diuiſore in proximum locum, vt in proximo exemplo apparet, ita vt figura 9. locetur ſub 8. at 6. ſub 3. & 4. ſub 3. video vltimam figuram diuiſoris, puta 4. nec ſemel quidem in ſuprapoſito numero contineri, quare ſcribo 0. poſt figuram 9. proxime inuentam, deleoque diuiſorem. Abſoluta namque ita erit tertia operatio diuiſoris, remanebitque idem numerus 3387. qui in antecedente operatione reliquus fuit.

Poſtremo promoto diuiſore in primum locum, vt in eodem proximo exemplo manifeſtum eſt, reperio vltimam diuiſoris figuram 4. in ſupraſcripto numero 33. contineri ſepties tantum: quia ſi ſumeretur octies, non poſſet à numero 3387. ſuprapoſito fieri ſubtractio numerorũ productorum ex 8. in totum diuiſorem. Itaque pono in Quotiente figuram 7. poſt alias figuras inuentas, vt in hoc exemplo apparet & dico: Ex 7. in 4. fiunt 28. quæ hac ratione ex numero 33. ſuprapoſito demo. Diſtantia 8. à 10. (Nam 8. ex 3. non poſſunt ſubtrahi) eſt 2. ſi addantur 3. fiunt 5. Deleta ergo figura 4. in diuiſore, & figura 3. in numero diuidendo, pono 5. ſupra 3. Addo autem 1. ad 2. (nempe ad denas numeri 28. ſubtrahendi) propter dictam diſtantiam à 10. facioq; 3. quæ ex 3. ablata nihil relinquunt.

```
     2
    631
   42150
  655364
 2832487  (3907. 104/469.
  469999
   4666
    44
```

Quare deleta figura 3. rurſus dico: Ex 7. in 6. fiunt 42. quæ ex 58. numero ſuprapoſito ita tollentur. Detractis 2. ex 8. relinquuntur 6. Deleta ergo figura 6. in diuiſore, & figura 8. in numero diuidendo, pono 6. ſupra 8. Detractis item 4. ex 5. remanet 1. Deleta ergo figura 5. pono 1. ſupra eam, & tandem dico: Ex 7. in 9. fiunt 63. quæ ex 167. numero ſuprapoſito ſunt deducenda hoc modo. Demptis 3. ex 7. ſuperſunt 4. Deleta igitur figura 9. in diuiſore, & figura 7. in numero diuidendo, ſtatuo 4. ſupra 7. Detractis item 6. ex 6. remanet 0. Deleta ergo figura 6. pono 0. ſupra eam. Atque ita tota diuiſio abſoluta eſt, remanſerque numerus hic 104. qui poſt Quotientem 3907. collocandus eſt ſupra diuiſorem 469. interiecta linea inter ipſos, vt fiat numerus fractus, hoc eſt, partes 104. ex partibus 469. in quas totum aliquod concipitur eſſe diuiſum. Eodem pacto in aliis diuiſionibus ponitur reſiduum, ſi quod fuerit, ſupra diuiſorem, linea inter ipſos interiecta, vt fiat fractus numerus. *Quid agendum ſit cũ numero ex diuiſione relicto.*

Quando numerus minor per maiorem proponitur diuidēdus, quid agendum. Imo vero, quando minor numerus per maiorem proponitur diuidendus, ponendus erit numerus diuidendus ſupra diuiſorem, interiecta dicta linea inter ipſos, vt fiat numerus fractus; Vt ſi diuidendi ſint 48. aurei in 60. milites, fiet numerus fractus, quem hic vides eſſe appoſitũ, ita vt quilibet accipiat 48. partes ex 60. in quas vnus aureus intelligitur eſſe diuiſus. Quid autem ſit huiuſmodi fractus numerus, & quomodo eius valor exploretur tam in monetis, quam in ponderibus, aut menſuris, prout numerus diuidendus ſignificat monetam, aut põdera, menſuraſue, dicemus in tractatione fractorum numerorum.

$\frac{48}{60}$

Quomodo nonnulli ducant figurã Quotientis inuentam in diuiſorem. Sunt nonnulli, qui alio modo multiplicant figuram Quotientis inuentam in totum diuiſorem. Nam primum eam multiplicant in primam figuram diuiſoris, productumque ex numero ei figuræ ſuprapoſito auferunt: Deinde eandem ducũt in ſecundam figuram diuiſoris, & ita deinceps in reliquas, donec ad vltimam peruenerint, productoſque numeros ex ſupraſcriptis numeris tollunt. Vt ſi diuidendus ſit numerus 3387. per 469 (quemadmodum in vltima operatione ſuperioris exempli factum eſt.) poſtquam repererunt, vltimam figuram diuiſoris, nimirum 4. contineri ſepties in ſuprapoſito numero 33. (Nam octies comprehendi non poteſt, vt paulo ante diximus.) ponentes in Quotiente figuram 7. non dicunt, ex 7. in 4. fiunt 28. vt nos fecimus, ſed; Ex 7. in 9. fiunt 63. quæ ita ex ſuprapoſito nume-

```
  10
 2924
 3387  (7
  469
```

 ro 3387.

ro 3387. ſubtrahunt. Ablatis 3. ex 7. relinquuntur 4. Deleta ergo figura 9. in diuiſore, & figura 7. in numero diuidendo. ponunt 4. ſupra 7. Ablatis quoque 6. ex 8. remanent 2. ponenda ſupra 8. prius deleta. Deinde iterum dicunt. Ex 7. in 6. fiunt 42. quæ ita demunt ex ſuprapoſito numero 332. Ablatis 2. ex. 2. nihil relinquitur. Deleta igitur figura 6. in diuiſore vna cum figura 2. in numero diuidendo, ponunt 0. ſupra 2. Et quoniam 4. (nempe altera figura producti numeri 42.) auferri non poſſunt ex 3. ſumunt diſtantiam 4. à 10. nempe 6. cui addunt 3. vt fiant 9. ponenda ſupra 3. prius deleta. Propter dictam autem diſtantiam à 10. auferunt 1. ex vltima figura 3. ponuntque reliqua 2. ſupra 3. deleta prius figura 3. Poſtremo dicunt. Ex 7. in 4. fiunt 28. Subductis ergo 8. ex 9. remanet 1. ponenda ſupra 9. ſi prius deleatur in diuiſore figura 4. vna cum figura 9. in numero diuidendo. Ablatis item 2. ex 2. nil remanet: abſolutaque erit operatio. Hac porro ratione plerunque fit, vt non ſcribantur tot figuræ ſupra numerum diuidendum, quot in priori illo modo multiplicandi figuram Quotientis in diuiſorem ponuntur, quando ea ducitur primum in vltimam figuram diuiſoris, deinde in penultimam, &c, vt ſupra explicauimus. Id quod exemplis addiſces. Verum prior ille modus apud Mathematicos, & mercatores magis eſt in vſu, faciliusq; in eo error corrigi poteſt, ſi quãdo nimis magna figura poſita fuerit in Quotientẽ, vt mox docebimus.

In quo difficultas diuiſionis conſiſtat.

Hoc exemplo, quod explanauimus, plane percepto, nulla erit difficultas in diuidendo quouis numero per numerum quotcunque figurarum. Totus enim labor in eo poſitus eſſe videtur, vt cognoſcatur, quoties vltima figura diuiſoris in numero ſupraſcripto ſumi debeat, vt videlicet figura hæc Quotientis in omnes figuras diuiſoris multiplcata numerum procreet, qui ex ſuprapoſito numero ſubduci poſſit, numeruſque poſt hanc ſubtractionem relictus ſit diuiſore minor.

Quando in Quotiente ſumpta eſt figura nimis parua, vel magna quid agendum.

Quod ſi quando contingat, (id quod non raro ijs euenire ſolet, qui parum in hoc negotio ſunt exercitati) figuram talem in Quotiente poni, vt ea in omnes figuras diuiſoris multiplicata, productiſque ex numero ſupra diuiſorem poſito ſubductis, numerus relictus maior ſit diuiſore, vel certe non omnes producti ſubtrahi poſſint; ſi id quidem accidat in principio diuiſionis, facile error corrigetur, ſi accipiatur in Quotiente figura maior, aut minor, prout res exiget; quia tunc notæ adhuc ſunt figuræ numeri diuidendi ſupra diuiſorem poſitæ, etiam ſi deletæ ſint, ita vt facile ab ijs numeri ex multiplicatione nouæ figuræ Quotientis in figuras diuiſoris producti iterum poſſint ſubduci, præſertim ſi figuræ illæ numeri diuidendi deletæ ſcribantur ordine ſupra alias figuras deletas, diuiſor etiam ſub diuiſore deleto reponatur, ne figuræ deletæ negotium nobis faceſſant. Si vero in media operatione, vel prope finem id contingat, nõ tam facile errorem quis corriget, cum vix dignoſcãtur figuræ numeri diuidendi ſupra diuiſorem in illa operatione poſitæ ab aliis figuris; quippe quæ iam deletæ ſint, & cum aliis permixtæ, ac ſupra numerum diuidendum poſitæ. Quare ne tunc cogamur diuiſionem totam iterare, (quod neceſſario faciendum eſſe omnes docent. Id quod permoleſtum eſſet, præſertim ſi iam plures operationes diuiſionis forent abſolutæ.) excogitauimus huiuſmodi remedium.

Si figura Quotientis accepta ſit nimis parua, ita vt numerus relictus poſt ſubtractionẽ numerorum, qui ex multiplicatione illius figurę in omnes figuras diuiſoris producuntur, maior ſit diuiſore, ſubtrahemus diuiſorẽ ex numero relicto toties, quoties poſſumus, donec numerus relinquatur minor diuiſore, & quoties is ſubtractus erit, tot vnitates illi figuræ Quotiẽtis addemus. Si vero figura Quotiẽtis accepta ſit nimis magna, adeo vt poſt ſubtractionẽ aliquot numerorum, q ex multiplicatione illius figurę in aliquot figuras diuiſoris, pducuntur, in aliquẽ numerum productum incidamus, qui amplius ſubduci non poſſit, multiplicabimus figuram illam Quotientis in figuras diuiſoris deletas, quarum nimirum numeri producti ſubtracti iam ſunt, & productos numeros, additis prius figuris numeri relicti, ordine ſupra illas figuras diuiſoris ſcribemus, deletis prioribus figuris relictis. Hac enim ratione reſtituetur numerus, qui ſupra diuiſorem poſitus erat ante illam operationem. Quocirca eum iterum per diuiſorem (renouatum tamen, quoad figuras deletas, ne confuſionem pariant) partiemur, accipiendo aliam figuram in quotiente, quæ vna vnitate minor ſit, quam prior accepta. Et ſi hæc figura etiam nimis magna ſit, reſtituemus eodem modo numerum ſupra diuiſorem collocatum, & accipiemus aliam figuram minorem. Idque toties faciemus, donec figuram inueniamus, quæ in omnes figuras diuiſoris multiplicata numeros producat, qui & ſubtrahi poſſint, & numerum relinquant diuiſore minorem. Sed hæc omnia hoc propoſito exemplo fient magis perſpicua.

Exemplũ correctionis, quando nimis parua figura in Quotiente accepta eſt.

Sit diuidendus numerus 1623149. per 2899. Collocato diuiſore ſub numero diuidendo, ponamus, quempiam parum exercitatum accepiſſe in Quotiente figuram 4. Vnde ſi dicamus. Ex 4. in 2. fiunt 8. quibus detractis (eo modo, quem in proximo exemplo explicauimus) ex 16. remanent 8 Deinde ex 4. in 8. fiunt 32. quibus ſubductis ex 82. remanent 50. Rurſus ex 4 in 9. fiunt 36. quibus ſublatis ex 503. remanent 467. Deniq; ex 4. in 9. fiunt 36. quibus ex 4671. ablatis, relinquuntur 4635. qui numerus maior eſt diuiſore. Nimis ergo parua eſt figura accepta 4.

4
563
8075
1623149. (4
2899

Quare deleto reſiduo hoc, vna cum accepta figura 4. ponemus has figuras 16231. numeri diuidendi deletas ſupra alias figuras deletas, & diuiſorem deletum renouatum ſub diuiſore collocabimus, vt in proximo exemplo factum eſſe vides. Qua ratione reſtitutus erit totus numerus diuidendus 1623149. vna cum diuiſore, ac ſi nondum inchoata eſſet diuiſio. Ponemus ergo figuram 5. vna vnitate maiorem, quam 4. in Quotiente, vt in hoc altero exemplo vides, & dicemus. Ex 5. in 2. fiunt 10. quibus detractis ex 16. remanent 6. Deleta igitur figura 2. in diuiſore, & figura 1. in numero diuidẽdo, q decem ſignificat reſpectu figuræ 6. dicemus rurſum. Ex 5. in 8. fiunt 40. quibus ſubtractis ex 62. remanent 22. Item ex 5. in 9. fiunt 45. quibus ex 223. ſubductis, remanent 178. Denique ex 5. in 9. fiunt 45. quibus demptis ex 1781. relinquuntur 1736. qui numerus diuiſore minor eſt. Recte ergo accepta eſt figura 5.

6
423
5631
18075
1623149 (4
2899
2889

10
23
678
4236
5631
18075
1623149 (45
28999
2899
289

Sed

Sed vt exemplum etiam habeas, quando nimis magna figura accipitur, ponamus in Quotiente poſitam eſſe figuram 6. Hæc multiplicata in 2. facit 12. quibus ablatis ex 16. remanent 4. Deinde quia ex 6. in 8. fiunt 48. quæ ex 42. detrahi nequeunt, fit vt figura accepta 6. ſit nimis magna. Quamobrem deleto reſiduo hoc 4. vna cum accepta figura 6. ſcribemus figuras 1. & 6. numeri diuidendi deletas ſupra eaſdem, & figuram 2. in diuiſore deletam infra eandem, ita vt totus numerus diuidendus ab initio propoſitus, vna cum diuiſore reſtituatur, ac ſi diuiſio nondum eſſet inchoata, vt in hoc exemplo appoſito factum eſſe vides. Ponemus ergo, vt in ſequenti exemplo apparet, figuram 5. vna vnitate minorem, quam 6. in Quotiente, & dicemus. Ex 5. in 2. fiunt 10. quibus ſublatis ex 16. relinquuntur 6. Deleta igitur figura 2. in diuiſore, & figura 1. in numero diuidendo, quæ decem ſignificat reſpectu figuræ 6. dicemus rurſum. Ex 5. in 8. fiunt 40. quibus detractis ex 62. remanent 22. Item ex 5. in 9. fiunt 45. quibus demptis ex 223. remanent 178. Denique ex 5. in 9. fiunt 45. quibus ſubductis ex 1781. remanent 1736. Potuerunt ergo omnes numeri producti ſubduci, relictuſq; eſt numerus diuiſore minor. Quare recte accepta eſt in Quotiente figura 5. Ex his facile intelliges, quid agendum ſit, quando in principio diuiſionis accepta eſt figura nimis parua, aut magna. Nunc attende, quo pacto error corrigatur, ſi in media operatione nimis magna aut parua figura in Quotiente accepta ſit.

Exempli correctionis, quando nimis magna figura in Quotiente accepta eſt.

4
1623149 (6
2899

6
14
1623149 (6
2899
2

1
2
63
14786
1623149 (65
2899
2

Promoueatur ergo diuiſor in ſuperiori exemplo, in quo nimis parua figura ſumpta fuit in principio diuiſionis, vt ibidem cernis in tertia poſitione exempli. Fingamus autẽ, vltimam diuiſoris figuram 2. in ſuprapoſito numero 17. contineri ſepties, atque adeo in Quotiente poſt figuram 5. inuentam ſcribi 7. Quo poſito dicemus. Ex 7. in 2. fiunt 14. quibus detractis ex 17. remanent 3. quæ ſupra 7. ſcribo, deleta prius figura 2. in diuiſore, vna cum figuris 7. & 1. in numero diuidendo. Deinde rurſus dicemus. Ex 7. in 8. fiunt 56. quæ ex 33. auferri nequeunt. Eſt ergo figura 7. accepta nimis magna. Vt igitur reſtituatur numerus 17. à quo facta eſt ſubtractio, ſi forte is inter tot figuras deletas non internoſceretur, multiplicanda eſt figura 7. accepta in figuram 2. in diuiſore deletam, & producto addenda figura 3. ſupra dictam figuram diuiſoris poſita. Vt quoniam ex 7. in 2. fiunt 14. ſi addantur 3. fiunt 17. Deleta igitur figura 3. ſcribemus ſupra eam numerum 7. & ſupra figuram 1. deletam ponemus 1. atq; ita reſtitutus erit numerus 17. à quo facta eſt ſubtractio, vt in hoc appoſito exemplo apparet. Poſita autem figura 2. ſub figura 2. in diuiſore deleta, vt etiam diuiſor reſtituatur, vt in eodem hoc exemplo manifeſtum eſt, concipiamus vltimam figuram diuiſoris 2. contineri in 17. non ſepties, ſed ſexies, atq; adeo, deleta figura 7. in Quotiente, poni figuram 6. vt in exemplo hoc altero apparet. Quo poſito, dicemus. Ex 6. in 2. fiunt 12. quibus detractis ex 17. remanent 5. Deleta ergo figura 2. in diuiſore, vna cum figuris 7. & 1. in numero diuidendo, ſcribemus 5. ſupra 7. & dicemus. Ex 6. in 8. fiunt 48. quibus demptis ex 53. relinquuntur 5. Deleta igitur figura 8. in diuiſore, vna cum figuris 3. & 5. in numero diuidendo, ſcribemus 5. ſupra 3. & rurſus dicemus. Ex 6. in 9. fiunt 54. quibus ſubductis ex 56. remanent 2. Deleta ergo figura 9. in diuiſore vna cum numero 56. in diuidendo numero, ponemus 2. ſupra 6. ac tandem dicemus. Ex 6. in 9. fiunt 54. quæ ex 24. ſubtrahi nequeunt. Nimis ergo magna etiam eſt figura 6. in Quotiente. Quare vt ſciamus, quinam numerus ſupra diuiſorem collocatus fuerit, antequam hanc operationem inciperemus, multiplicabimus figuram dictam 6. in figuras diuiſoris deletas, vt dictum eſt. Vt ex 6. in 9. fiunt 54. Additis 2. quæ ſupra figuram diuiſoris 9. deletam poſita ſunt, fiunt 56. Deleta ergo figura 2. ſcribemus ſupra eam 6. & retinebimus 5. Deinde ex 6. in 8. fiunt 48. Additis 5. quæ ſeruauimus, fiunt 53. Scribemus ergo 3. ſupra 5. & retinebimus 5. Poſtremo ex 6. in 2. fiunt 12. Additis 5. quæ reſeruauimus, fiunt 17. quæ ſupra 15. collocabimus: atque ita reſtitutus erit nnmerus, qui ante hanc operationem ſupra diuiſorem poſitus erat. Reſtitutis autem tribus quoque figuris 2. 8. 9. in diuiſore deletis, atque deleta figura 6. in Quotiente, ponamus 5. loco illius, vt in hoc exemplo vides. Quoniam vero ex 5. in 2. fiunt 10. quibus ablatis ex 17 remanent 7. delebimus figuram 2. in diuiſore, vna cum figura 1. in diuidendo numero, quæ decem ſignificat reſpectu figuræ 7. & dicemus. Ex 5. in 8. fiunt 40. quib. ſubductis ex 73. remanent 33. Deleta ergo figura diuiſoris 8. vna cum figura 7. in numero diuidendo, ſcribemus 3. ſupra eam. rurſuſque dicemus. Ex 5. in 9. fiunt 45. quibus demptis ex 336.

1
233
678
4236
5631
15075
1623149 (457
28999
2899
289

1
17
233
678
4236
5631
28075
1623149 (457
28999
2899
289
2

15
175
233
6782
4236
5631
28075
1623149 (4576
28999
289

2
17
153
175
2336
6782
4236
5631
18075
1623149 (4576
28999
2899
289
289
2

remanent 291. Deleta igitur figura diuiſoris 9. vna cum numero diuidendo 336. ponemus loco illius 291. & tandem dicemus. Ex 5. in 9. fiunt 45. quibus ſubtractis ex 2914. relinquuntur 2869. qui numerus diuiſore minor eſt. Recte ergo accepta eſt figura 5.

Promoto tandem diuiſore in proximum locum, nimirum in vltimum, vt in præcedenti exemplo vides, cogitemus vltimam diuiſoris figuram 2. in ſupraſcripto numero 28. contineri ſepties. Poſita igitur figura 7. in Quotiente, vt in hoc altero exemplo appoſito vides, dicemus. Ex 7. in 2. fiunt 14. quibus ablatis ex 28. remanent 14. Item ex 7. in 8. fiunt 56. quibus detractis ex 146. remanent 90. Item ex 7. in 9. fiunt 63. quibus ſubductis ex 909. relinquuntur 846. Item ex 7. in 9. fiunt 63. quibus demptis ex 8469. remanent 8406. qui numerus maior eſt diuiſore; & proinde figura accepta 7. nimis parua eſt.

2
38
279
1536
2751
2336
6782
4236
5631
280759
2623249 (45765
289999
28999
289
289
228

Quare ſubtrahemus diuiſorem ex dicto reſiduo, quoties poſſumus, & tot vnitatibus maiorem figuram, quam 7. ſcribemus in Quotiente, quoties diuiſor detractus fuerit. Ita autem diuiſorem detrahemus in hoc ſequenti exemplo, reſtituto prius diuiſore. Ablatis 2. ex 8. remanent 6. Item demptis 8. ex 64. remanent 56. Item ſubductis 9. ex 560. remanent 551. Tandem detractis 9. ex 5516. remanẽt 5507. qui numerus adhuc maior eſt diuiſore. Detractis igitur 2. ex 5. remanent 3. Demptis autẽ 8. ex 35. remanent 27. Item ſubductis 9. ex 270. remanent 261. Deniq; ſubtractis 9. ex 2617. relinquuntur 2608. qui numerus minor iam eſt diuiſore. Quia ergo bis detractus eſt diuiſor, ſcribemus in quotiente, deleta prius figura 7. numerũ 9. duab. videlicet vnitatibus maiorem, quã 7. Itaq; totus numerus Quotiens eſt 559. Coacti autem ſumus rẽ tot exemplis exponere, vt clarius intelligeretur, q̃d in ſingulis operationib. relinquatur, quãuis ſolum hoc vltimũ inſtar ſit omniũ. Et licet tot verbis remedium iſtud expoſuerimus, vſus tamen facile docebit, rem eſſe breuiorem ac faciliorem, quam vt verbis exprimi poſſit.

8
19
24
364
1790
1538
2751
2338
6782
42360
36318
2807596
2623249 (457657
289999
28999
289
289
228

Hoc ergo remedium, ſi adhibeatur, quotieſcunq; in Quotiente figura maior, aut minor, quam oportet, ſumpta fuerit, incredibile eſt, quam expedite numerus quilibet per quemcunque numerum diuidatur: quia hac ratione non opus eſt, vt ſimus nimis anxii, qualem figurã in quauis operatione ſcribere debeamus in Quotiente, cum illo remedio errorem, ſi quis commiſſus erit, ſine vllo fere labore corrigere poſſimus: ita vt hic modus diuidendi, quem hactenus præſcripſimus, ſit inter omnes, qui ab aliis auctoribus explicari ſolent, præſtantiſſimus, atque expeditiſſimus, ac propterea ſumma diligentia, & cura adhibenda, vt in eo ſeſe exerceat is, qui in arte ſupputandi cupit eſſe excellens, & præſtans.

Facilior ratio diuiſionis.

Sed quia, ſi prædictum remedium adhibeatur, diuiſio in nimis magnam molem excreſcit, vti poterimus hoc alio artificio. Abſoluta prima operatione diuiſionis, ſcribatur reſiduum ſeorſum vna cum ſequente figura numeri diuidendi, & ſub hoc numero diuiſor reponatur, incipiendo ab vltima figura ad dextram, & verſus ſiniſtram procedendo: Ac rurſus ſecunda operatio diuiſionis expediatur; qua expedita, reſiduum iterum ſeorſum ſcribatur, cum inſequenti figura numeri diuidendi, atq; ita deinceps vſq; ad finem. Hac enim ratione omnis confuſio figurarum deletarum vitabitur. Nam quando in aliqua harum partialium diuiſionum pro Quotiente ſumpta fuerit figura nimis magna, aut parua, facile error corrigetur, ſi illa partialis diuiſio repetatur, quod moleſtum non erit, cum opus non ſit totam diuiſionem ab initio repetere. Exemplum habes in diuiſione numeri 2596860019. per 38748. Vt autem ſcias, quamnam figuram numeri diuidendi poſt quodlibet reſiduum ſcribere debeas, recte feceris, ſi ſub vltima figura primæ operationis, vt in dato exemplo ſub 6. punctum poſueris, vt indicet in ſecunda operatione aſſumendam eſſe figuram poſt illud punctum. Sub hac figura aliud punctum eſt ſignandum, vt ſignificet in tertia operatione ſumendam eſſe figuram poſt illud punctum, &c. veluti hic obſeruatum eſſe vides.

2
3
5
66
87
195
246
384
1790
15360
17511
23360
67821
423608
563167
2807596
2623249 (4576579
289999
28999
2899
289
228
28

Opera-

Operatio. I.

2 1
3729
72448
259686 (6 *Diuidendus* 2596860019
38748 ....
Operatio 2. *Diuiſor* 38748
7
284
65004
271980 (7
38748
Operatio 3.
7440 (0
38748

Operatio 4.

3565
46763
74402 (1
38748
Operatio 5.
7
2880
84277 *Totus Quotiens.* 67019 $\frac{7807}{38748}$
356539 (9
38748

Probatio per 9. totius exempli.

1
3 X 5
1

Poſitis ergo ordine omnibus Quotientibus, habebitur totus Quotiens 67019. Habet hoc artificium commoditatem hanc, quod ſi probatio non ſuccedat ex ſententia, non neceſſe ſit totam diuiſionem repetere, ſed ſatis eſt, vt ſingulæ operationes, quæ paucæ ſunt, examinentur, & illa in qua error fuerit deprehenſus, repetatur. Atq; hoc artificium facile eſt, & expeditum, ideoq; à tyronibus adhibendum cenſeo.

Quomodo alij diuiſionem abſoluant.

Nam quod alii multiplicent figuram in Quotiente poſitam in totum diuiſorem, productumq; numerum ſub diuiſore collocent, (prima figura poſita ſub prima, & ſecunda ſub ſecunda, &c.) vt eum ex numero ſupra diuiſorem poſito detrahant, res eſt certa illa quidem, ac facilis, ſed quæ longiorem efficiat diuiſionem, quam par eſt, eumq;, qui diuidit, non parum remoretur. Vt enim numerum hunc verbi gratia, 40689. per 1298. diuidant, poſtquam in prima operatione poſuerunt in Quotiente figuram 3. multiplicant eam in diuiſorem, primum quidem in figuram 8. dicendo. Ex 3. in 8. fiunt 24. ſcribunt ergo 4. ſub 8. & ſeruant 2. Deinde ex 3. in 9. fiunt 27. Additis 2. quæ ſeruata ſunt, fiunt 29. Poſitis ergo 9. ſub 9. ſeruant 2. &c. Poſt hæc, deleto diuiſore, auferunt 4. ex 8. collocantq; reſiduum 4. ſupra 8. deletis prius figuris 4. & 8. &c. Promoto deinde diuiſore, progrediuntur eodem modo. Quod tamen nos breuius abſoluimus, cum numerum productum non ſcribamus ſub diuiſore. Habet tamen modus iſte hanc commoditatem, quod ex ipſa operatione facile intelligatur, num figura accepta in Quotiente ſit nimis magna, nec ne. Nam ſi productus numerus ex multiplicatione figuræ illius in diuiſorem ſubtrahi poſſit ex numero ſupra diuiſorem poſito, numerumque relinquat diuiſore minorem, figura illa recte accepta eſt; ſi minus, erratum eſſe, dubitandum non eſt.

45
2741
40689 (31
22988
3894
229

Commoditas in hoc modo diuidendi.

Alia ratio diuiſionis facilis.

Fiet autem hic modus expeditior, ſi pro diuiſore ponatur, productus numerus ex figura Quotientis in diuiſorem, fiantq; partiales diuiſiones, vt paulo ante diximus, vt hic in eodem exemplo patet.

Operatio 1.	*Operatio 2.*	*Operatio 3.*
259686 (6	271980 (7	7440 (0
232488	271236	
27198	744	

Operatio 4.	*Operatio 5.*
74401 (1	356539 (9
38748	348732
35653	7807

Diuidendus 2596860019
Diuiſor 38748
Quotiens 67019

Verbi g. in prima operatione diuidendus eſt numerus hic 259686. Si igitur ſub ipſo ſcriberetur diuiſor, caderet figura 8. ſub 6. & figura 3. ſub 5. Et quia 3. in 25. numero ſuprapoſito cõtinentur ſexies, (nam figura 7. eſſet nimis magna) dicemus, ex 6. in 8. fiunt 48. ponemus 8. ſub 6. ſeruando 4. Deinde ex 6. in 4. fiunt 24. additisq; 4. quæ ſeruauimus, fiunt 28. Poſitis ergo 8. ſub 8. ſeruentur 2. & ſic deinceps, donec figura Quotientis in omnes figuras diuiſoris ducta ſit. Facta autem ſubtractione, fit reſiduum 27198 &c. In tertia operatione, quia numerus diuidendus 7440. minor eſt diuiſore, poſita eſt figura 0. in Quotiente. Quod ſi quando productus numerus maior ſit diuidendo in aliqua partiali diuiſione, figura Quotientis accepta fuit nimis magna: ideoq; repetenda erit illa diuiſio partialis. Hoc modo ſi diuiſio inſtituatur, nulla erit inter figuras deletas confuſio, licet futura ſit aliquanto longior illo modo, quem in principio tradidimus.

Alius modus abſoluendi diuiſionem.

Quod etiam alii diuiſorem prius per ſingulas figuras ſignificatiuas multiplicent, quemlibet productum numerum prope figuram multiplicantem ſcribendo, vt inter hos productos quærant numerum poſitum ſupra diuiſorem, eoque inuento, vel certe, ſi non inuenitur, proxime minore accepto, figuram multiplicaotem illi aſcriptam in Quotiente ponant, atque numerum acceptum ex numero ſupra diuiſorẽ poſito ſubducant; res etiam

iam facilis eſt, & commoda, præſertim tyronibus, & parum in hac arte exercitatis, ſed nimis longa, ac moleſta: Nam vt ver. g. diuidant hunc numerum 97086. per 37. collocant diuiſorem iuxta 1. Eundem deinde duplicatũ iuxta 2. triplicatum vero iuxta 3. &c. Poſtea inter hos numeros inquirunt numerum 97. ſupra diuiſorem poſitum, quem quoniam non inueniunt, accipiunt 74. proxime minorem, & figuram 2. è regione eius collocatam ponunt in Quotiente, auferuntque 74. ex 97. ſcribentes reſiduum 23. ſupra 97. deletis prius figuris 7. & 9. vna cum diuiſore. Promoto deinde diuiſore, quærunt inter eoſdem numeros hunc numerum 230. poſitum ſupra diuiſorem: quo non inuento, accipiunt proxime minorẽ 222. collocantque figuram 6. è regione eius poſitam in Quotiente, & denique numerum eundem 222. ex 230. ſubducunt. Atque hoc modo progredientes totam diuiſionem perficiunt. Sed quis non videt, diuiſionem hac ratione longius, quam par eſt, produci, præſertim, ſi diuiſor quatuor, aut quinq;, vel etiam pluribus figuris ſcribatur? Item quando Quotiens habet duas tantũ aut tres figuras, non video, cur fruſtra diuiſor in omnes nouem figuras ducatur.

```
 23
97086 (26
377
  3
```

37	1
74	2
111	3
148	4
185	5
222	6
259	7
296	8
333	9

Diuiſio per Dandam. Maxime tamen mihi probatur modus ille diuidendi, quem Itali (per Dandam) vocant, qui ſecuriſſimus eſt: quia ſtatim operatio corrigi poteſt, ſi forte in Quotiente poſita eſt figura nimis magna, vel parua, & nunquam figuræ in numero diuidendo delentur. Modus autem eſt iſte, aliquantulum ab eo, quo alii vtuntur diuerſus, ſed commodior meo iudicio, ac breuior. Sit ver. g. diuidendus numerus 1904639. per 2978. Poſito numero cum linea curua (ſcribatur diuiſor ſupra locum, vbi quotiens reponi ſolet, vt multiplicationes reddantur faciliores. Deinde ſub 6. vbi ſtaret figura 8. diuiſoris, ſi ſub diuidendo numero collocaretur, vt in principio huius cap. diximus, ponatur punctum ad denotandum, ibi inchoandam eſſe ſubtractionẽ. Igitur quoniam 2. vltima figura diuiſoris cõtinetur in 19. ſexies (q a nouies, vel octies, vel ſepties, totus diuiſor in numero 19046. contineri non poteſt) ponenda eſt figura 6. in Quotiente, quæ in diuiſorẽ ducenda eſt, & ſimul ſubtractio facienda, hoc ordine. Ex 6. in 8. fiunt 48. q̃ ex numero 19046. ſubtrahenda ſunt: ſed quia figura 8. maior eſt quam 6. auferemus 8. ex 10. reſiduoq; 2. addemus 6. ſummamque 8. ſub 6. collocabimus, ſeruando 5 in mente (nimirum 4. propter 40. & 1. propter 10. à quibus ſubtracta fuerunt 8.) Deinde ex 6. in 7. fiunt 42. & additis 5. ſeruatis, fiunt 47. ſubtractis ergo 7. ex 10. remanent 3. additiſque 4. fiunt 7. quæ ſub 4 collocentur, ſeruatis interim 5 propter 40. & 10. Item ex 6. in 9. fiunt 54. additiſque 5. ſeruatis, fiunt 59. ſubtractis autem 9. ex 10. (quia ex 0. ſubtrahi nequeunt) remanet 1. additaq; figura 0. fit 1. ſub 0. ſcribenda, ſeruatis interim 6. ꝓpter 50. & 10. Poſtremo ex 6. in 2. fiunt 12. additiſq; 6. q̃ ſeruauimus fiunt 18. quib. ſubtractis ex 19. remanet 1. ſub 9. ponẽda.

```
Diuiſor 2978
1904639. (639 1697/2978
  ...
1178..   |  17868
 2849.   |   8934   producti
 1697    |  26802
```

Hac abſoluta operatione, apponantur duo puncta ſub figura 3. vt indicent, inde incipiendam eſſe ſubtractionem. Et quia 2. continentur in 11. ter, ponenda eſt in Quotiente figura 3. (quia figura 5. aut 4. foret nimis magna) quæ iterũ in totum diuiſorem ducenda eſt eodem ordine, videlicet ex 3. in 8. fiunt 24. ſubtractis 4. ex 10. (quoniam ex 3. ſubtrahi nequeunt) remanent 6. additiſq; 3. fiunt 9. ſcribenda ſub 3. retentis mente 3. propter 20. & 10. Præterea ex 3. in 7. fiunt 21. additiſq; 3. quæ retinuimus, fiunt 24. Demptis autem 4. ex 8. ſuperſunt 4. ponenda ſub 8. retentis 2. propter 20. Rurſus ex 3. in 9. fiunt 27. additiſq; 2. quæ retenta ſunt fiunt 29 Demptis 9. ex 10. quia ex 7. tolli non poſſunt, remanet 1. additiſq; 7. fiunt 8. ſub 7. ſcribenda, reſeruatis interim 3. propter 20. & 10. Deniq; ex 3. in 2. fiunt 6. quæ cum 3. ſeruatis, faciunt 9. quibus ſublatis ex 11. remanent 2. reponenda ſub 1.

```
Diuiſor 2978
1904639 (639 1697/2978
  ...
1178..   |
 2849.   |  17868
 1697    |   8934   producti
         |  26802
```

His peractis, ponantur tria puncta ſub 9. vt ſciamus, inde inchoandam eſſe ſubtractionem. Et quia 2. continentur in 28. nouies, ſcribemus in Quotiente figuram 9 q̃ in totum diuiſorem ducetur hoc ordine. Ex 9. in 8. fiunt. 72. ſubtractis ergo 2. ex 9. ſuperſunt 7. ſcribenda ſub 9. retentis interim 7. propter 70. Deinde ex 9. in 7. fiunt 63. quæ cum 7. ſeruatis efficiunt 70. ſubducta ergo figura 0. ex 9. remanẽt 9. ſcribenda ſub 9. ſeruatis interim 7. propter. 70. Amplius ex 9. in 9. fiunt 81. additiſque 7. ſeruatis efficiuntur 88. Ablatis autem 8. ex 10. remanẽt 2. additiſque 4. fiunt 6. quæ ſub 4. ſcribantur, retentis in mente 9. propter 80. & 10. Poſtremo ex 9 in 2. fiunt 18. quæ cum 9. retentis efficiunt 27. quibus ablatis ex 28. remanet 1. ponenda ſub 8. Totus igitur Quotiens eſt 639. & vltimum reſiduum 1697. eſt illud, quod ex diuiſione remanet, quemadmodum etiam in ſuperioribus partialibus operationibus vltimum reſiduum 7807. eſt illud, quod in diuiſione ſupereſt.

Itaq; vt vides, tota difficultas huiuſmodi in eo poſita eſt, vt memoria retineantur denæ numerorũ productorum ex figura Quotientis in figuras diuiſoris. Et ſane modus hic pulcherrimus eſt, quia diſtincte videntur reſidua operationũata vt ſi forte in Quotiente accepta eſſet figura nimis magna vel parua, facile figura illa, vna cum reſiduo falſo deleri poſſit, aſſumique alia figura ſine vlla confuſione.

Quod ſi moleſtum videatur, retinere illas denas numerorũ productorum, ſcribi poſſunt producti ſeorſum. vt in exemplo vides ſub quotiente. Nam ex 6. in diuiſorem fit numerus 17868. & ex 3. in eundem diuiſorem numerus 8934. atque ex 9. in eundem diuiſorem numerus 26802. Ita enim facilis erit ſubtractio, cum præcedenti figuræ ſit interdum addenda ſola 1. quando nimirum ex 10. facta eſt ſubtractio. Neq; vero mihi placet, vt producti inter reſidua collocentur (quod nonnulli faciunt) quia confuſio ſuboriretur inter numeros, cum tamen ſubtractiones non multo faciliores reddantur.

Prima probatio diuiſionis per 9. Reſtat vt examen diuiſionis tradamus, quod triplex eſt. Primum fit per abiectionẽ 9. hoc pacto. Reiectis 9. ex diuiſore quoties fieri poteſt, vt in additione docuimus, ponatur reſiduum in ſiniſtra parte crucis. Reiectis item 9. ex Quotiente, quoties fieri poteſt, ponatur reſiduum in dextra parte crucis. Multiplicatis deinde hiſce duobus reſiduis inter ſe, & ex producto abiectis 9. quoties fieri poteſt, ponatur reſiduum hoc, ſi in diui-

ſione

ſione nihil remanſit, in ſuperiore parte crucis. Si autem in diuiſione reſiduum aliquod fuit, coniungendum eſt vltimum illud reſiduum cum figuris huius reſidui diuiſionis, & ſemper abijcienda 9. iſtudque reſiduum in ſuperiori parte crucis reponendum. Poſtremo reiectis 9. ex numero diuidendo, quoties fieri poteſt, ponatur reſiduum in parte inferiori crucis. Si enim reſiduum hoc æquale fuerit illi reſiduo in ſuperiori parte crucis collocato, recte peracta eſt diuiſio, ſin minus, non recte.

Itaque hæc diuiſio ita examinabitur. Reiectis 9. ex diuiſore 23. remanent 5. Abiectis item 9. ex Quotiente 176. remanent quoq; 5. Multiplicatis autem hiſce reſiduis 5. & 5. inter ſe, gignuntur 25. ex quibus ſi abiiciantur 9. remanent 7. quæ (quoniam nihil ex diuiſione relictum eſt) in ſuperiore parte crucis collocanda ſunt. Et quia reiectis 9. ex numero diuidendo 4048. relinquuntur etiam 7. recte peracta eſt diuiſio.

1
231
273
4048 (176
2333
22

7
5 X 5
7

Hæc autem alia diuiſio hac ratione examinabitur. Reiectis 9. ex diuiſore 236. remanent 2. Reiectis item 9. ex Quotiente 139. remanent 4. Multiplicatis autem hiſce reſiduis 2. & 4 inter ſe, fiunt 8. ex quibus non poſſunt reiici 9. Hæc ergo 8. ſi nihil remanſiſſet in diuiſione, collocanda eſſent in ſuperiori parte crucis: ſed quoniam ſuperſunt 130. dicemus 8. & 3. faciunt 11. Reiectis 9. remanent 2. Addito 1. fiunt 3. in ſuperiori parte crucis collocanda. Et quoniam, reiectis 9. ex numero diuidendo 4567 8. remanent quoq; 3. recte facta eſt diuiſio.

1
2
283
434
22030
45678 (193
23666
233
2

3
2 X 4
3

Secundum examen fit per abiectionem 7. vt in additione docuimus, dummodo ex reſiduo diuiſionis, ſi quod fuerit eodem modo reijciantur & 7. reſiduū adijciatur ad illud reſiduum, quod in examine per abiectionē 9. addendum eſſe diximus reſiduo diuiſionis, atque ex aggregato reijciantur 7. *Secunda probatio diuiſionis per 7.*

Vt prior proximarum duarum diuiſionum ita examinabitur. Reiectis 7. ex diuiſore 23. remanent 2. Item abiectis 7. ex Quotiente 176. remanet 1. Multiplicatis autem hiſce reſiduis 2. & 1. inter ſe, procreantur 2. in ſuperiori parte crucis reponenda, quia nihil ex diuiſione ſuperfuit. Quia vero reiectis 7. ex diuidendo numero 4048. remanent etiam 2. recte facta eſt diuiſio.

2
2 X 1
2

Poſterior vero diuiſio hoc modo examinabitur. Reiectis 7. ex diuiſore 236. remanent 5. Item abiectis 7. ex Quotiente 193. ſuperſunt 4. Multiplicatis autem duobus hiſce reſiduis 5. & 4. inter ſe, & ex producto 20. reiectis 7. relinquuntur 6. quæ, ſi nihil remanſiſſet in diuiſione, collocanda eſſent in parte crucis ſuperiore: ſed quoniam reliquus fuit numerus 130. ex quo ſi abiiciantur 7. ſuperſunt 4. quæ addita ad vltimum reſiduum ſeruatum 6. faciunt 10 à quibus ſi reijciantur 7. remanent 3. in ſuperiore parte crucis collocanda. Tantundem autem remanet, ſi ex diuidendo numero 45678. abijciantur 7. Recte ergo diuiſio facta eſt. Verum vtrumq; hoc examen fallax eſſe poteſt, ob rationem dictam in ſuperioribus.

3
5 X 4
3

Tertium examen, quod certum eſt, & cui nulla fallacia ſubeſſe poteſt, fit per multiplicationem. Si namq; diuiſor, & quotiens inter ſe multiplicentur, & numero producto addatur reſiduum diuiſionis, ſi quod fuerit, procreabitur numerus diuidendus, ſi erratum in diuiſione non eſt. Vt poſterior duarum proximarum diuiſionum ita examinabitur. Multiplicato diuiſore 236. per Quotientem 193. antequam producti numeri addantur inter ſe, ſcribatur ſub ipſis numerus reſiduus diuiſionis 130. prima nimirum figura ſub primo loco & ſecunda ſub ſecundo, &c. Si enim numeros productos & hoc reſiduum in vnam ſummam colligamus, vt in Multiplicatione docuimus, producetur numerus 45678. qui diuiſus fuit. *Tertia probatio diuiſionis per multiplicationem.*

236
193
———
708
2124
236
130
———
45678.

Expedit interdum, cum, facta operatione aliqua in diuiſione, dubitas, num in re aliqua peccaueris, necne, vt diuiſionem vſque ad eum locum perductam examines, ne fruſtra vlterius progrediaris, ſi forte iam error aliquis commiſſus ſit. Examinabis autem partem illam diuiſionis non aliter, ac alias diuiſiones, ſi omittas figuras numeri diuidendi ſub quibus nondum diuiſor poſitus eſt. Vt in hac diuiſione, facta prima operatione, eam examinabis per abiectionem 9. Reiectis 9. ex diuiſore 2898. remanet 0. Item reiectis 9. ex Quotiente 2. remanent 2. Multiplicatis autem inter ſe hiſce reſiduis 0. & 2. producitur 0. quæ cifra in ſuperiori parte crucis collocanda eſſet, niſi aliquid ex diuiſione ſupereſſet: ſed quoniam ſuperſunt 913. reijcienda ſunt, 9. ex hoc reſiduo. Quo facto, remanebunt 4. in ſuprema crucis parte collocanda. Ac tantundem remanet, ſi reijciantur 9. ex numero 6709. hactenus diuiſo, omiſſis figuris 456. ſub quibus nondum poſitus eſt diuiſor. *Expedit interdum, vt diuiſio nondum abſoluta examinetur.*

191
2123
6709456 (2
2898

4
0 X 2
4

Quod ſi diuiſor in principio habuerit aliquot cifras, facilis erit diuiſio, ſi à numero diuidendo remoueantur tot figuræ ad dexteram, quot cifras habet diuiſor, & reliquus numerus per diuiſorem, demptis prius illis cifris, diuidatur: Sed reſiduum huius diuiſionis, ſi quod erit, præponendum eſt verſus ſiniſtram figuris ablatis, vt fiat numerator fractionis; Denominator autem erit diuiſor totus vna cum cifris. Et ſi in diuiſione nihil remanſit, erunt figuræ ablatæ pro numeratore fractionis ponendæ. *Facilitas diuiſionis quando diuiſor habet in principio aliquot cifras.*

2
278
456
23946 (367 $\frac{7401}{11000000}$
3888
33

Vt

Vt ſi numerus 1394600769 3.diuidendus ſit per 3800000. auferemus ex eo priores ſex figuras 007693 ad dexteram, quot nimirum cifræ ſunt in principio diuiſoris; & reliquum numerum 13946.per 38.diuidemus, omiſſis illis ſex cifris, vt in hoc appoſito exemplo factum eſt. Quoniam vero in diuiſione nihil relictum eſt, ſcribemus ſupra diuiſorem numerum ablatum 7693. duæ enim illæ cifræ ad ſiniſtram nihil ſignificant, ac propterea omittendæ ſunt.

Rurſus ſi idem numerus 13946007693.diuidendus ſit per 300800000.auferemus ex eo priores quinque figuras 07693.quot videlicet cifræ ſunt in principio diuiſoris; & reliquum numerum 139460.per 3008.partiemur, omiſſis quinque illis cifris, vt factum eſt in hoc altero exemplo. Quia vero in diuiſione reliquus eſt hic numerus 1092. ſi eum verſus ſiniſtram præponamus hiſce figuris ablatis 07693.collocabimus ſupra diuiſorem totum hunc numerum 109207693. vt hic cernis.

```
  69
 21242
139460      (46 109207693/300800000
 30088
  300
```

Hinc fit, ſi vltima figura diuiſoris fuerit 1. & reliquæ omnes cifræ, Quotientem eſſe numerum diuidendum, ſublatis prius ab eo tot figuris verſus dexteram, quot cifræ ſunt in diuiſore; Numerator autem fractionis erit numerus ſublatus: & denominator ipſe diuiſor. vt ſi numerus 478092034 5. diuidendus ſit per 100000 erit Quotiens 47809 $\frac{20345}{100000}$. Sic etiam ſi numerus 9700203.diuidendus ſit per 10000. Quotiens erit 970 $\frac{203}{10000}$ atq; ita de cæteris.

Facilis aliquando fit diuiſio quādo diuidendus numerus habet aliquot cifras in principio.

Neque vero hoc prætereundum eſt, ſi numerus diuidendus habuerit aliquot cifras in principio, & antequam tota diuiſio abſoluatur, nulla figura ſignificatiua in diuiſione relicta fuerit, ponendas tunc eſſe poſt Quotientem omnes cifras numeri diuidendi nondum deletas. Vt ſi diuidendus proponatur numerus 1863000000. per 345. quoniam poſt ſecundam operationem nihil in diuiſione remanſit, ſi poſt inuentum Quotientem 54. ponantur quinque cifræ numeri diuidendi nondum deletæ, fiet totus Quotiens 5400000 abſolutaq; erit diuiſio.

```
  222
  338
1863000000   (5400000
  3455
   34
```

Additio, Subtractio, Multiplicatio & Diuiſio fundamenta ſunt omniū quæ in Arithmetica traduntur.

Ex his quæ de additione, ſubtractione, multiplicatione, diuiſioneq; numerorum integrorum dicta ſunt, omnia, quæ in vniuerſa Arithmetica traduntur, tanquam ex elementis pendent: adeo vt omnia per ea conficiantur, nihilque aliud in quæſtionibus Arithmeticis ſoluendis præcipiendum ſit, quam vt numeri vel addantur, ſubtrahanturue aut multiplicentur diuidanturue. Itaque niſi quis in quatuor illis operationibus Arithmeticis probe ſit exercitatus, fruſtra ſeſe ad alia, quæ tradituri ſumus conferet.

NVMERATIO FRACTORVM NVMERORVM.

CAPVT VI.

QVEMADMODVM in ſuperioribus numeros integros numerauimus, pluresq; propoſitos in vnam ſummam collegimus, atq; vnum ab altero ſubduximus. duos item quoſcunq; inter ſe multiplicauimus, & denique vnum per alterum ſumus partiti; ita in his, quæ ſequuntur, eadem efficiemus in numeris fractis, qui alio nomine Minutiæ, fractioneſue dici ſolent vulgares.

Numerus fractus ſiue fractio Minutiaue quid.

Eſt autem Fractio, Minutiaue, ſiue numerus fractus, vna pars, vel plures partes alicuius totius in plures æquales partes diuiſi. Vt ſi totum aliquod ſectum ſit in quinq; partes æquales, & quiſpiam ex illis ſumpſerit vnam, dicetur illa quinta pars numerus fractus. Sic etiam, ſi quis duas, tres, aut quatuor acceperit; dicentur duæ illæ, tres, vel quatuor quintæ partes numerus fractus.

Numerator & Denominator fractionis quid.

Conſtat quælibet Minutia duobus numeris, qui in ea proferenda exprimuntur. Primus dicitur Numerator, quia numerat, quot partes contineat fractio propoſita ex illis, in quas totum, cuius eſt fractio, diuiſum eſt. Alter appellatur Denominator, quia denominat illas partes fractionis, hoc eſt, indicat, in quotnam partes totum intelligitur eſſe diuiſum. Vt cum proponitur fractio continens tres quintas partes, Numerator eſt 3. quia ſignificat, in illa fractione contineri tres partes totius; Denominator vero eſt 5. quia indicat, tres illas partes non eſſe qualeſcunque, ſed quintas.

Fractio quanis quo pacto ſcribatur. & pronuncietur.

Scribitur autem quælibet fractio hoc modo. Denominator directo ſub Numeratore, interiecta lineola quadam inter vtrumque numerum collocatur. Vt tres quintæ partes hoc modo ſcribuntur $\frac{3}{5}$. pronunciaturque vterq; numerus in recto. primo tamen loco Numerator. Vt dicta Minutia ita proferenda eſt; Tres quintæ. Hæc vero $\frac{25}{48}$. ita, Viginti quinq; quadrageſimæ octauæ, ſignificatq;, totum aliquod diuiſum eſſe in quadragintaocto partes æquales, & vigintiquinq; ex illis acceptas eſſe.

Fractiones vnde oriantur.

Oriuntur plerunq; numeri fracti ex reſiduo diuiſionis integrorum numerorum. Quando enim aliquid in diuiſione remanſit, fit ex illo Numerator fractionis, cuius Denominator eſt diuiſor, vt ſupra diximus. Vt cum diuiduntur 46. per 7. Quotiens eſt 6. ſuperſuntq; 4. Fit ergo huiuſmodi fractio $\frac{4}{7}$. ita vt totus Quotiens ſit 6$\frac{4}{7}$.

Quando minor numerus per maiorem diuiditur, fit fractio.

Item quando minor numerus per maiorem proponitur diuidendus, gignitur fractio, cuius numerator eſt numerus diuidendus, Denominator autem diuiſor. Vt ſi diuidenda ſint 4. per 7. fit fractio $\frac{4}{7}$. ſignificatq; 4. diuiſa eſſe per 7. ita vt Minutia hæc $\frac{4}{7}$. ſit ſeptima pars huius numeri 4. Pars inquam, denominata à diuiſore 7.

Fractio quæuis eſt pars Numeratoris à Denominatore denominata.

Quemadmodum enim diuiſis 12. per 3. inuenitur numerus 4. qui tertia pars eſt numeri diuiſi 12. Pars, inquam, à diuiſore denominata; ita etiam eum diuidimus 4. per 7. fit Quotiens $\frac{4}{7}$. qui ſeptima pars eſt numeri diuiſi 4. Pars inquam, denominata à diuiſore. Eadem ratione quælibet alia Minutia pars eſt numeratoris à denominatore denominata. Vt hæc Minutia $\frac{3}{4}$. eſt quarta pars ternarii. Nam ſi diuidantur 3. per 4. fit Quotiens $\frac{3}{4}$. Quare ſi ſumatur Minutia $\frac{3}{4}$. quater, efficientur $\frac{12}{4}$. quæ ternario æquiualent, vt ex iis, quæ paulo infra ſcribemus, manifeſtum erit. atq; ita de aliis.

ÆSTI-

ÆSTIMATIO SIVE VALOR FRACTORVM NVMERORVM.

CAPVT VII.

MINVTIÆ cuiuſuis æſtimatio, ſiue valor augetur, cum, Numeratore manente eodem, denominator minuitur: vel cum, Denominatore manente eodem, numerator augetur. Vt in his fractionibus $\frac{1}{6}. \frac{1}{5}. \frac{1}{4}. \frac{1}{3}. \frac{1}{2}.$ vel in his $\frac{1}{7}. \frac{2}{7}. \frac{3}{7}. \frac{4}{7}. \frac{5}{7}. \frac{6}{7}.$ quælibet poſterior priore maior eſt, vt ex ſequentibus patebit: & in prioribus quidem, manente ſemper eodem numeratore, denominator minuitur: in poſterioribus vero, eodem ſemper manente denominatore, numerator augetur.

Minutiarũ valor quo pacto augeatur.

Minutiæ vero cuiuſuis æſtimatio, ſiue valor minuitur, cum, Numeratore manente eodem, denominator augetur: vel cum, Denominatore manente eodem, Numerator minuitur. Vt in his fractionibus. $\frac{1}{2}. \frac{1}{3}. \frac{1}{4}. \frac{1}{5}. \frac{1}{6}$ vel in his $\frac{7}{8}. \frac{6}{8}. \frac{5}{8}. \frac{4}{8}. \frac{3}{8}.$ quælibet poſterior priore minor eſt, vt conſtabit ex ſeqnentibus: & in prioribus quidem, eodem ſemper numeratore manente, denominator augetur; in poſterioribus vero, eodem ſemper manente denominatore, numerator minuitur.

Minutiarũ valor quo pacto minuatur.

Minutiæ deinde quæcunq;, quarum vnius numerator ad ſuum denominatorem eandem habet proportionem, quam reliquarum numeratores habent ad ſuos denominatores, ſinguli ad ſingulos, inter ſe æqnales ſunt. Vt hæ minutiæ $\frac{1}{2}. \frac{8}{16}. \frac{50}{100}. \frac{400}{800}. \frac{500}{1000}.$ omnes inter ſe æquales ſunt; quia cuiuſuis numerator ad ſuum denominatorem proportionem habet ſubduplam, id eſt, dimidia pars eſt ipſius. Sic etiam $\frac{3}{4}. \frac{6}{8}. \frac{18}{24}. \frac{90}{120}.$ Nam cuiuslibet numerator ad ſuum denominatorem habet proportionem ſubſeſquitertiam, hoc eſt, tres quartas partes ipſius continet.

Minutiæ, quarũ numeratores ad denominatores eandem habẽt proportionem, æquales ſunt.

Quoniam vero, ſi duo numeri per eundem numerum multiplicentur, ſiue diuidantur, numeri producti eandem habent proportionem, quam duo illi numeri multiplicati, ſiue diuiſi; fit, vt multiplicatis, aut diuiſis Numeratore, & Denominatore per quemcunque numerum, procreetur alia minutia eiuſdem valoris, quamuis maiores, minoreſue numeros habeat. Vt propoſita hac minutia $\frac{6}{9}.$ ſi vterque eius numerus multiplicetur per 3. producetur minutia $\frac{18}{27}.$ eiuſdem valoris. Sic etiam, ſi vterque numerus per 3. diuidatur, fiet minutia $\frac{2}{3}.$ eiuſdem valoris. Et licet hæc omnia demonſtrari poſſint ex lib. 7. Eucl. contenti tamen erimus, ſi vno exemplo ex his duabus minutiis $\frac{2}{3}. \frac{6}{9}.$ deſumpto, in quo veritas huius rei perſpicue apparebit, rem illuſtremus. Nam ſi accipiatur numerus 9. qui quidem habet partes à denominatoribus dictarum minutiarum denominatas, nimirum tertiam, ac nonam, erunt duæ eius tertiæ partes æquales ſex nonis partibus eiuſdem. Cum enim tertia eius pars ſit 3. erunt duæ tertiæ partes 6. Item cum nona eius pars ſit 1. erunt quoque ſex nonæ partes 6. Æquales igitur ſunt hæ minutiæ $\frac{2}{3}. \frac{6}{9}.$ & ſic de aliis.

Si numerator, ac denominator cuiuſuis fractionis per quemcunq; numerũ multiplicetur, diuidaturue gignitur eiuſdem valoris fractio.

Quando porro numerator alicuius minutiæ denominatori eſt æqualis, æquiualet minutia illa vni integro. Vt quælibet harum minutiarum $\frac{2}{2}. \frac{6}{6}. \frac{20}{20}. \frac{1000}{1000}.$ conſtituit vnum integrum, hoc eſt, totum illud, quod in partes à denominatoribus denominatas diuiſum eſt: propterea quod in numeratore continentur omnes partes, in qnas integrum, ſeu totum eſt diuiſum.

Quæ minutia vni integro æquiualeat.

Quando vero numerator minutiæ minor eſt denominatore, minor eſt illa minntia vno integro, quales ſunt hæ minutiæ $\frac{2}{3}. \frac{4}{7}. \frac{10}{18}$ quia cuilibet tot partes à ſuo denominatore denominatæ deſunt ad integrum conſtituendum, quot vnitatibus numerator à denominatore abeſt. Vt huic minutiæ $\frac{2}{3}.$ deeſt $\frac{1}{3}.$ huic vero $\frac{4}{7}.$ deſunt $\frac{3}{7}.$ & huic $\frac{10}{18}.$ deeſt $\frac{8}{18}.$

Quæ minutia minor ſit vno integro.

Quando denique numerator minutiæ denominatore maior eſt, maior eſt illa minutia vno integro. qnales ſunt hæ minutiæ $\frac{4}{3}. \frac{24}{7}. \frac{200}{3}.$ quia in cuiuslibet numeratore plures partes continentur, quam ſint illæ, in quas totum, ſiue integrum diuiſum eſt.

Quæ minutia maior ſit vno integro.

Iam vero propoſitis duabus minutiis, vt cognoſcas, vtra illarum maior ſit, ſeruabis hanc regulam. Poſitis minutiis ordine, multiplica earum numeros in crucem, id eſt, numeratorem prioris in poſterioris denominatorem, & poſterioris numeratorem in denominatorem prioris, ponendo numeros productos ſnpra numeratores. Nam cuius numerator maiorem numerum produxerit, ea minutia maior erit. Quod ſi duo numeri producti fuerint æquales, æquales quoque erunt propoſitæ minutiæ. Vt in primo horum trium exemplorum ma-

16. 18.	42. 40.	48. 48.
$\frac{2}{3} \times \frac{6}{8}$	$\frac{7}{2} \times \frac{20}{6}$	$\frac{3}{4} \times \frac{12}{16}$

ior eſt poſterior minutia $\frac{6}{8}.$ quam prior $\frac{2}{3}.$ quoniam numerus 18. productus ex 6. numeratore poſterioris minutiæ in 3. denominatorem prioris, maior eſt, quam numerus 16. ex 2. numeratore prioris minutiæ in 8. denominatorem poſterioris productus. In ſecundo vero exemplo maior eſt minntia $\frac{7}{2}.$ quam $\frac{20}{6}.$ In tertio deniq; æquales ſunt minutiæ $\frac{3}{4}.$ & $\frac{12}{16}.$ vt ex multiplicationibus in crucem factis patet. Ratio huius regulæ eſt, quod, cum numeratores in crucem per denominatores multiplicati producunt æquales numeros, eadem proportio ſit nnmeratorum ad denominatores, vt conſtat ex propoſ. 19. lib. 7. Eucl. Quare vt ſupra diximus, æquales erunt minutiæ. Hinc fit, numeratorem illum, qui maiorem gignit numerum, ad ſuum denominatorem habere maiorem proportionem, ac proinde illam minutiam eſſe maiorem, vt ſupra dictum eſt. Sed vt exemplo etiam diſcas, maiorem eſſe minutiam $\frac{6}{8}.$ quam $\frac{2}{3},$ ſumamus numerum 48. qui habet partes à denominatoribus harum minntiarum denominatas, nempe octauam, & tertiam. Itaq; cum vna octaua pars huius nnmeri 48. ſit 6. erunt ſex octauæ, 36. Item cum vna tertia pars eiuſdem numeri ſit 16. erunt duæ tertiæ, 32. qui numerus minor eſt, quam 36.

Vtra duarum minutiarũ maior ſit, quo pacto cognoſcatur.

Quod ſi data minutia cuiuſpiam monetæ, vel ponderis, aut menſuræ maioris, cupiaſque valorem eius explorare in minori moneta, vel pondere, aut menſura, hoc eſt, reuocare eam ad minorem monetam, &c. facies id in hunc modum. Multiplica numeratorem per numerum, qui indicat, quoties moneta minor, ad quam reuocanda eſt fractio, in maiori continetur, productumque numerum per denominatorem diuide. Quotiens enim numerus valorem datæ minutiæ in minore illa moneta indicabit. Quod etiam de ponderibus, & menſuris intellige. Vt ſi data ſit hæc minutia aureorũ $\frac{4}{7}.$ quæ ſignificat, vt ſupra c. 6. diximus, quatuor aureos in

Valor minutiæ datæ quo pacto in minore moneta, pondere vel menſura explicetur.

ſeptem

Iulius, Baiochus, & Quatrinus apud Romanos quid ſignificet.

ſeptem æquales partes diſtributos, redigendaque ſit ad Iulios, Baiochos, & Quatrinos, (vtemur enim in hac noſtra Arithmetica exemplis monetæ Romanæ, in qua quatuor quatrini, cum Arithmeticam hanc primum conſcripſimus, efficiebant vnum baiochum, & 10. baiochi vnum Iulium, ac 10. Iulij vnum aureum nummum.) multiplicabimus numeratorem 4. per 10. quoniam 10. Iulij vnum aureum conficiunt, vt 4. illos aureos in 7. partes diuiſos redigamus ad 40. Iulios; numerumq; productum 40. per denominatorem 7. partiemur. Quotiens enim numerus dabit Iulios $5\frac{5}{7}$. Quod ſi hanc minutiam Iuliorum, $\frac{5}{7}$. quæ ſignificat 5. Iulios in 7. partes æquales diuiſos, ad baiochos velimus redigere, multiplicabimus quoq; numeratorẽ 5. per 10. quia 10. baiochi vnum etiam Iulium conficiunt, vt 5. illos Iulios in 7. partes æquales diſtributos redigamus ad 50. baiochos: productumq; numerum 50. per denominatorem eundem 7. diuidemus. Dabit enim Quotiens numerus baiochos $7\frac{1}{7}$. Si tandem minutiam hanc baiochorum, $\frac{1}{7}$. quæ ſignificat vnum baiochum diuiſum in 7. partes æquales, ad quatrinos velimus reducere, multiplicabimus numeratorem 1. per 4. quod 4. quatrini efficiant vnum baiochum, vt illum baiochum in 7. partes æquales diuiſum ad 4. quatrinos reducamus, numerumque productum 4. per denominatorem 7. partiemur, efficiemuſque $\frac{4}{7}$. vnius quatrini, hoc eſt, paulo plus, quam dimidium vnius quatrini. Itaque $\frac{4}{7}$. vnius aurei continent Iulios 5. Baiochos 7. & Quatrinos $\frac{4}{7}$. Si vero $\frac{4}{7}$. vnius aurei redigere ſtatim velimus ad baiochos, multiplicabimus numeratorem 4. per 100. quoniam 100. baiochi vnum aureum conſtituunt, vt 4 illos aureos in 7. partes diſtributos redigamus ad 4 0 0. baiochos, numerumque productum 4 0 0. per denominatorem 7. partiemur, efficiemuſq; baiochos $57\frac{1}{7}$.

Rurſus ſi explorandum ſit, quot paſſus, pedes, palmos, digitoſue contineant $\frac{5}{8}$. vnius milliarij Italici, ſtatuendo milliarium vnum conſtare 4000. paſſibus Geometricis, paſſum vero 5. pedibus, & pedem 4. palmis, palmum autem 4. digitis, & digitum 4. granis hordei; multiplicabimus numeratorem 5. per 1000. vt 5. milliaria in 8. partes æquales diſtributa redigantur ad paſſus 5000. productumq; numerum 5000. partiemur per denominatorem 8. efficiemuſq; 625. paſſus.

Sic etiam ſi $\frac{10}{13}$ vnius paſſus reducere velimus ad pedes, multiplicabimus numeratorem 10. per 5. productumque numerum 50. per denominatorem 13. partiemur, efficiemuſque pedes $3\frac{11}{13}$. Si rurſus hunc numeratorem 11. per 4. multiplicemus, numerumque productum 44. per denominatorem 13. diuidamus, efficiemus palmos $3\frac{5}{13}$. Item ſi hunc numeratorem 5. per 4. multiplicemus, productumq; numerum 20. per denominatorem 13. partiamur, inueniemus digitos $1\frac{7}{13}$. Tandem ſi numeratorem hunc 7. multiplicemus per 4. & numerum productum 28. diuidamus per denominatorem 13. reperiemus grana hordei $2\frac{2}{13}$. Itaque $\frac{10}{13}$. vnius paſſus continent pedes 3. palmos 3. digitum 1. & grana $2\frac{2}{13}$.

Item reducenda ſit minutia hæc, $\frac{3}{4}$. vnius libræ ad vncias. Quoniam 12. vnciæ vnam libram conſtituunt, multiplicabimus numeratorem 3. per 12. & productum numerum 36. per denominatorem 4. diuidemus, efficiemuſq; 9. vncias.

Poſtremò inquirendum ſit, quot Minuta contineantur in $\frac{5}{6}$. vnius Gradus. Quia 60. Minuta efficiunt 1. Gradum, multiplicabimus numeratorem 5. per 60. & productum numerum 3 0 0. per denominatorem 6. diuidemus, efficiemuſq; Minuta 50.

FRACTIONES FRACTORVM NVMERORVM.

CAPVT VIII.

Minutia minutiarũ vnde oriantur. Minutia Minutia quid, Minutia minutiarũ quomodo pronunciẽtur, & ſcribuntur.

NON ſolum res integra in quotuis partes æquales diuiditur, vt fractiones ſimplices, de quibus hic agimus, procreentur, verum etiam interdum ipſi fracti numeri intelliguntur in plures æquales partes diſtribui, ac ſi eſſent integræ quædam res. Vnde fractiones fractionum, fractorumue numerorum, ſiue Minutiæ minutiarum oriuntur. Vt quemadmodum cum accipio quatuor partes alicuius totius in ſeptem partes diſtributi, efficio hanc minutiam ſimplicem $\frac{4}{7}$. quæ ſignificat quatuor ſeptimas partes ipſius integri: ita etiam cum intelligo hanc fractionem ſimplicem $\frac{4}{7}$. diuiſam eſſe in quinque partes æquales, accipioque tres partes, facio minutiam minutiæ illius, nempe tres quintas partes quatuor ſeptimarum alicuius integri; ita vt prior in recto efferatur, ſcribaturque, ſicut minutiæ ſimplices, poſterior vero pronuncietur in obliquo, noteturque ſine interiectione lineæ, vt ab aliis diſtinguatur. Vt prædicta minutia minutiæ ita ſcribenda eſt $\frac{3}{5}$. $\frac{4}{7}$. pronunciaturque ſic. Tres quintæ quatuor ſeptimarum vnius integri. Hæc autem minutia minutiarum $\frac{2}{3}$. $\frac{3}{4}$. $\frac{1}{6}$. $\frac{1}{2}$. ita proferetur. Duæ tertiæ trium quartarum ex vna ſexta parte vnius dimidij alicuius integri: ſignificat autem ex dimidio alicuius integri ſumptam eſſe vnam ſextam partem illius dimidij in ſex æquales partes diſtributi; & ex hac ſexta parte in quatuor partes æquales diuiſa, acceptas eſſe tres quartas; ac demum ex his tribus quartis diuiſis in tres æquales partes ſumptas eſſe duas tertias. Eademq; ratio eſt in aliis.

Quo pacto autem æſtimatio, ſiue valor fractionum fractorum numerorum cognoſcatur, docebimus ad finem cap. 10. vbi eas ad ſimplices fractiones reuocabimus.

REDVCTIO FRACTORVM NVMERORVM AD minimos numeros, ſiue terminos.

CAPVT IX.

Cur minutia ad minimos terminos reducantur.

ACCIDIT nonnunquam, vt minutia aliqua ita magnis numeris ſcribatur, vt commode minoribus poſſit exprimi, non mutato eius valore, ac pretio. Vt hæc minutia $\frac{36}{72}$. æquiualet huic $\frac{1}{2}$. minimis, vt vides, numeris expreſſæ. Operæpretium eſt autem minutiam maioribus numeris ſcriptam ad minimos numeros, terminoſue reuocare, multas ob cauſas. Primum, quia facilius minutia quæuis minoribus numeris expreſſa intelligitur, quam maioribus numeris ſcripta. Quis enim non facilius percipit $\frac{1}{2}$. quam $\frac{36}{72}$ aut quam $\frac{500}{1000}$. aut quam $\frac{816}{1632}$. cum tamen omnes idem prorſus ſignificent? Deinde, quoniam facilior redditur operatio fractionum, ſi ad minimos terminos ſint reductæ, vt ex ſequentibus fiet perſpicuum. Tertiò, vt Mathematicorum libri, qui minutias ple-

runque minimis ſolent numeris notare, intelligantur. Si enim, verbi gratia, quis inueniat à quopiam ſcriptum, numerum hunc 2528. per 48. diuiſum facere Quotientem 52. $\frac{2}{3}$. ipſe vero hoc velit examinare, reperiet Quotientem 52 $\frac{32}{48}$ qui ab illo differre videtur, cum tamen idem ſit. Minutia enim hæc $\frac{32}{48}$. ad minimos terminos reducta facit $\frac{2}{3}$. Quare antequam iudicet, ſe, aut ſcriptorem illum erraſſe, quod videat eius minutiam à ſua differre, reducenda prius erit minutia à ſe inuenta, & maioribus terminis expreſſa, ad minimos numeros, ſiue terminos.

Hac autem arte Minutia quæuis maioribus ſcripta numeris ad minimos terminos reuocabitur. Diuidatur tam numerator, quam denominator per maximam communem vtriuſque menſuram, id eſt, per maximum numerum, qui vtrumque metiatur. Quotientes enim numeri (ſi Quotientem numeratoris facias numeratorem, & Quotientem denominatoris denominatorem) dabunt minutiam illi æquiualentem, & minimis numeris expreſſam. Nam cum, diuiſis duobus numeris per vnum & eundem numerum, Quotientes eandem habeant proportionem, quam illi numeri, ſint autem Quotientes numeri hoc modo inuenti omnium minimi, quod numeri minutiæ propoſitæ diuiſi ſint per maximum numerum eos numerantem, ita vt per maiorem diuidi nequeant, quin aliquid in diuiſione relinquatur; perſpicuum eſt, minutiam inuentam minimis numeris eſſe expreſſam, ita vt minoribus exprimi nequeat.

Minutia qua arte ad minimos numeros redigantur.

Exemplum ſit in hac minutia propoſita $\frac{32}{48}$. cuius numeratorem, ac denominatorem metiuntur, & numerant omnes hi numeri 2. 4. 8. 16. & prætèrea nullus. Nam licet numerus 24. qui maior illis eſt, numeret denominatorem 48. tamen numeratorem 32. non metitur. Sic etiam quamuis numerus 32. qui maior adhuc eſt, metiatur numeratorem 32. nullo tamen modo denominatorem 48 numerat. Nos autem hoc loco intelligimus numerum maximum numerantem, qui vtrumq; numerum minutię propoſitæ, id eſt, tam numeratorem, quam denominatorem numeret. Si igitur tam numerator 32. quam denominator 48. diuidatur per maximum illorum numerorum, nimirum per 16. reperientur Quotientes 2. & 3. Quare minutia propoſita $\frac{32}{48}$. reducetur ad hanc æquiualentem, $\frac{2}{3}$. & minimis numeris expreſſam. Si eoſdem numeros propoſitæ minutiæ diuideres per alium numerum eos numerantem, qui non ſit maximus, redigeres quidem minutiam ad aliam æqualem minoribus terminis expreſſam, ſed non minimis. Vt ſi iidem numeri 32. & 48. diuidantur per 8. inuenietur hæc minutia $\frac{4}{6}$. quæ minoribus adhuc numeris ſcribi poteſt, hoc modo $\frac{2}{3}$.

Eadem ratione hæc minutia $\frac{45}{60}$. cuius numeratorem & denominatorem metiuntur omnes hi numeri 3. 5. 15. redigetur ad hanc, $\frac{3}{4}$. ſi nimirum tam numerator, quam denominator per 15. qui maximus numerus eſt illos numerans, diuidatur, atque ita de reliquis.

Quod ſi alicuius minutiæ numeratorem, ac denominatorem nullus numerus, præter vnitatem, numeret, non poterit ad minores terminos redigi minutia illa, ſed iam minimis numeris expreſſa erit. Vt hæ minutiæ $\frac{20}{39}$. $\frac{20}{63}$. $\frac{47}{59}$. ad minores terminos reuocari non poſſunt. Quamuis enim hi numeri 2. 4. 5. 10. numeratorem primæ minutiæ numerent, nullus tamen eorum eiuſdem denominatorem metitur. Item licet hi numeri 3. 13. metiantur denominatorem eiuſdem minutiæ, neuter tamen eorum eius numeratorem metitur. Rurſus quamuis hi numeri 2. 4. 5. 10. numeratorem ſecundæ minutiæ, hi vero 3. 7. 9. 21. denominatorem eiuſdem metiantur, nullus tamen illorum vtrumque numerum: id eſt, tam numeratorem, quam denominatorem illius minutiæ, numerat. Poſtremæ autem minutiæ numeros nullus numerus præter vnitatē numerat, cum ſint (vt cum Arithmeticis loquamur) primi, quemadmodum & primarum duarum numeri ſunt inter ſe primi, quamuis nullus eorum primus ſit. Dicitur enim numerus primus, quem vnitas ſola metitur; Primi vero inter ſe numeri vocantur, quos ſola vnitas, communis menſura metitur.

Quando minutia non poteſt redigi ad minimos terminos.

Primus numerus & primus inter ſe numeri quid.

Quoniam vero, vt minutia propoſita ad minimos terminos reuocetur, neceſſe eſt, vt maxima menſura communis numeratoris, ac denominatoris inueniatur. (Per hanc enim maximam communem menſuram vterque numerus, tam numerator, quam denominator, diuidendus eſt, vt diximus.) tradi ſolet ad eam inueniendam hæc regula. Diuidatur denominator per numeratorem: Et ſi aliquid in diuiſione relictum fuerit, diuidatur diuiſor, id eſt, numerator, per reſiduum illud diuiſionis: Et ſi rurſus aliquid remanſerit, diuidatur vltimus hic diuiſor, id eſt, reſiduum illud, per reſiduum huius vltimæ diuiſionis; & ſic ſemper vltimus diuiſor per vltimum reſiduum diuidatur, donec diuiſor occurrat, qui nihil in diuiſione relinquat. Hic namque diuiſor nihil relinquens erit maxima communis menſura numeratoris ac denominatoris minutiæ propoſitæ. Quod ſi diuiſor aliquis in huiuſmodi diuiſionibus relinquat vnitatem, non habebunt numerator, & denominator minutiæ propoſitæ communem menſuram, præter vnitatem, ſed erunt numeri inter ſe primi.

Qua ratione maxima menſura communis numeratoris ac denominatoris cuiuſuis minutia reperiatur.

Vt ſi propoſita ſit minutia $\frac{36}{72}$. inueniemus maximam menſuram communem numeratoris, & denominatoris hoc modo. Diuidatur denominator 72. per numeratorem 36. & quoniam, hac diuiſione peracta, nihil remanet, erit diuiſor hic 36. maxima communis menſura; per quam ſi diuidamus numeratorem, denominatoremque datæ minutiæ $\frac{36}{72}$. reducemus eam ad $\frac{1}{2}$. minimis terminis expreſſam.

Rurſus ſi data ſit minutia $\frac{60}{96}$. reperiemus maximam communē menſuram numeratoris, & denominatoris hac ratione. Diuiſo denominatore 96. per numeratorem 60. ſuperſunt in diuiſione 36. Diuiſo rurſus diuiſore 60. per reſiduum 36. remanent in diuiſione 24. Item diuiſo hoc vltimo diuiſore 36. per vltimum reſiduum 24. relinquuntur 12. diuiſo denique vltimo hoc diuiſore 24. per vltimum reſiduum 12. nihil ſupereſt. Eſt igitur maxima menſura communis 12. per quam ſi diuidatur tam numerator, quam denominator datæ minutiæ $\frac{60}{96}$. conſtituetur hæc minutia $\frac{5}{8}$. minimis numeris expreſſa.

Quando numerator, & denominator data minutia nō habeant communē menſuram præter vnitatem.

Sed ſi proponatur hæc minutia $\frac{48}{103}$. nō inuenietur vlla communis menſura numeratoris, & denominatoris maior, quam vnitas. Nam denominatore 103. diuiſo per numeratorem 48. ſuperſunt 7. Diuiſo item diuiſore 48. per reſiduum 7. relinquuntur 6. Deniq; diuiſo vltimo hoc diuiſore 7. per vltimum reſiduum 6. ſupereſt 1. Quare, vt ſupra dictum eſt, numerator, & denominator minutiæ huius $\frac{48}{103}$. ſunt numeri inter ſe primi.

Eadem ratione quorumlibet duorum numerorum (licet fractionem non conſtituant, ſed abſolute proponantur.) maximam communem menſuram inueniemus, ſi maiorem per minorem diuidamus, & hunc diuiſorem per reſiduum diuiſionis, ſi quod erit, & rurſus hunc vltimum diuiſorem per reſiduum vltimæ diuiſionis,

Inuentio maxima menſura quorumlibet duorū numerorū.

& ſic deinceps, &c. Nam vltimus diuiſor nihil relinquens in diuiſione erit maxima communis menſura datorum numerorum: Si vero in diuiſione aliqua fuerit relicta vnitas, erunt numeri dati inter ſe primi, nullamque habebunt menſuram communem, præter vnitatem.

Vnde colligatur regula inueniẽdi maximã menſuram duorum numerorum.

Colligitur hæc regula inueniendi maximam menſuram communem duorum numerorum ex propoſ. 2. lib 7. Eucl. Nam licet Euclides iubeat ſemper minorem numerum de maiore ſubtrahere, tamen idem efficitur, & quidem multo breuius, per diuiſionem maioris numeri per minórem, cum diuiſio ſit compendioſa quædam ſubtractio, quemadmodum & multiplicatio, compendioſa quædam additio eſt.

Alia ratio redigendarum minutiarum ad minimos terminos.

Alio modo reducetur minutia propoſita ad minimos terminos, ſi tam numerator, quã denominator per communem aliquam eorum menſurã notam, etiamſi maxima nõ ſit, diuidatur, vt inueniatur minutia ſub minoribus numeris: Et rurſus huius inuentæ minutiæ tam numerator, quàm denominator, per aliam communem eorum menſuram diuidatur, & ſic deinceps, donec minutia inueniatur, cuius numerator & denominator ſint numeri inter ſe primi. vt propoſita minutia hæc $\frac{36}{48}$. ſi vterque eius numerus diuidatur per 2. inuenietur hæc minutia $\frac{18}{24}$. cuius vterque numerus ſi diuidatur per 3. reperietur hæc minutia $\frac{6}{8}$. cuius tandem numeri diuiſi per 2. offerent hanc minutiam $\frac{3}{4}$. ſub minimis terminis: ſed prior illa ratio præſtantior eſt ac breuior.

REDVCTIO FRACTORVM NVMERORVM AD EANDEM DENOMINATIONEM, ET AD INTEGRA, NEC NON *integrorum ad fractionem quamcunque, ac denique fractionum fractorum numerorum ad ſimplices fractiones.*

CAPVT X.

SÆpenumero reducendæ ſunt fractiones diuerſorum denominatorum ad alias, quæ illis æquales ſint, ſingulæ ſingulis, habeantque eundem denominatorem. Quod qua ratione fieri debeat, hoc cap. exponemus, primum quidem quando propoſitæ minutiæ non ſunt plures, quàm duæ, deinde vero quando plures ſunt.

Quo pacto duæ minutiæ ad eandem denominationẽ reducãtur.

Propoſitis igitur duabus minutiis diuerſos denominatores habentibus, ſi denominatores inter ſe multiplicentur, procreabitur communis denominator, ad quem datæ minutiæ ſunt reuocandæ: numerator vero cuiuslibet in crucem per denominatorem alterius multiplicatus producet numeratorem. vt in hoc appoſito exemplo.

$\frac{2}{3} \times \frac{3}{4}$ reducuntur ad $\frac{8}{12}$. $\frac{9}{12}$.

Ex denominatore 3 in denominatorem 4. fit denominator communis 12. Item ex 2. numeratore prioris minutiæ in 4. denominatorem poſterioris fit numerator 8. At ex 3. numeratore poſterioris minutiæ in 3. denominatorem prioris fit numerator 9. Duæ ergo minutiæ $\frac{2}{3}$. $\frac{3}{4}$. ad has duas $\frac{8}{12}$. $\frac{9}{12}$. reducuntur, quæ illis æquales ſunt, habentque vnum & eundem denominatorem communem 12. Quod enim $\frac{8}{12}$. æquiualeant $\frac{2}{3}$. conſtat ex propoſ. 17. & 18. lib. 7. Euclid. propterea quod vterque numerus huius multiplicatus per eundem numerum 4. vel multiplicans eundem numerum 4. nimirum denominatorem poſterioris minutiæ propoſitæ, produxit vtrunque numerum illius. Hinc enim fit, numeratorem & denominatorem minutiæ $\frac{8}{12}$. eandem habere proportionem, quam habent numerator, & denominator minutiæ $\frac{2}{3}$. Quare æquales erunt minutiæ ipſæ, vt ſupra diximus. Eadem ratione æquales erunt minutiæ $\frac{9}{12}$. & $\frac{3}{4}$. quia vterque numerus huius $\frac{3}{4}$. multiplicatus per eundem numerum 3. vel multiplicans eundem numerum 3. denominatorem videlicet prioris minutiæ datæ $\frac{2}{3}$. produxit vtrumque numerum illius $\frac{9}{12}$.

Si vero plures minutiæ, quàm duæ, ad eandem denominationem proponantur reducendæ, quærendus eſt primum numerus ab omnibus denominatoribus datarum minutiarum numeratus, ita vt omnes partes ab ipſis denominatas contineat. Ita autem numerum à denominatoribus propoſitis, vel à quibuſcunque numeris datis numeratum inueniemus.

Inuentio numeri à quotcunq; datis numeris numerati.

Multiplicentur omnes denominatores inter ſe, ducendo primum in ſecundum, & hunc numerum productum in tertium, productumque hunc numerum in quartum, & ſic deinceps, donec omnes ſint multiplicati. Productus enim vltimus numerus erit is, qui quæritur. Vt propoſitis hiſce minutiis $\frac{1}{2}$. $\frac{2}{3}$. $\frac{3}{4}$. $\frac{4}{5}$. ſi primus denominator 2. in ſecundum 3. multiplicetur, & productus numerus 6. in tertium 4. ducatur, productusque numerus 24. in quartum 5. multiplicetur, procreabitur numerus 120. quem dati denominatores, nempe numeri 2. 3. 4. 5. numerant.

Inuẽtio minimi numeri à quotcunq; numeris numerati.

Quoniam vero numerus hac ratione inuentus interdum ita magnus eſt, vt eo minor dari poſſit, qui ab eiſdem propoſitis denominatoribus numeretur, reperiemus minimum numerum à quotcunque numeris numeratum hoc modo. Primum inueniemus minimum numerum à prioribus duobus numeris propoſitis numeratum, hac ratione. Aut priores duo numeri habent communem aliquam menſuram, præter vnitatem, aut non: (Quod quidem cognoſces, ſi maior per minorem diuidatur, & hic diuiſor per reſiduum diuiſionis, & ſic deinceps; alterna quadam diuiſione. Si enim diuiſor occurrat, qui nihil relinquat, habebunt duo illi numeri communem menſuram, ipſeque diuiſor vltimus erit maxima eorum menſura: ſi vero occurrat diuiſor, qui relinquat vnitatem, carebunt communi menſura, eruntque primi inter ſe, vt ſupra cap. 9. docuimus.) Si duo illi numeri priores non habent communem menſuram, erit numerus ex multiplicatione vnius in alterum productus, minimus ab illis numeratus, ita vt minor dari non poſſit: Si vero habent menſuram communem, inuenta maxima earum menſura communi, per ea, quæ cap. 9. ſcripſimus, diuidatur vterque per eam, ponanturque Quotientes ſub ipſis numeris. Nam ſi Quotientem prioris numeri per poſteriorem numerum multiplices, vel Quotientem poſterioris numeri per priorem numerum, procreabis minimum numerum à duobus illis numeratum. Deinde eodem modo indagabimus minimum numerum numeratum ab eo, quem hactenus inue-

inuenimus, & à tertio numero propoſito, inquirendo videlicet, num tertius numerus propoſitus, & minimus ille à prioribus duobus numeratus, habeant menſuram communẽ, necne, &c. Hic enim minimus inuentus, erit minimus à primis tribus numeris propoſitis numeratus. Rurſus inuentũ hunc numerum cum quarto numero propoſito conferemus, eodemq; modo minimum numerum ab illis numeratum inueſtigabimus. Hic enim inuentus, erit minimus à quatuor datis numeris numeratus: atque ita progrediar, donec nullus numerus ſuperſit, cum quo inuentus vltimo loco comparari poſſit. Demonſtratio huius regulæ colligitur ex propoſ. 36. & 38. lib. 7. Eucl.

Sed explicemus negotium hoc in proximis quatuor minutijs datis, quarum denominatores ſunt 2. 3. 4. 5. Primum itaque quia duo priores numeri 2. & 3. non habent aliam menſuram communem, præter vnitatem erit numerus 6. ex eorum multiplicatione, productus, minimus à 2. & 3. numeratus. Deinde, quoniam inuentus hic numerus 6. & tertius numerus datus 4. habent maximam menſurã 2. diuidemus per eam tam 6. quam 4. quotienteſq; 3. & 2. ſub ipſis ſtatuemus, vt hic vides. Si namq; multiplicemus 6. per 2. aut 4. per 3. procreabimus numerũ 12. qui minimus eſt, à tribus primis datis numeris 2. 3. 4. numeratum. Tandem, quia hic numerus 12. inuentus, & quartus numerus datus 5. non habent communem menſuram, præter vnitatem, multiplicabimus 12. per 5. producemuſque numerum 60. minimum à quatuor denominatoribus 2. 3. 4. 5. numeratum.

6.	4.
3.	2.

Sit rurſum inueniendus minimus numerus à 4. 6. 8. 12. 7. numeratus. Primum, quia primi duo 4. & 6. habent communem maximam menſuram 2. partiemur per eam tam 4. quam 6. quotienteſque 2. & 3. ſub ipſis ſtatuemus, vt hic vides. Nam ſi multiplicemus 4. per 3. vel 6. per 2. efficiemus numerum 12. minimum ab illis duobus 4. & 6. numeratum. Deinde, quia numerus hic 12. inuentus, & tertius numerus datus 8. habent maximam menſuram communem 4. diuidemus per eam tam 12. quam 8. & quotientes 3. & 2. ſub ipſis collocabimus. Si enim multiplicemus 12. per 2. vel 8. per 3. gignemus numerum 24. minimum à primis tribus datis numeris 4. 6. 8. numeratum. Rurſus, quoniam hic numerus inuentus 24. & quartus propoſitus 12. habent communem maximam menſuram 12. diuidemus per eam tam 24. quam 12. & quotientes 2. & 1 ponemus ſub ipſis. Nam ſi multiplicemus 24. per 1. vel 12. per 2. producemus numerum 24. minimum à quatuor numeris datis 4. 6. 8. 12. numeratum. Poſtremo, quia hic numerus 24. inuentus, & vltimus numerus datus 7. non habent vllam menſuram communem, præter vnitatem; multiplicabimus illos inter ſe, procreabimuſque numerum 168. minimum à datis numeris 4. 6. 8. 12. 7. numeratum. Quod ſi quis per priorem regulam numerum inquireret ab eiſdem datis numeris 4. 6. 8 12. 7. numeratum, multiplicando nimirum ipſos inter ſe, reperiret hunc numerum 1. 6. 1. 2. 8. qui multo maior eſt quam hic numerus minimus 168. à nobis inuentus.

4.	6.
2.	3.

12.	8.
3.	2.

24.	12.
2.	1.

Iam vero, inuento numero ab omnibus denominatoribus minutiarum reducendarum numerato, ſiue is minimus ſit, ſiue non, reducemus minutias datas ad eandem denominationem hoc modo. Denominator communis eſt numerus ille inuentus: quem ſi per cuiuslibet minutiæ denominatorem diuidamus, & quotientem per numeratorem multiplicemus, producemus numeratorem, qui ſupra communem denominatorem ſcribendus eſt. vt in poſtremis quatuor minutijs $\frac{1}{2}$. $\frac{2}{3}$. $\frac{3}{4}$. $\frac{4}{5}$. numerus à denominatoribus numeratus eſt 120. Hic ergo erit denominator communis. Quem ſi diuidamus per 2. denominatorem primæ minutiæ, efficiemus 60. Hunc numerum ſi multiplicemus per 1 numeratorem eiuſdem minutiæ, producemus 60. numeratorem pro prima minutia. Rurſus ſi eundem numerum 120. partiamur per 3. denominatorem ſecundæ minutiæ, prodibit hic numerus 40. quem ſi multiplicemus per 2. numeratorem eiuſdem minutiæ, efficiemus 80. numeratorem pro ſecunda minutia, atque ita de ceteris. Itaque datæ quatuor minutiæ reducentur ad has quatuor eiuſdem denominationis $\frac{60}{120}$. $\frac{80}{120}$. $\frac{90}{120}$. $\frac{96}{120}$. Quod ſi accipiamus numerum 60. qui minimus eſt ab eiſdem denominatoribus numeratus, pro denominatore, reducemus eaſdem minutias ad has $\frac{30}{60}$. $\frac{40}{60}$. $\frac{45}{60}$. $\frac{48}{60}$. *Quo pacto plures minutiæ, quã duæ, ad eãdem denominationẽ reducãtur.*

Eadem ratione redigi poterunt duę etiam minutiæ ad eandem denominationem, licet eas non in crucem multiplicemus. Si enim quæratur numerus ſiue minimus ſiue nõ minimus, à denominatoribus numeratus, erit is communis denominator: ex quo inuenientur numeratores, vt proxime docuimus. Vt propoſitis duabus minutijs $\frac{5}{6}$. $\frac{7}{12}$. Minimus numerus à denominatoribus numeratus eſt 12. quem ſi partiamur per 6. denominatorem prioris minutiæ, quotientẽq; 2. per 5. numeratorem eiuſdem minutiæ multiplicemus, efficiemus 10. pro numeratore prioris minutiæ. Et ſi rurſum eundem numerum 12. diuidamus per 12. denominatorem poſterioris minutiæ, & quotientem 1. multiplicemus per 7. numeratorem eiuſdem minutiæ, reperiemus 7. pro numeratore poſterioris minutiæ. Itaque datæ duæ minutiæ reducentur ad has $\frac{10}{12}$. $\frac{7}{12}$. Quod ſi quis eaſdem velit reducere per primam regulam, inueniet has minutias $\frac{60}{72}$. $\frac{42}{72}$. Ex quibus omnibus perſpicuum eſt, quantum interſit inter minimum numerum à denominatoribus datarum minutiarum numeratum, & non minimum. Per minimum enim datæ minutiæ ad minimas minutias eiuſdem denominationis reducuntur, quod per alias regulas non fit. *Alia ratio reducendi duas minutias ad eãdem denominationẽ.* *Vtilitas minimi numeri à denominatorib. datarũ minutiarũ numerati.*

Contingit etiam aliquando, numeratorem minutiæ ex additione, multiplicatione, diuiſioneque productæ maiorem eſſe denominatore, atque adeo minutiam illam totum ipſum, atque integrum ſuperare. Quare ea ad integra erit reducenda hac ratione: Diuidatur numerator per denominatorem. Quotiens enim dabit integra, quibus minutia data æquiualet: Et ſi quid in diuiſione ſuperfuerit, illud erit numerator, cui idem denominator ſubſcribendus eſt. vt hæc minutia $\frac{60}{12}$. ſi numerator diuidatur per denominatorem, reducetur ad 5. integra. Hæc autem minutia $\frac{100}{7}$. redigetur ad 14 $\frac{2}{7}$. quia in diuiſione numeratoris per denominatorem remanſerunt 2. atque ita minutia illa continet 14. integra, & inſuper duas ſeptimas partes vnius integri. *Quo modo minutia, cuius numerator maior eſt denominatore, ad integra redigatur.*

Item non raro vſu venit, vt integra ad fractionem aliquam reducenda ſint, quod hoc modo fiet. Multiplicentur integra propoſita per denominatorem minutiæ, ad quam integra reducenda ſunt. Productus enim numerus erit numerator, cui denominator datæ minutiæ eſt ſubſcribendus. Vt ſi 7. integra ad quintas partes ſint *Quo pacto integra ad minutiam reducãtur.*

redigenda; Multiplicabimus 7. integra per 5. denominatorem propoſitæ minutiæ, productoque numero 35. ſupponemus eundem denominatorem, vt fiat minutia $\frac{35}{5}$. æquiualens 7. integris. Quod ſi integris adhæreat minutia aliqua, addendus eſt numerator illius minutiæ ad numerum productum ex integris per denominatorem minutiæ multiplicatis, vt efficiatur numerator. Vt ſi numerus hic $8\frac{2}{5}$. reducendus ſit ad quintas, vt fiat vnica minutia; Multiplicabimus 8. per 5. denominatorem adhærentis minutiæ, ac numero producto 40. addemus 2. numeratorem eiuſdem minutiæ, vt habeamus numeratorem 42. huius minutiæ $\frac{42}{5}$. quæ numero propoſito $8\frac{2}{5}$. æquiualet

Minutiæ minutiarũ quo pacto ad ſimplices minutias reuocentur.

Poſtremo, quando in operatione aliqua minutiæ minutiarum occurrunt, reducendæ erunt ad ſimplicem minutiam, hoc artificio. Multiplica numeratores inter ſe, hoc eſt, primum in ſecundum, & hoc productum in tertium, atque iterum hoc productum in quartum, & ſic deinceps, ſi plures numeratores fuerint. Vltimus enim numerus productus dabit numeratorem ſimplicis minutiæ, quæ illi minutiæ minutiarum æqualis erit. Denominator autem erit numerus productus ex multiplicatione denominatorum inter ſe, ſi multiplicentur, vt de numeratoribus dictum eſt. Vt hæc minutia minutiæ $\frac{3}{5}$ $\frac{4}{7}$. reducetur ad hanc ſimplicem fractionem $\frac{12}{35}$. quia multiplicatio numeratorum facit 12. denominatorum autem 35. ita vt tres quintæ quatuor ſeptimarum partium vnius integri contineant $\frac{12}{35}$. eiuſdem integri. Sic etiam hæc minutia minutiarum $\frac{2}{3}$. $\frac{3}{4}$. $\frac{1}{6}$. $\frac{1}{2}$. reducetur ad hanc ſimplicem $\frac{6}{144}$. quæ ad minimos numeros reducta faciet $\frac{1}{24}$. vt ex antecedenti cap. conſtat. Denique hæc minutia minutiarum $\frac{3}{4}$. $\frac{2}{3}$. $\frac{3}{5}$. ad hanc ſimplicem reuocabitur $\frac{18}{60}$. quæ reducta ad minimos numeros faciet $\frac{3}{10}$.

Hoc autem ita eſſe, explicabimus hoc modo. Ponamus hanc vltimam minutiam minutiarum $\frac{3}{4}$. $\frac{2}{3}$. $\frac{3}{5}$. eſſe deſumptam ex vno aureo. Neceſſe eſt igitur, ſi regula præſcripta vera eſt, eam continere tres Iulios, qui ſunt $\frac{3}{10}$. vnius aurei. Id quod quilibet facile perſpiciet. Nam $\frac{3}{5}$. vnius aurei continent 6. Iulios, quod duo Iulij ſint $\frac{1}{5}$. aurei vnius: At $\frac{2}{3}$. ſex Iuliorum ſunt 4. Iulij: & $\frac{3}{4}$. quatuor Iuliorum ſunt 3. Iulij. Eadem ratione hanc minutiam minutiarum $\frac{1}{3}$. $\frac{2}{5}$. $\frac{1}{3}$. recte ad hanc $\frac{2}{45}$. eſſe reuocatam, in hoc, numero 45. oſtendemus. Nam $\frac{1}{3}$. huius numeri 45. continet 15. vnitates; ex quibus ſi ſumantur $\frac{2}{5}$. accipientur 6. vnitates, ex quibus denique ſi accipiatur $\frac{1}{3}$. ſumentur 2. vnitates, quæ faciunt $\frac{2}{45}$. dicti numeri 45. Non ſecus alia exempla explicari poterunt, & probari.

ADDITIO FRACTORVM NVMERORVM.

CAPVT XI.

Additio minutiarũ quo modo fiat.

SI minutiæ addendæ habeant eundem denominatorem, addendi ſunt numeratores, & aggregato idem denominator ſupponendus: Si vero diuerſos habeant denominatores, reducendæ ſunt prius ad eundem denominatorem, & tunc eodem modo additio inſtituenda. Vt ſumma collecta ex hiſce tribus minutijs $\frac{2}{12}$. $\frac{4}{12}$. $\frac{6}{12}$. eſt hæc $\frac{12}{12}$. quia habent eundem denominatorem, ſummaque ex numeratoribus collecta eſt 12. quemadmodum ex 2. aureis, 4. aureis, & 6. aureis fiunt 12. aurei. Sic etiam ex hiſce minutijs $\frac{3}{10}$. $\frac{7}{10}$. colligitur hæc ſumma $\frac{10}{10}$. quæ vni integro æquiualet. Ita quoque ex his minutijs $\frac{4}{7}$. $\frac{3}{7}$. $\frac{5}{7}$. $\frac{6}{7}$. colligitur hæc ſumma $\frac{18}{7}$. quæ reducta ad integra facit $2\frac{4}{7}$. At vero vt hæ minutiæ $\frac{2}{3}$. $\frac{3}{4}$. in vnam ſummam colligantur, reducendæ prius ſunt ad eundem denominatorem, nimirum ad has minutias $\frac{8}{12}$. $\frac{9}{12}$. ex quibus in vnam ſummam collectis fiunt $\frac{17}{12}$. hoc eſt, $1\frac{5}{12}$. atque hæc eſt ſumma duarum minutiarum propoſitarum, quemadmodum ex 2. aureis & 3. Iulijs, ſi 2. aurei reducantur ad 20. Iulios, fiunt 23. Iulij. Sic etiam minutiæ hæ $\frac{6}{7}$. $\frac{12}{13}$. $\frac{10}{11}$. $\frac{4}{5}$. vt in vnam ſummam colligantur, reducendæ prius ſunt ad has eiuſdẽ denominationis $\frac{4290}{5005}$. $\frac{4620}{5005}$. $\frac{4550}{5005}$. $\frac{4004}{5005}$. ex quibus fit hæc ſumma $\frac{17464}{5005}$. id eſt, $3\frac{2449}{5005}$.

Quando integra adſunt quid faciendũ.

Si integra adſint, addenda ſunt ea ſeorſum, & minutiæ etiam ſeorſum. Vt ex 8. & $\frac{1}{5}$. fiunt $8\frac{1}{5}$. Item ex 8. & $4\frac{2}{3}$. fiunt $12\frac{2}{3}$. Item ex $8\frac{2}{7}$. & $4\frac{6}{7}$. fiunt $12\frac{8}{7}$. hoc eſt, $13\frac{1}{7}$. Item ex $2\frac{2}{3}$. & $4\frac{3}{4}$. fiunt $12\frac{17}{12}$. id eſt $13\frac{5}{12}$.

Praxis addendi minutias diuerſarum denominationum inter ſe.

Itaque vt duæ minutiæ diuerſarum denominationum in vnam colligantur ſummam, multiplicandæ eæ ſunt in crucem, & producti numeri addendi, vt fiat numerator minutiæ producendæ: Deinde denominatores inter ſe multiplicandi, vt eiuſdem minutiæ denominator habeatur: quia hac ratione reducuntur duæ minutiæ ad eandem denominationem, vt ex præcedenti cap. patet, adduntur que numeratores inter ſe. Vt ſi hæ duæ minutiæ $\frac{2}{3}$. $\frac{3}{4}$. ſint addẽdæ, multiplicabimus tam 2. numeratorem prioris per 4. denominatorẽ poſterioris, quam 3. numeratorem poſterioris per 3. denominatorem prioris, productoſque numeros 8. & 9. in vnam ſummam colligemus, vt fiat numerator 17. Deinde productum numerum ex multiplicatione denominatorum inter ſe, nempe 12. faciemus denominatorem. Erit igitur minutia collecta $\frac{17}{12}$. Quod ſi ſint plures minutiæ addendæ, quam duæ, addemus primum priores duas, vt diximus. Deinde minutiam collectam cum tertia minutia eodem modo: Et hanc productam cum quarta, & ita deinceps. Vt ſi addendæ ſint hæ minutiæ $\frac{2}{3}$. $\frac{3}{4}$. $\frac{4}{5}$. $\frac{5}{6}$. colligemus primum ex prioribus duabus hanc $\frac{17}{12}$. Deinde ex hac, & tertia efficiemus eodem modo $\frac{133}{60}$. Denique ex hac, & quarta procreabimus $\frac{1098}{360}$. hoc eſt $3\frac{18}{360}$. ſummam omnium.

Probatio additionis minutiarum.

Probatio autem additionis fit per ſubtractionem. Subtracta enim altera minutiarum addendarum ex ſumma collecta, remanebit altera ſi in additione erratum non eſt Quod ſi plures ſint addendæ minutiæ, ſubtracta vna earum ex ſumma, relinquetur minutia alijs ſimul ſumptis æqualis. Vt quoniam hæ minutiæ $\frac{3}{4}$. $\frac{5}{12}$. additæ faciunt $\frac{56}{48}$. id eſt, $1\frac{8}{48}$. ſi ex hac ſumma ſubtrahatur prior minutia, nempe $\frac{3}{4}$. vt in ſequenti cap. docebimus, remanebit hæc minutia $\frac{80}{192}$. quæ æqualis eſt alteri minutiæ $\frac{5}{12}$. vt patet, ſi ad minimos terminos reuocetur, vel numeratores per denominatores in crucem multiplicentur. Producetur enim idem numerus tam ex 80. in 12. quam ex 5. in 92. nempe numerus 960. Quare, vt ſupra cap. 7. diximus, æquales ſunt minutiæ $\frac{80}{192}$. $\frac{5}{12}$.

SVBTRACTIO FRACTORVM NVMERORVM.

CAPVT XII.

SI duæ minutiæ, quarum minor ex maiore ſubducenda eſt, habeant eundem denominatorem, ſubtrahendus eſt numerator minutiæ ſubtrahendæ ex numeratore alterius, & reſiduo idem denominator ſubſcribendus. Si vero diuerſos habeant denominatores, reducendæ ſunt prius ad eundem denominatorem, & tunc eodem modo inſtituenda ſubtractio. Vt ſi ſubtrahenda ſit hæc minutia $\frac{5}{17}$. ex iſta $\frac{8}{17}$. ſubtrahemus numeratorem 5. ex numeratore 8 & reſiduo 3. eundem denominatorem 17. ſupponemus, vt fiat minutia reſidua $\frac{3}{17}$. quemadmodum ſi 5. aurei ex 8. aureis tollantur, remanent 3. aurei. At vero ſi deducenda ſit hæc minutia $\frac{2}{3}$. ex iſta $\frac{8}{9}$. reducendæ erunt prius ambæ ad has $\frac{18}{27}$ $\frac{24}{27}$. eiuſdem denominationis: Deinde numerator 18. ex numeratore 24. deducendus, reſiduoque 6. communis denominator 27. ſupponendus, vt fiat minutia reſidua $\frac{6}{27}$. quemadmodum, ſi 2. Iulij auferendi ſint ex 8. aureis, reducendi ſunt prius 8. aurei ad 80. Iulios, vt relinquantur 78. Iulij.

Si ab integris detrahenda eſt aliqua fractio, reducenda eſt vna vnitas integrorum ad fractionem eiuſdem denominatoris, ita vt fiat minutia, cuius numerator æqualis ſit denominatori, à qua deducenda eſt minutia propoſita. Vt ſi ex 10. auferenda ſit minutia $\frac{6}{11}$. faciemus ex vna vnitate $\frac{11}{11}$. ex quibus ſi auferamus $\frac{6}{11}$. remanebunt 9. $\frac{5}{11}$. Integra enim carebunt illa vnitate, quæ ad minutiam reducta eſt.

Quando integra adſunt, quid faciendū.

Si vero ab integris detrahenda ſint integra, & præterea fractio aliqua, reducenda quoque eſt vna vnitas illorum integrorum ad minutiam eiuſdem denominationis: Deinde integra à reliquis integris, & fractio à fractione detrahenda. Vt ſi hic numerus 4 $\frac{2}{3}$. ſubducendus ſit ex 10. faciemus ex vna vnitate huius numeri minutiam hanc $\frac{3}{3}$. à qua ſi demantur $\frac{2}{3}$. relinquentur $\frac{1}{3}$. & ſi 4. auferantur ex reliquis 9. ſupererunt 5. Itaque totus numerus reſiduus erit 5 $\frac{1}{3}$.

Denique ſi ab integris vna cum fractis detrahenda ſint integra cum fractis, vel fractiones ſolæ; ſi quidem fractio detrahenda minor eſt, quam illa, à qua fit ſubtractio, vel illi æqualis, detrahenda eſt fractio à fractione, & integra ab integris: ſi vero fractio ſubtrahenda maior eſt, quam illa, à qua fit ſubtractio, reducenda eſt vna vnitas integrorum, à quibus ſubtractio fieri debet, ad fractionem, quæ illis adhæret, &c. Vt ſi hic numerus 6 $\frac{3}{4}$. ſubducendus ſit ex hoc 10 $\frac{1}{4}$. quoniam minutia $\frac{3}{4}$. maior eſt, quam $\frac{1}{4}$. faciemus ex vna vnitate horum integrorum 10. hanc minutiam $\frac{4}{4}$. quæ cum $\frac{1}{4}$. faciet $\frac{5}{4}$. à qua ſi auferatur minutia $\frac{3}{4}$. relinquetur minutia $\frac{2}{4}$. Ablatis quoque 6. ex 9. ſuperſunt 3. Totus ergo numerus reſiduus eſt 3 $\frac{2}{4}$.

Quod ſi quando vna minutia à pluribus fuerit ſubtrahenda, vel plures ab vna, vel plures à pluribus, danda erit opera, vt prius plures illæ tam ſubtrahendæ, quam illæ, à quibus fieri debet ſubtractio, in vnam ſummam colligantur.

Quando plures ſunt minutiæ quid agendum.

Itaque vt fiat ſubtractio vnius minutiæ ab alia, cum denominatores ſint diuerſi, multiplicandi ſunt numeratores in crucem per denominatores, & vnum productum ab altero ſubducendum, reſiduoque ſupponendus numerus ex multiplicatione denominatorum inter ſe productus; quia hac ratione duæ minutiæ propoſitæ reducuntur ad eandem denominationem, &c. Vt ſi minutia $\frac{3}{4}$. ex minutia $\frac{7}{9}$. ſubtrahenda ſit, multiplicabimus 3. numeratorem minutiæ ſubtrahendæ per 9. denominatorem alterius, & productum 27. detrahemus ex numero 28. producto ex multiplicatione 7. numeratoris minutiæ, à qua fit ſubtractio, per 4. denominatorem alterius & reliquæ vnitati ſupponemus numerum 36. productum ex multiplicatione denominatorum inter ſe, vt fiat minutia relicta $\frac{1}{36}$.

Praxis ſubtrahendi minutiam à minutia.

Probatio autem ſubtractionis fit per additionem Si namque minutia relicta ad ſubtractam minutiam adiiciatur, componetur minutia illa, à qua ſubtractio facta eſt, ſi non eſt erratum. Vt quoniam ſubtracta minutia hac $\frac{3}{4}$. ex iſta $\frac{7}{9}$. relinquitur hæc minutia $\frac{1}{36}$. vt in proximo exemplo patuit; ſi addatur $\frac{1}{36}$. ad $\frac{3}{4}$. componetur hæc minutia $\frac{112}{144}$. quæ ad minimos terminos reducta erit hæc $\frac{7}{9}$. à qua nimirum facta eſt ſubtractio. Sic etiam, quia ſubtracta hac minutia $\frac{2}{3}$. ex iſta $\frac{8}{9}$. reliqua eſt minutia hæc $\frac{6}{27}$. ſi ea addatur ad $\frac{2}{3}$. fiet minutia $\frac{72}{81}$. quæ æqualis eſt minutiæ $\frac{8}{9}$. à qua ſubtractio facta eſt, vt patet, ſi vtraque ad minimos terminos reuocetur. Semper enim reperietur minutia hæc $\frac{1}{2}$. Vel certe, quia numeratores earum in crucem per denominatores multiplicati producunt eundem numerum, nimirum 432.

Probatio ſubtractionis minutiarum

MVLTIPLICATIO FRACTORVM NVMERORVM.

CAPVT XIII.

SI numeratores inter ſe multiplicentur, producetur numerator ſummæ multiplicationis, ex denominatorum autem multiplicatione denominator eiuſdem gignetur. Vt ex multiplicatione $\frac{2}{3}$. per $\frac{3}{4}$. fient $\frac{6}{12}$. hoc eſt, $\frac{1}{2}$. Numeratores enim inter ſe multiplicati faciunt 6. denominatores vero 12.

Multiplicatio minutiarū quo pacto fiat.

Quando minutia per numerum integrum multiplicanda eſt, ſupponenda eſt numero integro vnitas, vt fiat ex ipſo quaſi fractio quædam denominata ab vnitate integra. Deinde regula, quam proxime præſcripſimus, ſeruanda. Vt ſi multiplicanda ſint 8. per $\frac{4}{5}$. ſcribemus 1. ſub 8. vt in appoſito exemplo vides. Igitur ſi multiplicentur inter ſe tam numeratores, quam denominatores, producetur hæc minutia $\frac{32}{5}$. quæ æquiualet huic numero 6 $\frac{2}{5}$.

$\frac{8}{1}$. $\frac{4}{5}$.

Quãdo adſunt integra quid agendum.

Quando autem numero integro adhæret minutia, reducendus erit numerus integer ad illam minutiam, vt fiat vna fractio ex ipſo & minutia adiuncta. Vt ſi multiplicanda ſint 8. per 3 $\frac{5}{8}$. faciemus ex 3 $\frac{5}{8}$. minutiam $\frac{29}{8}$ & numero 8. ſupponemus 1. vt hic factum eſſe vides. Si igitur tam

$\frac{8}{1}$. $\frac{29}{8}$.

$\frac{46}{3}$	$\frac{4}{2}$

numeratores inter ſe, quam denominatores multiplicentur, procreabitur hæc minutia $\frac{184}{6}$ huic numero 30 $\frac{4}{6}$ æquiualens. Item ſi multiplicanda ſint 4 $\frac{2}{3}$ per $\frac{1}{2}$ reducemus 4 $\frac{2}{3}$ ad $\frac{14}{3}$ vt hic vides. Producetur autem ex multiplicatione minutia hæc $\frac{14}{6}$ id eſt, 2 $\frac{2}{6}$. Eodem pacto ſi multiplicanda ſint 4 $\frac{1}{2}$ per 3 $\frac{1}{5}$ reducemus priorem numerum ad $\frac{9}{2}$ poſteriorem vero ad $\frac{16}{5}$ vt in appoſito exemplo vides.

$\frac{9}{2}$	$\frac{16}{5}$

Multiplicatis autem tam numeratoribus inter ſe, quam denominatoribus, producetur hæc minutia $\frac{144}{10}$ hoc eſt, 14 $\frac{4}{10}$.

Probatio multiplicationis minutiarum. Examinatur autem multiplicatio per diuiſionem. Si enim minutia producta diuidatur per alteram minutiarum multiplicantium, prodibit neceſſario in quotiente altera minutia multiplicans. Vt ſi ex multiplicatione $\frac{1}{2}$ per $\frac{4}{7}$ fiunt $\frac{4}{14}$ neceſſe eſt, vt diuiſis $\frac{4}{14}$ per $\frac{1}{2}$ producantur $\frac{4}{7}$ diuiſis autem eiſdem $\frac{4}{14}$ per $\frac{4}{7}$ gignatur $\frac{1}{2}$. Perſpicuum autem erit ex ſequenti cap. diuiſis $\frac{4}{14}$ per $\frac{1}{2}$ produci $\frac{8}{14}$ quæ minutia huic $\frac{4}{7}$ æquiualet; diuiſis autem eiſdem $\frac{4}{14}$ per $\frac{4}{7}$ produci $\frac{28}{56}$ hoc eſt, $\frac{1}{2}$.

Cur in multiplicatione minutiarũ producatur minutia minor vtraque minutia multiplicante. Nemini autem mirum videri debet, multiplicationẽ minutiarum producere ſemper minutiam minorem vtraque minutia multiplicante, vt in vltimo exemplo, quod in examine tradidimus, patet, vbi ex multiplicatione $\frac{1}{2}$ per $\frac{4}{7}$ producta eſt minutia $\frac{4}{14}$ id eſt, $\frac{2}{7}$ quæ minor eſt vtraque minutia multiplicante. Si enim natura multiplicationis recte conſideretur, facile quiuis perſpiciet, hoc neceſſario ita debere fieri. Cum enim vnus numerus per alium multiplicari, ſeu duci dicatur, cum alter ipſorum toties augetur, quoties in altero continetur vnitas, vt cap. 4. diximus, perſpicuum eſt, neutram minutiarum multiplicantium poſſe totã ſumi in producto, ſed fragmenta duntaxat ipſius, qualia nimirum fragmenta vnitatis, altera minutia multiplicans refert, quandoquidem hæc minutia minor eſt vnitate. Hinc enim fit, vt quemadmodum minutia multiplicans non continet integram vnitatem: ita quoque numerus productus non contineat totã alteram minutiam multiplicantem, vt in proximo exemplo, quemadmodum $\frac{1}{2}$ eſt dimidiata pars vnitatis, ita etiam numerus productus $\frac{4}{14}$ id eſt, $\frac{2}{7}$ eſt pars dimidiata huius minutiæ $\frac{4}{7}$ vt definitio multiplicationis poſtulat. Recte ergo ex multiplicatione $\frac{1}{2}$ per $\frac{4}{7}$ producitur minutia hæc $\frac{4}{14}$ hoc eſt $\frac{2}{7}$. Sic etiam ex multiplicatione 9. per $\frac{1}{3}$ producitur minutia hæc $\frac{9}{3}$ id eſt, numerus hic 3. Nam quemadmodum $\frac{1}{3}$ eſt tertia pars vnitatis, ita numerus 3. tertia pars eſt numeri 9. vel quemadmodum numerus productus 3. continet $\frac{1}{3}$ nouies, ita numerus 9. continet nouem vnitates. Non eſt igitur mirum, quod minor numerus producatur vtraque minutia multiplicante. Si tamen integra per fractionem multiplicentur, producitur quidem numerus quoque minor illo numero integro, maior vero fractione multiplicante. Vt in proximo exemplo patet, vbi ex multiplicatione 9. per $\frac{1}{3}$ productus numerus fuit $\frac{9}{3}$ hoc eſt, 3. Sic etiam ſi integra per integra cum fractione, vel integra cum fractione per integra cum fractione multiplicentur, ſemper producetur maior numerus vtroque numero multiplicante, propter numerum integrum multiplicantem integra. Vt ex multiplicatione 4. per 3 $\frac{1}{4}$ fit numerus $\frac{52}{4}$ hoc eſt, 13. quia numerus 4. ter ſumptus facit 12. & quarta eius pars eſt 1. Vel quia numerus 3. ſumptus quater facit 12. & minutia $\frac{1}{4}$ ſumpta quater facit $\frac{4}{4}$ id eſt, 1.

DIVISIO FRACTORVM NVMERORVM.

CAPVT XIV.

Diuiſio minutiarum quomodo fiat. FAcilitatis gratia Diuiſionis regula ad regulam multiplicationis reduci poterit hoc modo. Commutentur termini diuiſoris, id eſt, numerator ſcribatur infra lineolam, & denominator ſupra eandem. Quo facto, ſi regula multiplicationis cap. præcedenti tradita ſeruetur, id eſt, ſi tam numeratores, quam denominatores inter ſe multiplicentur, producetur numerus Quotiens. Vt ſi diuidenda ſit minutia $\frac{3}{4}$. ſtabit exemplum, vt hic vides.

$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{1}$
$\frac{3}{5}$	$\frac{7}{3}$

Multiplicatis igitur tam numeratoribus, quam denominatoribus inter ſe, producetur minutia hæc $\frac{12}{4}$ hoc eſt, numerus 3. pro Quotiente. Sic etiam ſi diuidenda ſit minutia $\frac{3}{5}$ per $\frac{3}{7}$ ſtabit exemplum vt hic apparet. Quotiens autem erit $\frac{21}{15}$.

Quando adſunt integra, quid agendum. Quando numerus integer per minutiam, vel per numerum integrum cum fractione diuidendus eſt: vel minutia per numerum integrum, vel per numerum integrum cum fractione; vel deniq; numerus integer cum

			Ita ſtabunt exempla.			*Quotientes.*
6.	per	$\frac{2}{3}$.		$\frac{6}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{18}{2}$. vel 9.
6.	per	4 $\frac{1}{3}$.		$\frac{6}{1}$	$\frac{3}{13}$.	$\frac{18}{13}$. vel 1 $\frac{5}{13}$
$\frac{2}{3}$.	per	6.		$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$.	$\frac{2}{18}$. vel $\frac{1}{9}$
$\frac{2}{3}$.	per	6 $\frac{1}{2}$.		$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{13}$.	$\frac{4}{39}$.
6 $\frac{1}{2}$	per	$\frac{3}{4}$		$\frac{13}{2}$	$\frac{4}{3}$.	$\frac{52}{6}$ vel 8 $\frac{4}{6}$
6 $\frac{1}{2}$	per	3 $\frac{2}{5}$.		$\frac{13}{2}$	$\frac{5}{17}$.	$\frac{65}{34}$. vel 1 $\frac{31}{34}$
6 $\frac{1}{2}$.	per	3 $\frac{4}{5}$.		$\frac{13}{2}$	$\frac{5}{19}$.	$\frac{65}{38}$. vel 1 $\frac{27}{38}$

fractione per minutiam, aut per numerum integrum, aut per numerum integrum cum fractione, ſupponenda eſt vnitas numero integro, ſi ei nõ adhæreat minutia, ſi vero minutia adiuncta ſit, reducendus eſt numerus inte-

ger ad minutiam adiunctam, vt fiat vna minutia, quemadmodum cap. præcedenti diximus. Deinde regula iam præſcripta ſeruanda. Vt in ſequentibus diuiſionibus ſtabunt exempla, vna cum Quotientibus, vt hic vides.

Qua ratione alij diuiſionem minutiarũ doceant.

Alii tradunt hanc regulam diuiſionis minutiarum, numerator minutiæ diuidendę (poſita vnitate ſub integris, ſi adſint, & reductis integris ad minutiam adhærentem, ſi qua adhæreat) multiplicetur per denominatorem minutiæ diuidentis; procreabitur enim hac ratione numerator Quotientis minutiæ. Denominator autem producetur ex multiplicatione denominatoris minutiæ diuidendæ per numeratorem diuidentis minutiæ. Quod quidem idem eſt, ac ſi termini diuiſoris commutentur, & regula multiplicationis ſeruetur, vt perſpicuum eſt. Quoniam vero ambigere quiſpiam poſſet aliquando, an numerator minutiæ diuidendæ, an vero diuidentis producat numeratorem minutiæ Quotientis, (facile enim hæc res ex animo excidere poteſt.) magis mihi placet prior regula à nobis tradita, qua diuiſionis regula ad regulam multiplicationis reuocatur.

Probatio diuiſionis minutiarũ.

Examen autem diuiſionis fit per multiplicationem. Nam ſi Quotiens minutia multiplicetur per minutiam diuidentem, producetur minutia diuiſa neceſſario, vt quia ex diuiſione $\frac{4}{5}$. per $\frac{1}{2}$. producitur minutia $\frac{8}{5}$. hoc eſt, $1\frac{3}{5}$. fit, vt, ex multiplicatione $1\frac{3}{5}$ per $\frac{1}{2}$. producitur minutia diuiſa $\frac{4}{5}$. Producitur autem ex hac multiplicatione minutia $\frac{8}{10}$. quæ huic $\frac{4}{5}$. æqualis eſt, vt patet.

Cur aliquando in diuiſione minutiarũ Quotiens maior ſit minutia diuiſa.

Quod autem in diuiſione minutiarum plerunque producatur Quotiẽs maior minutia diuiſa, vt in diuiſione $\frac{6}{7}$. per $\frac{2}{7}$ patet, in qua Quotiens eſt $\frac{42}{14}$. hoc eſt, 3. mirari nemo debet. Nam cum numerus Quotiens indicet, quoties diuiſor in diuidendo numero contineatur, manifeſtum eſt, quando minutia diuidens minor eſt minutia diuidenda, illam in hac ſæpius quam ſemel contineri; atque adeo Quotientem maiorem eſſe quam 1. etiamſi minutia diuidenda minor ſit, quam 1. Veluti in proximo exemplo, quoniam minutia diuidens $\frac{2}{7}$ in minutia diuidenda $\frac{6}{7}$. continetur ter, fit, vt Quotiens ſit 3. indicans illam in hac ter contineri. Idem etiam ex definitione Diuiſionis perſpicue apparet. Cum enim diuiſio ſit inuentio numeri, qui toties vnitatem contineat, quoties numerus diuidendus diuiſorem continet, vt cap. 5. diximus; perſpicuum eſt, in proxima diuiſione Quotientem debere eſſe 3. qui vnitatẽ ter contineat, quoties nimirũ minutia diuidenda $\frac{6}{7}$ continet. Mirum ergo non eſt in diuiſione minutiarũ ſemper produci Quotientem maiorem numero diuidendo, cum diuiſor minor eſt, quam 1. & quam minutia diuidenda, vt in dato exemplo patuit, idemque in diuiſione 6. per $\frac{1}{2}$. apparet, vbi quotiens eſt 12. Nam minutia diuidens $\frac{1}{2}$. duodecies in numero diuidendo 6. continetur.

Quando Quotiens maior ſit numero diuidendo in minutijs.

Quod tamen generalius, quando diuiſor vnitate minor eſt, licet non ſit minor numero diuidendo, ita oſtendemus. Nam cum Quotiens toties vnitatem contineat, quoties diuidendus diuiſorem: erit talis proportio Quotientis ad vnitatem, qualis numeri diuidendi ad diuiſorem, & permutando talis proportio Quotientis ad numerum diuidendum, qualis vnitatis ad diuiſorem. Cum ergo vnitas ponatur maior diuiſore, erit quoque Quotiens maior numero diuidendo. Ita vides in diuiſione $\frac{2}{3}$. Quotientem $\frac{8}{9}$. maiorem eſſe minutia diuiſa $\frac{2}{3}$. quia minutia diuidens $\frac{3}{4}$. minor eſt vnitate, licet maior ſit, quam minutia diuiſa.

Quando Quotiens in minutijs minor ſit diuidendo numero.

Quando tamen diuiſor maior eſt, quam 1 Quotiens ſemper minor erit numero diuidendo. Vt diuiſis $\frac{8}{9}$. per $1\frac{1}{2}$. Quotiens eſt $\frac{16}{27}$. & diuiſis $6\frac{1}{4}$ per [illegible] Quotiens eſt [illegible] id eſt [illegible]. Diuiſis rurſus $100\frac{1}{2}$. per $10\frac{3}{4}$. Quotiens eſt $\frac{804}{86}$ hoc eſt, $9\frac{30}{86}$. ſiue $9\frac{15}{43}$. Sic etiam diuiſis $\frac{2}{3}$. per $3\frac{1}{2}$. fiet Quotiens $\frac{4}{21}$. Denique diuiſis $3\frac{1}{7}$. per $1\frac{1}{2}$. Quotiens erit $\frac{44}{21}$. hoc eſt, $2\frac{2}{21}$. vbi vides Quotientem ſemper minorem eſſe numero diuiſo. Cuius rei ratio hæc eſt. Quoniam diuiſio eſt inuentio numeri, qui toties vnitatem contineat, quoties numerus diuidendus continet diuiſorem, vt cap. 5. dictum eſt, erit talis proportio Quotientis ad vnitatem, qualis numeri diuidendi ad diuiſorem, & permutando talis proportio Quotientis ad numerum diuidendum, qualis vnitatis ad diuiſorem. Cum ergo vnitas ponatur minor diuiſore, erit etiam Quotiens minor numero diuidendo.

INSITIO FRACTORVM NVMERORVM.

CAPVT XV.

Inſitio minutiarum quid.

SOlent Arithmetici nonnulli vti operatione quadam minutiarum, quam inſitionem vocant. Eſt autem inſitio minutiarum nihil aliud, quam propoſitis duabus, aut pluribus minutijs, quarum quælibet ſit fractio vel vnius duntaxat particulæ omnium ſequentium, vel fractio integrarum omnium fractionum ſequentium, additio huiuſmodi fractionum ad vltimam minutiam, reſpectu cuius omnes illæ fractiones fractionum ſumuntur: ita vt quodammodo præcedentes fractiones ſequentibus inſerantur. Vnde nomen inſitionis obtinuit operatio hæc minutiarum: quemadmodũ in exemplis patebit. Vt propoſitis hiſce duabus minutijs $\frac{2}{3}$. $\frac{3}{4}$. ita vt prior ſit fractio vel vnius tantum particulæ poſterioris, vel fractio totius poſterioris, hoc eſt, ita vt prior contineat vel duas partes tertias vnius quartæ partis, vel duas partes tertias trium quartarum: operatio, qua $\frac{2}{3}$. vnius quartæ, vel $\frac{2}{3}$. trium quartarum ad $\frac{3}{4}$. adduntur, appellatur inſitio. Eodem modo propoſitis quatuor hiſce minutijs $\frac{2}{3}$. $\frac{3}{4}$. $\frac{2}{5}$. $\frac{4}{7}$. ita vt quælibet ſit fractio vel vnius particulæ omnium ſequentium, vel fractio totarum omnium ſequentium, hoc eſt, ita vt vel prima contineat duas tertias vnius quartæ vnius quintæ vnius ſeptimæ, & ſecunda ſignificet tres quartas vnius quintæ vnius ſeptimæ, & tertia comprehendat duas quintas vnius ſeptimæ; vel prima contineat duas tertias trium quartarum duarum quintarum quatuor ſeptimarum, & ſecunda comprehendat tres quartas duarum quintarum quatuor ſeptimarum, & tertia ſignificet duas quintas quatuor ſeptimarum: operationes, qua omnes hæ fractiones fractionum nimirum $\frac{2}{3}$. vnius quartæ vnius quintæ vnius ſeptimæ, & $\frac{3}{4}$. vnius quintæ vnius ſeptimæ, & $\frac{2}{5}$. vnius ſeptimæ; vel $\frac{2}{3}$. trium quartarum duarum quintarum quatuor ſeptimarum, & $\frac{3}{4}$. duarum quintarum quatuor ſeptimarum, & $\frac{2}{5}$. quatuor ſeptimarum, ad $\frac{4}{7}$. adduntur, inſitio dicitur. & ſic de alijs.

Inſitio duplex eſt.

Eſt ergo inſitio duplex: vna, quando quælibet minutia eſt fractio vnius duntaxat particulæ omnium ſequentium minutiarum; altera, quando quælibet minutia eſt fractio integrarum omnium minutiarum ſequentium, vt in exemplis patuit. Arithmetici omnes de prima ſolũ inſitione locuti ſunt, nulla prorſus facta mentione

Inſitio propter quid excogitata ſit.

inſitionis ſecundæ, eam fortaſſis ob cauſam, quod prima vtilis ſit ad diuidendum quemcunque numerum integrum, vna cum fractione aliqua per numerum integrum, vt paulo poſt dicemus. Quoniam vero ſecunda inſitio egregium quoque vſum habet in progreſſionibus Geometricis, vt, Deo iuuante, in maiore noſtro Arithmetices opere declarabimus; vtriuſque inſitionis regulam trademus.

Differẽtia inter inſitionem & reductionẽ minutiarum minutiarum.

Magnum autem diſcrimen eſt inter inſitionem, & operationem illam, qua cap. 9. minutias minutiarum ad ſimplicem minutiam reducere docuimus. Ibi enim propoſitis v. g. duabus hiſce minutijs, $\frac{2}{3}$. $\frac{3}{4}$. ita vt prior ſit fractio poſterioris, ſolum inquirebamus, quamnam minutiam ſimplicem conſtituerent duæ tertiæ trium quartarum, inueniebamusq; conſtituere $\frac{6}{12}$. id eſt, $\frac{1}{2}$. vnius integri; hic vero indagabimus, quænam minutia efficiatur, ſi addantur $\frac{2}{3}$. vnius quartæ, vel $\frac{2}{3}$. trium quartarum ad $\frac{3}{4}$. efficieturque priori modo minutia hæc, $\frac{11}{12}$. poſteriori vero hæc, $\frac{17}{12}$. hoc eſt, 1 $\frac{5}{12}$. quarum vtraque longe abeſt à $\frac{1}{2}$. Eodem modo diſcrimen apparebit, ſi fuerint plures minutiæ, quam duæ.

Prima regula inſitionis duarum minutiarum.

Itaque ſi proponantur duæ minutiæ, quarum prior ſit fractio vnius tantum particulæ poſterioris, ita fiet inſitio. Poſterioris minutiæ numerator per denominatorem prioris multiplicetur productoq; numero numerator eiuſdem prioris adiiciatur. Hoc enim aggregatũ erit numerator minutiæ producendæ; denominator vero gignetur ex multiplicatione denominatorum inter ſe. vt datis hiſce minutiis $\frac{2}{3}$. $\frac{3}{4}$. ita fiet inſitio, ſiue additio $\frac{2}{3}$. vnius quartæ ad $\frac{3}{4}$. Ex 3. numeratore poſterioris minutiæ in 3. denominatorem prioris fiunt 9. Addito numeratore 2. eiuſdẽ prioris minutiæ, fiunt 11. pro numeratore minutiæ producendæ. Denominator autẽ erit numerus 12. ex multiplicatione denominatorũ inter ſe productus: ita vt hæc minutia $\frac{11}{12}$. componatur ex additione $\frac{2}{3}$. vnius quartæ ad $\frac{3}{4}$. Quod facile probari poteſt ex regula additionis. Quoniam enim $\frac{2}{3}$. vnius quartæ, ſecundum reductionem minutiarum minutiarum, faciunt $\frac{2}{12}$. ſi addantur $\frac{2}{12}$. ad $\frac{3}{4}$. fient $\frac{44}{48}$. hoc eſt, $\frac{11}{12}$. vt prius.

Quo modo plures minutia, quã dua, inſerantur per primam regulam.

Si vero plures minutiæ, quàm duæ, dentur, ita vt quælibet ſit fractio vnius tantum particulæ omnium ſequentium, inſitio hoc modo fiet. Multiplicetur numerator vltimæ minutiæ per denominatorem penultimæ, productoque numero addatur numerator eiuſdem penultimæ; Deinde hoc aggregatum multiplicetur per denominatorem minutiæ antepenultimæ, productoque numero addatur eiuſdem numerator; Poſt hæc aggregatum hoc multiplicetur per denominatorem proximè antecedentis minutiæ, productoque numero eiuſdem numerator adiiciatur; & ſic deinceps, ſi plures fuerint minutiæ, aggregatum vltimum ſemper multiplicetur per denominatorem præcedentis minutiæ, eiuſdemque numerator producto adiiciatur, donec nulla minutia ſuperſit. Poſtremum enim aggregatum erit numerator minutiæ producendæ: Denominator autem producetur ex multiplicatione denominatorum inter ſe, vt datis hiſce minutijs $\frac{2}{3}$. $\frac{3}{4}$. $\frac{2}{5}$. $\frac{4}{7}$. ita fiet inſitio, hoc eſt, additio $\frac{2}{3}$. vnius quartæ, vnius quintæ, vnius ſeptimæ, & $\frac{3}{4}$. vnius quintæ, vnius ſeptimæ, & $\frac{2}{5}$. vnius ſeptimæ ad $\frac{4}{7}$. Ex 4. numeratore vltimæ minutiæ in 5. denominatorem penultimæ fiunt 20. Addito numeratore 2. eiuſdem penultimæ minutiæ, fiunt 22. quæ multiplicata per 4. denominatorem antepenultimæ minutiæ faciunt 88. Addito numeratore 3. eiuſdem minutiæ antepenultimæ, fiunt 91. quæ multiplicata per 3. denominatorem antecedentis minutiæ & primæ, faciunt 273. Addito numeratore 2. eiuſdem primæ minutiæ, quæ proxime antecedit, fiunt 275. pro numeratore minutiæ producendæ. Denominator autem erit numerus 420. productus ex multiplicatione denominatorum inter ſe, ſi nimirum primus per ſecundum multiplicetur, & hic numerus productus per tertium, &c. Itaque ex hac inſitione orietur minutia hæc $\frac{275}{420}$. quæ ad minimos terminos reducta faciet $\frac{55}{84}$. Quod ex regula additionis probabitur hac ratione. Quoniam $\frac{2}{3}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{5}$. $\frac{1}{7}$. per regulam reductionis minutiarum minutiarum faciunt $\frac{2}{420}$. & $\frac{3}{4}$. $\frac{1}{5}$. $\frac{1}{7}$. faciunt $\frac{3}{140}$. & $\frac{2}{5}$. $\frac{1}{7}$. faciunt $\frac{2}{35}$. ſi tres illæ minutiæ $\frac{2}{420}$. $\frac{3}{140}$. $\frac{2}{35}$. addantur ad $\frac{4}{7}$. fient [illegible]. hoc eſt in minimis terminis $\frac{55}{84}$. vt prius, ſed multo facilius, & citius hæc ſumma inuenta eſt per inſitionem.

Minutia inſerenda iuxta primam regulam non ſunt reducenda ad minimos terminos ante finẽ operationis.

Cæterum in hac regula inſitionis nulla minutia reducenda eſt ad minimos terminos, antequam tota operatio abſoluatur, quia ſenſus variaretur, & magnus fieret error: abſoluta tamen operatione, reduci poteſt ſumma producta ad minimos terminos, vt à nobis factum eſt. Reduximus enim minutiam hanc $\frac{275}{420}$. ex inſitione productam ad iſtam $\frac{55}{84}$. Quod autem ſenſus variaretur, & error contingeret, ſi minutia aliqua ante finem operationis ad terminos minimos reuocaretur, perſpicuum eſt. Nam ſi inſerendæ ſint hæ minutiæ $\frac{2}{3}$. $\frac{8}{12}$. id eſt, addendæ $\frac{2}{3}$. vnius duodecimæ ad $\frac{8}{12}$. fient $\frac{26}{36}$. At ſi poſterior minutia $\frac{8}{12}$. reuocaretur ad minimos terminos, nempe ad hanc minutiam $\frac{2}{3}$. deberent inſeri $\frac{2}{3}$. $\frac{2}{3}$. id eſt, addi $\frac{2}{3}$. vnius tertiæ ad $\frac{2}{3}$. qui ſenſus longe alius eſt, quam prior. Fietque propterea ex hac inſitione alia minutia, nimirum $\frac{8}{9}$. valde diuerſa à priori minutia producta $\frac{26}{36}$. Prior tamen minutia producta $\frac{26}{36}$. reduci poteſt ad hanc minimis terminis $\frac{13}{18}$.

Summa inſitionis ſecundum primam regulã ſemper minor eſt quam vnitas, & quare.

Prætereundum etiam non eſt, ſummam ex inſitione hactenus expoſita collectam, ſi vltima minutia minor eſt, quam vnitas, ſemper minorem eſſe vnitate, etiamſi infinitæ minutiæ inſerantur. Vt ſi hæ minutiæ $\frac{3}{4}$. $\frac{2}{3}$. $\frac{1}{2}$. $\frac{4}{5}$. inſerantur, fiet minutia $\frac{119}{120}$. quæ minor eſt, quam vnitas. Quod ita debere eſſe, hac ratione declarari poterit. Quoniam vt $\frac{4}{5}$. efficiant vnitatem, deeſt $\frac{1}{5}$. & præcedens minutia $\frac{1}{2}$. quæ additur ad $\frac{4}{5}$. non eſt $\frac{1}{5}$. ſed $\frac{1}{2}$. vnius quintæ, fit vt ad complendam vnitatem deſit adhuc $\frac{1}{2}$. vnius quintæ: at quia antecedens minutia $\frac{2}{3}$. quæ additur, non eſt $\frac{1}{2}$. vnius quintæ, ſed $\frac{2}{3}$. vnius dimidij vnius quintæ, fit, vt ad explendam vnitatem deſit adhuc $\frac{1}{3}$. vnius dimidij vnius quintæ. Rurſus quoniam præcedens minutia $\frac{3}{4}$. non eſt $\frac{1}{3}$. vnius dimidij vnius quintæ, ſed $\frac{3}{4}$. vnius tertiæ vnius dimidij vnius quintæ, fit, vt ad conficiendam vnitatem deſit adhuc $\frac{1}{4}$. vnius tertiæ vnius dimidij vnius quintæ, & ſic deinceps, ſi plures fuerint minutiæ, ſemper aliquid deerit ad vnitatem complendam.

Vſus primæ regula inſitionis in diuidẽdo numero integro vna cũ minutia per numerum integrum.

Vt autem videas, quàm præclarum vſum habeat prima hæc regula inſitionis in diuidendo numero integro vnà cum minutia per numerum integrum, adducam vnum, vel alterum exemplum. Sint diuidenda 20 $\frac{1}{4}$. per 12. Diuiſis integris 20 per 12. fit Quotiens 1 $\frac{8}{12}$. & quia minutia $\frac{1}{4}$. diuidi etiam debet per 12. & Quotiens addi priori quotienti; eſt autem Quotiens (ſi diuidatur $\frac{1}{4}$. per 12) $\frac{1}{4}$. vnius duodecimæ, quemadmodum ſi 1. diuidatur per 12. Quotiens eſt $\frac{1}{12}$. fit, vt ſi inſerantur hæ minutiæ $\frac{1}{4}$. $\frac{8}{12}$. id eſt, ſi addatur $\frac{1}{4}$ vnius duodecimæ, (nimirum Quotiens diuiſionis $\frac{1}{4}$. per 12.) ad $\frac{8}{12}$. componatur minutia, quæ addita Quotienti integro 1. efficiat totum Quotientem: Fit autem ex inſitione harum minutiarum $\frac{1}{4}$. $\frac{8}{12}$. minutia $\frac{33}{48}$. hoc eſt $\frac{11}{16}$. Igitur totus Quotiens erit 1 $\frac{11}{16}$. Idem efficies, ſi diuiſorem 12. numero integro diuidendo 20. ſupponas, vt fiat minutia $\frac{20}{12}$. & huic minutiæ inſeras minutiam $\frac{1}{4}$. diuidendam hoc modo $\frac{1}{4}$. $\frac{20}{12}$. quia minutia $\frac{20}{12}$. eſt Quotiens diuiſionis 20. per 12.

cui per

cui per inſitionem additur $\frac{5}{8}$. vnius duodecimæ, nempe Quotiens diuiſionis $\frac{5}{8}$. per 12. Vtroque autem modo recte fieri diuiſionem facile experieris per regulam diuiſionis. Si enim diuidas 20$\frac{5}{8}$ per 12. reperies quotientem $\frac{165}{96}$. id eſt. 1$\frac{69}{96}$. ſiue 1$\frac{23}{32}$. vt prius.

Sint rurſus diuidenda 100.$\frac{5}{8}$. per 8. Diuiſis integris 100. per 8. fit Quotiens 12$\frac{4}{8}$. Et quia minutia $\frac{5}{8}$. diuidi etiam debet per 8.& Quotiens addi priori Quotienti; eſt autem (ſi diuidantur $\frac{5}{8}$ per 8.) Quotiens $\frac{5}{8}$ vnius octauæ, quemadmodum ſi 1. diuidatur per 8. Quotiens eſt $\frac{1}{8}$. fit, vt ſi inſerantur hæ minutiæ $\frac{5}{8}$ $\frac{4}{8}$. id eſt, ſi addantur $\frac{5}{8}$ vnius octauę, (nimirum Quotiens diuiſionis $\frac{5}{8}$ per 8.) ad $\frac{4}{8}$. conficiatur minutia, quæ addita Quotienti integro 12. componat totum Quotientem: Fit autem ex inſitione harum minutiarum $\frac{5}{8}$ $\frac{4}{8}$ minutia $\frac{37}{64}$ Totus igitur Quotiens erit 12$\frac{37}{64}$. Idem efficies, ſi diuiſorem 8. numero integro diuidendo 100. ſupponas. vt fiat minutia $\frac{100}{8}$. & huic minutiæ inſeras minutiam $\frac{5}{8}$ diuidendam, hoc modo $\frac{5}{8}$ $\frac{100}{8}$. quia minutia $\frac{100}{8}$. eſt Quotiens diuiſionis 100. per 8. cui per inſitionem adduntur $\frac{5}{8}$ vnius octauæ, nempe Quotiens diuiſionis $\frac{5}{8}$. per 8. eundem prorſus Quotientem 12$\frac{37}{64}$ inuenies, ſi diuidas per regulam diuiſionis, 100$\frac{5}{8}$ per 8. Facies enim quotientem $\frac{805}{64}$ hoc eſt 12$\frac{37}{64}$. Poſtremo ſint diuidenda 100$\frac{5}{8}$. per 10. Diuiſis integris 100. per 10. fit Quotiens 10. nihilque remanet. Et quia minutia $\frac{5}{8}$ diuidi etiam debet per 10.& Quotiens addi priori Quotienti; eſt autem (diuiſis $\frac{5}{8}$ per 10.) Quotiens $\frac{5}{8}$. vnius decimæ, quemadmodum ſi 1. diuidatur per 10. Quotiens. eſt $\frac{1}{10}$. fit, vt ſi inſerantur hæ minutiæ $\frac{5}{8}$ $\frac{0}{10}$. id eſt, ſi addantur $\frac{5}{8}$. vnius decimæ (nimirum Quotiens diuiſionis $\frac{5}{8}$. per 10.) ad $\frac{0}{10}$ (quia enim nulla fractio ſuperfuit in diuiſione 100 per 10. ponenda eſt figura 0. ſupra diuiſorem 10. vt fiat minutia $\frac{0}{10}$. continens nullam decimam.) conffetur minutia, quæ addita Quotienti integro 10 componat totum Quotientem: Fit autem ex inſitione harum minutiarum $\frac{5}{8}$ $\frac{0}{10}$. minutia $\frac{5}{80}$. Totus ergo Quotiens erit, 10$\frac{5}{80}$. hoc eſt, 10$\frac{1}{16}$. Idem efficies, ſi diuiſorem 10. numero integro diuidendo 100. ſupponas, vt fiat minutia $\frac{100}{10}$ & huic minutiæ inſeras minutiam $\frac{5}{8}$ diuidendam, hoc modo $\frac{5}{8}$ $\frac{100}{10}$. quia minutia $\frac{100}{10}$. eſt Quotiens diuiſionis 100. per 10. cui per inſitionē adduntur $\frac{5}{8}$ vnius decimæ, nempe Quotiens diuiſionis $\frac{5}{8}$. per 100. Eundem omnino Quotiētem habebis, ſi 100$\frac{5}{8}$. diuidas per 10. ſecundum diuiſionis regulam. Fiet enim Quotiens $\frac{805}{80}$. hoc eſt, 10$\frac{5}{80}$. ſiue 10$\frac{1}{16}$.

Secunda regula inſitionis duarum minutiarum.

Iam vero ſi proponantur duæ minutiæ, quarum prior ſit fractio totius poſterioris, fiet inſitio hac ratione. Multiplicetur poſterioris minutiæ numerator per denominatorem prioris, productoque numero addatur numerus ex multiplicatione numeratorum productus. Fiet enim hac ratione numerator minutiæ producendæ. Denominator vero procreabitur ex multiplicatione denominatorum inter ſe. Vt hiſce minutijs $\frac{2}{3}$. $\frac{3}{4}$. datis, ita fiet inſitio, ſiue additio $\frac{2}{3}$ trium quartarum ad $\frac{3}{4}$. Ex 3. numeratore poſterioris minutiæ in 3. denominatorem prioris fiunt 9. Addito numero 6. ex multiplicatione numeratorum producto, fiunt 15. pro numeratore minutiæ producēdæ. Denominator autem erit numerus 12. ex multiplicatione denominatorum productus. Itaque ex additione $\frac{2}{3}$. trium quartarum ad $\frac{3}{4}$. conflatur minutia $\frac{15}{12}$. hoc eſt, 1$\frac{1}{4}$. Quod facile probari poteſt ex regula additionis. Quoniam enim $\frac{2}{3}$. trium quartarum faciunt $\frac{6}{12}$. vt patet ex reductione, quam de minutijs minutiarum tradidimus; ſi addantur $\frac{6}{12}$. ad $\frac{3}{4}$. fient $\frac{60}{48}$. hoc eſt, 1$\frac{1}{4}$. vt prius.

Quo pacto plures minutiæ, quã duæ inſerantur per ſecundam regulam.

Si vero plures minutiæ, quã duæ, ſint propoſitæ, ita vt quælibet ſit fractio integrarum minutiarũ omnium ſequentium, facienda erit inſitio hoc modo. Multiplicetur numerator vltimæ minutiæ per denominatorem penultimæ, productoque numero addatur numerus ex multiplicatione duorum numeratorum poſtremorum productus. Deinde hoc aggregatum multiplicetur per denominatorem minutiæ antepenultimæ, productoq; numero addatur numerus ex tribus poſtremis numeratoribus inter ſe multiplicatis productus: Rurſus aggregatum hoc multiplicetur per denominatorem proxime antecedentis minutiæ, productoq; numero adijciatur numerus ex quatuor vltimis numeratoribus inter ſe multiplicatis productus; & ſic deinceps, ſi plures fuerint minutiæ, aggregatum vltimum ſemper multiplicetur per denominatorem præcedentis minutiæ, productoq; numero adijciatur numerus productus ex omnibus numeratoribus illarum minutiarum, quæ vſque ad eum locũ aſſumptæ fuerunt, donec nulla minutia ſuperſit. Poſtremum enim aggregatũ erit numerator minutiæ producendæ: Denominator autem procreabitur ex multiplicatione denominatorum inter ſe. Vt propoſitis hiſce minutijs $\frac{2}{3}$. $\frac{3}{4}$. $\frac{2}{5}$. $\frac{4}{7}$. ita fiet inſitio, ſiue additio $\frac{2}{3}$. trium quartarum duarum quintarum quatuor ſeptimarum, & $\frac{3}{4}$. duarum quintarum quatuor ſeptimarum, & $\frac{2}{5}$. quatuor ſeptimarum, ad $\frac{4}{7}$. Ex 4. numeratore vltimæ minutiæ in 5. denominatorem penultimæ fiunt 20. Addito numero 8. producto ex poſtremis duobus numeratoribus 4 & 2. inter ſe multiplicatis, fiunt 28. quæ multiplicata per 4. denominatorem antepenultimæ minutiæ, faciunt 112. Addito numero 24. producto ex poſtremis tribus numeratoribus 4. 2. & 3. inter ſe multiplicatis, fiunt 136. quæ multiplicata per 3. denominatorem antecedentis minutiæ, quæ prima eſt, faciunt 408. Addito numero 48. producto ex omnibus quatuor numeratoribus 4. 2. 3. & 2. inter ſe multiplicatis, fiunt 456. pro numeratore minutiæ producendæ: Denominator vero erit numerus 420. productus ex denominatoribus omnibus inter ſe multiplicatis. Itaque ex inſitione hac generabitur hæc minutia, $\frac{456}{420}$. hoc eſt 1$\frac{36}{420}$. ſiue in minimis terminis 1$\frac{3}{35}$. Quod ex regula additionis confirmabitur hoc modo. Quoniam $\frac{2}{3}$. $\frac{3}{4}$. $\frac{2}{5}$. $\frac{4}{7}$. per regulam qua minutiæ minutiarum reducuntur, faciunt $\frac{48}{420}$. & $\frac{3}{4}$. $\frac{2}{5}$. $\frac{4}{7}$. faciunt $\frac{24}{140}$. & $\frac{2}{5}$. $\frac{4}{7}$. faciunt $\frac{8}{35}$. ſi tres hæ minutiæ $\frac{48}{420}$. $\frac{24}{140}$. $\frac{8}{35}$. addantur ad $\frac{4}{7}$. fiet minutia $\frac{15640800}{14406000}$. hoc eſt 1$\frac{1234800}{14406000}$. ſiue 1$\frac{3}{35}$. in minimis terminis, vt prius. Sed multo facilius, & expeditius eandem ſummam per inſitionem collegimus.

In hac porro ſecunda regula inſitionis poſſunt minutiæ inſerendæ reduci ad minimos terminos ante operationem. Nam ſi inſerantur hæ minutiæ $\frac{2}{3}$. $\frac{4}{8}$. id eſt, ſi addantur $\frac{2}{3}$. quatuor octauarum ad $\frac{4}{8}$. fient $\frac{20}{24}$. hoc eſt, $\frac{5}{6}$. Tantundem faciemus, ſi prius $\frac{4}{8}$ reducamus ad $\frac{1}{2}$. & inſeramus poſtea $\frac{2}{3}$. $\frac{1}{2}$ hoc eſt, addamus $\frac{2}{3}$. vnius dimidij ad $\frac{1}{2}$. Eodem modo ſi inſerantur $\frac{6}{10}$. $\frac{4}{8}$. fient $\frac{64}{80}$. id eſt, $\frac{4}{5}$. eademque minutia producetur, ſi prius $\frac{6}{10}$. reducatur ad $\frac{3}{5}$. & $\frac{4}{8}$. ad $\frac{1}{2}$. inſeranturque $\frac{3}{5}$. $\frac{1}{2}$. Producentur enim ex hac inſitione $\frac{8}{10}$. hoc eſt, $\frac{4}{5}$. vt prius. Ratio huius rei eſt, quia cum præcedens minutia ſit fractio totius ſequentis, idem erit omnino valor. $\frac{2}{3}$. $\frac{4}{8}$. $\frac{2}{3}$. $\frac{1}{2}$. Si enim hæ minutiæ minutiarum reducantur ad ſimplices minutias, reducetur prior ad $\frac{8}{24}$. hoc eſt, ad $\frac{1}{3}$. poſterior vero ad $\frac{2}{6}$. id eſt, ad $\frac{1}{3}$. quoque. Quod in priori regula non contingit. Cum enim ibi prior minutia ſit fractio vnius tantum particulæ poſterioris, perſpicuum eſt in eodem exemplo aliud eſſe $\frac{2}{3}$. $\frac{4}{8}$. & $\frac{2}{3}$. $\frac{1}{2}$. Prior enim minutia minutiarum facit $\frac{8}{24}$. hoc eſt $\frac{1}{3}$. poſterior $\frac{2}{6}$. id eſt, $\frac{1}{3}$.

QVÆ-

QVÆSTIVNCVLÆ NONNVLLÆ NVMERORVM INTEGRORVM, AC MINVTIARVM.

CAPVT XVI.

1. Inuentio numeri, à quo facta eſt ſubtractio, vel facienda vt propoſitus numerus relinquatur.

2. Inuentio numeri ſubtracti, vel ſubtrahendi ex propoſito numero vt alius datus numerus ſit reliquus.

OPeræ pretium me facturum arbitror, ſi priuſquam ad alia pergam, ſubnectam hoc loco varias quæſtiunculas numerorum integrorum, ac minutiarum, quæ per additionem, ſubtractionem, multiplicationem, diuiſionemque ſoluuntur, tum quia in ijs ſoluendis ſtudioſi ſeſe exercere poſſunt in operationibus integrorum, & minutiarum, tum etiam, quia ſæpenumero ſimiles quæſtiones præclarum vſum habent in alijs rebus Arithmeticis. Hinc ergo exordiemur.

1. A quo numero ſubducta ſunt, vel ſubduci debent 23. vt remaneant 47? Item à quo numero ſubducta ſunt, vel ſubduci debent $\frac{4}{11}$. vt relinquantur $8\frac{2}{3}$? Huiuſmodi quæſtiones ſoluuntur per additionem. Si enim numerum ſubtractum, ſubtrahendumue adiicias numero, qui relinqui debet, conficies numerum, à quo datus numerus ſubtractus relinquet datum numerum. Vt in priori quæſtione, ex 23. & 47. fit numerus 70. Ab hoc ergo ſubducenda ſunt 23. vt 47. relinquantur. In poſteriori autem quæſtione, ex $\frac{4}{11}$. & $8\frac{2}{3}$. fit numerus $9\frac{1}{33}$. à quo ſi ducas $\frac{4}{11}$. relinquentur $8\frac{2}{3}$. vt patet, ſi reducas minutias productas ad integra, & ad minimos terminos. Id quod in ſequentibus quæſtionibus obſeruandum etiam erit, hoc eſt, poſt abſolutam operationem reducendæ erunt minutiæ productæ ad minimos terminos, vt in hac quæſtione factum eſt.

3. Inuentio numeri, cui datus numerus adiiciendus ſit, vel qui dato numero ſit addendus, vt alius numerus datus fiat.

2. Quis numerus ſubtractus eſt, aut ſubtrahi debet ex 87. vt relinquantur 26? Item qui numerus ablatus eſt, vel auferri debet ex $\frac{8}{13}$. vt relinquantur $\frac{2}{7}$? Huius generis quæſtiones expediet ſubtractio. Nam ſi numerus, qui relinqui debet, ſubducatur ex numero, à quo fieri debet ſubtractio, remanebit numerus, qui ex eodem numero detractus relinquet reſiduum propoſitum. Vt in priori quæſtione, ſubtractis 26. ex 87. remanent 61. Si igitur tollantur 61. ex 87. remanebunt 26. In poſteriori autem quæſtione, ſi auferantur $\frac{2}{7}$. ex $\frac{8}{13}$. reſtabunt $\frac{30}{91}$. quæ ſi ſubtrahantur ex $\frac{8}{13}$. relinquentur $\frac{2}{7}$.

4. Inuentio differentiæ inter duos datos numeros.

3. Cui numero adiicienda ſunt 38. aut quis numerus adiiciendus eſt ad 38. vt numerus compoſitus ſit 83? Item cui numero addenda ſunt $4\frac{8}{9}$. aut quis numerus adiiciendus eſt ad $4\frac{8}{9}$. vt componatur numerus $20\frac{1}{2}$? Quæſtiones eiuſmodi per ſubtractionem etiam ſoluuntur. Nam ſi ex numero, qui componi debet, demas numerum addendum propoſitum, relinquetur numerus, cui ſi adiiciatur datus numerus addendus, fiet numerus datus. Vt in priori quæſtione, ſubductis 38. ex 83. remanent 45. Huic ergo numero adiicienda ſunt 38. vt fiat numerus 83. In poſteriori autem quæſtione, ſubtractis $4\frac{8}{9}$. ex $20\frac{1}{2}$. relinquitur numerus $15\frac{11}{18}$. cui ſi addas $4\frac{8}{9}$. fiet numerus $20\frac{1}{2}$.

5. Inuentio numeri diuiſi aut diuidendi per datum numerum, vt Quotiens propoſitus proueniat.

4. Quæ differentia, ſiue exceſſus eſt inter 100. & 349? Item inter $6\frac{1}{2}$. & $20\frac{3}{4}$? Hæ etiam quæſtiones per ſubtractionem explicantur. Si namque minor numerus ex maiore tollatur, relinquetur differentia, ſiue exceſſus quæſitus. Vt in priori quæſtione, ſublatis 100. ex 349. relinquuntur 249. pro exceſſu, differentiaue inter 100. & 349. In poſteriori autem quæſtione, demptis $6\frac{1}{2}$. ex $20\frac{3}{4}$. reſtant $14\frac{1}{4}$. Hoc ergo numero ſuperat numerus $20\frac{3}{4}$. numerum $6\frac{1}{2}$.

6. Inuentio numeri, qui contineat, vel ſit aut det datam fractionem, ſeu partē, parteſue propoſiti numeri.

5. Quis numerus diuiſus, vel diuidendus eſt per 9. vt quotiens ſit 34? Item quis numerus diuiſus vel diuidendus eſt per $4\frac{1}{3}$. vt Quotiens ſit $\frac{1}{2}$? Tales quæſtiones per multiplicationem expediuntur. Si enim diuiſor datus per datum Quotientem multiplicetur, procreabitur numerus diuiſus diuidendusue, qui quæritur. Vt in priori quæſtione, multiplicatis 9. per 34. fit numerus 306. quo diuiſo per 9. Quotiens erit 34. In quæſtione vero poſteriori, ſi multiplicentur $4\frac{1}{3}$. per $\frac{1}{2}$. producetur numerus $2\frac{1}{6}$. qui diuiſus per $4\frac{1}{3}$. dabit Quotientem $\frac{1}{2}$.

6. Quis numerus continet $\frac{3}{5}$. huius numeri 30? Item quis numerus eſt, vel dat $\frac{1}{2}$. huius numeri $4\frac{5}{7}$? Multiplicatio etiam huiuſmodi quæſtiones abſoluit. Si enim dati duo numeri inter ſe multiplicentur, gignetur numerus quæſitus. Vt quoniam in priori quæſtione ex multiplicatione $\frac{3}{5}$. per 30. producuntur 18. fit vt numerus 18 contineat $\frac{3}{5}$. numeri 30. In poſteriori autem quæſtione ex multiplicatione $\frac{1}{2}$. per $4\frac{5}{7}$. fit numerus $2\frac{5}{14}$. qui facit $\frac{1}{2}$. huius numeri $4\frac{5}{7}$. Hæc quæſtio ita quoque proponi poteſt. Da mihi $\frac{3}{5}$. huius numeri 30. Item da mihi $\frac{1}{2}$ huius numeri $4\frac{5}{7}$.

7. Inuentio numeri, per quem datus numerus ſit diuiſus aut diuidendus, vt Quotiēs ſit propoſitus numerus.

7. Per quem numerum diuiſa, aut diuidenda ſunt 48. vt Quotiens ſit 10? Item per quem numerum diuidentur $\frac{2}{7}$ vt Quotiēs ſit $\frac{2}{3}$? Diuiſione ſimilibus quæſtionibus ſatisfiet. Nam ſi numerus diuiſus, diuidendusue propoſitus diuidatur per datum Quotientem, prodibit ex hac diuiſione diuiſor quæſitus. Vt in priori quæſtione, diuiſis 48. per 10. fiet Quotiens $4\frac{4}{5}$. per quem ſi diuidatur numerus datus 48. fiet Quotiens 10. In poſteriori autem quæſtione, diuiſis $\frac{2}{7}$. per $\frac{2}{3}$. fit Quotiens $\frac{6}{14}$. per quem ſi diuidantur $\frac{2}{7}$. producetur Quotiens $\frac{2}{3}$.

8. Inuentio numeri per quem datus numerus ſit multiplicādus, vel qui per datum numerū multiplicandus ſit, vt gignatur numerus propoſitus.

8. Per quem numerum multiplicanda ſunt 17. aut quis numerus multiplicandus eſt per 17. vt productus numerus ſit 100? Item per quem numerū multiplicari debent $3\frac{1}{2}$. aut quis numerus per $3\frac{1}{2}$. multiplicari debet, vt numerus productus ſit $\frac{3}{4}$? Diuiſio quoque ſimilibus quæſtionibus ſatisfaciet. Nam ſi numerum, qui produci debet, partiamur per numerum qui multiplicandus proponitur, efficiemus numerum quæſitum. Vt in quæſtione priori, diuiſis 100. per 17. fit Quotiens $5\frac{15}{17}$. per quem ſi multiplicetur datus numerus 17. procreabitur datus numerus 100. In poſteriori vero quæſtione, ſi diuidatur $\frac{3}{4}$. per $3\frac{1}{2}$. fiet Quotiens $\frac{3}{14}$. per quem ſi multiplicetur datus numerus $3\frac{1}{2}$. gignetur datus numerus $\frac{3}{4}$.

9. Qui duo numeri inter ſe multiplicati producunt 48. vel $\frac{1}{2}$. vel $6\frac{3}{4}$. Diuiſio quoque huiuſmodi quæſtionibus ſatisfaciet. Nam ſi numerum producendum diuidamus per quemuis numerū, erit hic numerus, & Quotiens duo illi, qui quæruntur. Vt ſi 48. diuidantur per quemcunq; numerum, vt per 6. fiet Quotiens 8. Duo ergo numeri 6. & 8. inter ſe multiplicati producent 48. Sic etiam ſi eadem 48. diuidantur per alium numerum quemcunque, vt per 10. fiet Quotiens $4\frac{4}{5}$. Duo ergo numeri 10. & $4\frac{4}{5}$. inter ſe multiplicati gignent hunc numerum. 48. Item ſi partiamur $\frac{1}{2}$. per quemcunque numerum, vt per $\frac{2}{3}$. inueniemus Quotientem $\frac{3}{4}$. Duo ergo numeri quæſiti, qui inter ſe multiplicati faciant $\frac{1}{2}$. erunt $\frac{2}{3}$. & $\frac{3}{4}$. Eadem ratione ſi partiamur $\frac{1}{2}$. per quemuis alium nume-

9. Inuentio duorum numerorum, qui inter ſe multiplicati datum numerum producant.

numerum, vt per 8. reperiemus Quotientem $\frac{1}{16}$. Duo igitur numeri quæſiti, qui inter ſe multiplicati faciant $\frac{1}{2}$. erunt 8. & $\frac{1}{16}$. Denique diuiſis $6\frac{2}{3}$. per quemlibet numerum, vt per $3\frac{1}{2}$. fiet Quotiens $1\frac{19}{21}$. Duo ergo numeri, qui inter ſe multiplicati producant $6\frac{2}{3}$. erunt $3\frac{1}{2}$. & $1\frac{19}{21}$.

10. Qui ſunt duo illi numeri, vt vno diuiſo per alterum, Quotiens ſit 28? Item qui ſunt duo illi numeri, vt vno diuiſo per alterum, Quotiens ſit $\frac{5}{8}$? Has quæſtiones, & alias ſimiles multiplicatio enodat. Si namque Quotientem datum multiplices per quemuis numerum, dabit numerus productus numerum diuidendum: diuiſor autem erit numerus multiplicans aſſumptus. Vt in priori quæſtione, ſi 28. multiplices per quemuis numerum, vt per 6. efficies numerum 168. Hic ergo diuiſus per 6. faciet 28. In quæſtione autem poſteriori, ſi $\frac{5}{8}$. multiplices per quemlibet numerum, vt per $\frac{1}{2}$. procreabis $\frac{5}{16}$. quibus diuiſis per $\frac{1}{2}$. Quotiens erit $\frac{5}{8}$.

Inuentio duorū numerorū, vt vno per alterum diuiſo, proueniat Quotiēs propoſitus.

11. Per quem numerum multiplicanda ſunt 7. aut quis numerus multiplicandus eſt per 7. vt producto numero diuiſo per 8. Quotiens ſit 3? Item per quem numerum multiplicari debent $\frac{2}{3}$. Aut quis numerus per $\frac{2}{3}$. multiplicandus eſt, vt producto numero per $\frac{3}{4}$. diuiſo, Quotiens ſit $\frac{1}{4}$. Quæſtiones huiuſmodi multiplicatione, & diuiſione ſoluuntur. Nam ſi diuiſorem datum per datum Quotientem multiplices, numerumq; productum per datum numerum multiplicandum, multiplicantemue partiaris, erit Quotiens numerus, qui quæritur. Vt in priori quæſtione, ſi multiplicetur diuiſor datus 8. per datum Quotientem 3. producetur numerus 24. qui diuiſus per numerum multiplicandum, multiplicantemue datum, nempe per 7. faciet $3\frac{3}{7}$. numerum quæſitum. Si enim multiplicentur 7. per $3\frac{3}{7}$. fiet numerus 24. qui diuiſus per 8. faciet Quotientem 3. In poſteriori vero quæſtione, ſi diuiſor datus $\frac{3}{4}$. multiplicetur per datum Quotientem $\frac{1}{4}$. fiet numerus $\frac{3}{16}$ qui diuiſus per $\frac{2}{3}$. numerum multiplicantem, multiplicandumue datum faciet $\frac{9}{32}$. numerum quæſitum. Si namq; $\frac{2}{3}$. multiplicentur per $\frac{9}{32}$. fiet numerus $\frac{3}{16}$. qui diuiſus per $\frac{3}{4}$. faciet Quotientem $\frac{1}{4}$.

Inuētio numeri, per quē datus numerus ſit multiplicandus, vel qui multiplicandus ſit per datū numerum, vt producto diuiſo per aliū datum numerum proueniat Quotiens propoſitus.

12. Quota pars eſt numerus 6. huius numeri 54? Item quota pars eſt hic numerus $\frac{3}{5}$. huius numeri $\frac{9}{10}$? Quæſtiones tales per diuiſionem explicantur. Nam ſi numerus datus, qui debet eſſe pars per alterum datum numerum (qui ſemper maior eſſe debet altero) diuidatur, indicabit Quotiens, quota pars, aut partes ſit numerus datus numeri dati. Vt in priori quæſtione, diuiſis 6. per 54. fit Quotiens $\frac{6}{54}$. id eſt, $\frac{1}{9}$. Erit ergo numerus 6. vna nona pars numeri 54. In poſteriori autem quæſtione, diuiſis $\frac{3}{5}$. per $\frac{9}{10}$. fit Quotiens $\frac{30}{45}$. hoc eſt, $\frac{2}{3}$. Continebit ergo numerus $\frac{3}{5}$. duas tertias partes numeri $\frac{9}{10}$. Hoc autem ita eſſe experiri licebit per ſextam quæſtionem. Si enim quæratur numerus, iuxta illam quæſtionem, qui ſit $\frac{1}{9}$. numeri 54. repetietur numerus 6. Si item inueſtigetur, qui numerus contineat $\frac{2}{3}$. numeri $\frac{9}{10}$. inuenietur numerus $\frac{18}{30}$. hoc eſt, $\frac{3}{5}$.

Inuentio partis quā datus numerus exhibet reſpectu alterius numeri dati.

13. Numerus hic 6. cuius numeri erit vna nona pars? Item numerus $\frac{3}{5}$. cuius numeri duas tertias continebit? Diuiſio quæſtiones tales ſoluit. Si namque datus numerus diuidatur per minutiam, quæ ſignificet propoſitam partem, parteſue, dabit Quotiens numerum quæſitum. Vt in quæſtione priori, diuiſis 6. per $\frac{1}{9}$. fit Quotiens 54. Numerus ergo 6. nona pars erit numeri 54. In quæſtione vero poſteriori, diuiſis $\frac{3}{5}$. per $\frac{2}{3}$. fit Quotiens $\frac{9}{10}$. Huius ergo numeri duas tertias continebit hic numerus $\frac{3}{5}$.

Inuētio numeri reſpectu cuius datus numerus exhibeat partem propoſitam.

14. Hic numerus 7. quot octauas partes vnius integri comprehendit? Item numerus hic $\frac{3}{4}$. quot duodecimas partes vnius integri continet? Item hic $\frac{3}{7}$. quot octauas vnius integri complectitur? Multiplicatio huius generis quæſtiones dirimet. Si enim datus numerus per denominatorem partium, quæ quæruntur, multiplicetur, dabit productus numerus numerum partium quæſitum. Vt in prima quæſtione, multiplicatis 7. per 8. fiunt 56. Numerus ergo 7. continebit 56. octauas. In ſecunda autem quæſtione, multiplicatis $\frac{3}{4}$. per 12. fiunt 9. Numerus ergo $\frac{3}{4}$. complectitur nouem duodecimas. In tertia denique quæſtione, multiplicatis $\frac{3}{7}$. per 8. fit numerus $\frac{24}{7}$. hoc eſt, $3\frac{3}{7}$. Numerus ergo $\frac{3}{7}$. continet tres octauas, & $\frac{3}{7}$. vnius octauæ. Atque hoc ita eſſe, perſpicuum eſt. Si enim $\frac{3}{7}$. $\frac{1}{8}$. hoc eſt, $\frac{3}{56}$. & $\frac{3}{8}$. in vnam ſummam colligantur, deprehendentur $\frac{3}{7}$. Ex quo fit, $\frac{3}{7}$. continere $\frac{3}{8}$. & $\frac{3}{7}$. $\frac{1}{8}$.

Inuentio multitudinis partiū quarūcunque, quas datus numerus continet.

REGVLA TRIVM, QVÆ ALIO NOMINE REGVLA AVREA, SIVE REGVLA PROPORTIONVM DICI SOLET.

CAPVT XVII.

HActenus iacta ſunt à nobis neceſſaria Arithmetices fundamenta; ſequuntur iam variæ regulæ, in quibus mirificus eorum vſus apparet, non ſolum Mathematicis, verum etiam mercatoribus, immo vero & cuilibet priuato homini, ſi in commerciis, conuentisque mutuis non vult decipi, aut decipere (quorum illud turpe, hoc vero etiam iniquum foret) maxime vtiles, ac neceſſariæ. Primo autem loco ſeſe offert regula illa nunquam ſatis laudata, quæ ob immenſam vtilitatem, Aurea dici ſolet, vel regula Proportionum, propterea quod in quatuor numeris proportionalibus, quorum priores tres noti ſunt, quartus autem ignotus quæritur, verſetur; vnde & regula trium apud vulgus appellata eſt: quod tres numeros ponat cognitos, & ex ijs quartum ignotum eliciat. Ita autem regula hæc proportionum ſe habet.

Regula aurea, ſiue proportionū, aut regula trium cur ſic dicta ſit.

Diſpoſitis tribus numeris notis, ita vt is, qui quæſtionem habet annexam, (Semper enim vnus illorum quæſtionem ſecum affert, vt in exemplis apparebit) tertio ſtatuatur loco; reliquorum autem ille, qui de eadem eſt re, hoc eſt, qui tertio ſimilis eſt, (Exempla autem declarabunt, in quo ſimilitudo hæc conſiſtat.) primum occupet locum, mediam denique ſedem teneat alter, cui quartus, qui quæritur, ſimilis eſſe debet: Diſpoſitis, inquam, hoc modo numeris, multiplicentur tertius, & medius inter ſe, productusque numerus per primum diuidatur. Nam quotiens numerus erit quartus, qui quærebatur, ſatisfacietque quæſtioni propoſitæ: hoc eſt, tertius numerus ad eum habebit eandem proportionem, quam primus ad ſecundum.

Numeri in regula triū quo pacto ſint collocandi.

Quo pacto per regulā triū quartus numerus ignotus ſit inquirendus.

Exemplum.

Quatuor aureis emuntur 12. libræ piperis, quæritur, quot libræ emi poſſint aureis 20. Hic vides, 20. aureos habere annexam quæſtionem: de illis enim quæritur, quotnam libras exhibere poſſint: Huic numero ſimilis eſt

nume-

numerus 4. aureorum. Nam ſicut 4. aureis emptæ ſunt 12. libræ, ita 20. aureis emendæ ſunt aliæ libræ, ita vt vterque numerus ſit pretium: at 12. libræ piperis ſunt merces. Ita ergo ſtabit exemplum.

Aurei.	Lib.	Aurei.		Lib.
4.	12.	20?	fiunt	60.

Multiplicando autem inter ſe ſecundum, & tertium numerum, & productum 240. per primum diuidendo, inueniemus libras 60. pro quarto numero, qui quærebatur. Vbi vides, quemadmodum primus numerus 4. tertia pars eſt ſecundi numeri 12. ita numerum tertium 20. tertiam partem eſſe quarti numeri inuenti 60.

Aliud Exemplum.

Aureos 60. expendo 5. menſibus, peto, 132. aureos quot menſibus expendam? Hic etiam cernis, quæſtionem fieri de 132. aureis, & huic numero ſimilem eſſe hunc 60. aur. Sic igitur exemplum ſtabit.

Aurei.	Menſes.	Aurei.		Menſes.
60.	5.	132?	fiunt	11.

Multiplicando autem ſecundum numerum, & tertium inter ſe, productumque 660. diuidendo per primum, reperiemus 11. menſes, quibus expendam 132. aureos. Vbi etiam vides, tertium numerum 132. duodecies continere quartum inuentum 11. quemadmodum primus 60. ſecundum 5. complectitur duodecies.

Demõſtratio regulæ trium.

Demonſtratio huius regulæ hæc eſt. Quoniam eadem proportio eſſe debet primi numeri ad ſecundum, quæ tertij ad quartum inuentum, vt dictum eſt, & ex propoſitis exemplis conſtat; neceſſe eſt, ex propoſ. 19. lib. 7. Euclid. eundem numerum produci ex multiplicatione primi numeri per quartum, qui ex ſecundo in tertium gignitur. Cum igitur numerus ex ſecundo in tertium productus diuidatur per primum, vt quartus inueniatur, vt regula trium præcipit; fit vt primus numerus per Quotientem, hoc eſt, per quartum numerum inuentum multiplicatus producat eundem numerum diuiſum, qui nimirum ex ſecundo in tertium fuit procreatus. Nam numero quolibet per alium quemuis numerum diuiſo, ſi diuiſor per Quotientem multiplicetur, neceſſario numerus diuiſus rurſus procreatur, vt in tertio examine Diuiſionis integrorum cap. 5. dictum eſt. Id quod etiam conſtat ex definitionibus Diuiſionis, ac Multiplicationis: quod hoc exemplo propoſito declarabimus. Numerus 12. diuidatur per 4. vt fiat Quotiens 3. qui nimirum, ſecundum definitionẽ diuiſionis. cap 5. traditã, toties vnitatem contineat, quoties diuiſus numerus 12. diuiſorem 4. continet. Dico ſi multiplicemus diuiſorem 4. per Quotientem 3. neceſſario rurſus produci diuiſum numerum 12. Nam cum, iuxta definitionem Multiplicationis cap. 4. traditam, numerus procreari debeat, qui toties contineat diuiſorem 4. qui eſt vnus numerorum multiplicantiũ, quoties numerus quotiens 3. qui eſt alter numerus multiplicãs, vnitatẽ continet? contineat autem diuiſus numerus 12. toties diuiſorem 4. quoties numerus Quotiens 3. vnitatem includit, vt dictum eſt, liquido conſtat, numerũ diuiſum 12. ex dicta multiplicatione diuiſoris 4. per quotientem 3. procreari. Eademque ratio eſt in omnibus aliis numeris. Quæ cum ita ſint, erit omnino numerus Quotiens per regulam trium inuentus, quartus numerus proportionalis, qui quæritur, vt ex dicta propoſ. 19. lib. 7. Eucl. conſtat: quandoquidem idem numerus producitur ex primo numero in quartum, qui ex ſecundo in tertium, vt diximus.

Numero per aliũ diuiſo ſi diuiſor per Quotientẽ multiplicetur, cur rurſum numerus diuiſus producatur.

Probatio regulæ triũ.

Ex his, quæ proxime ſcripſimus, facile colligitur, qua ratione regula trium poſſit examinari. Nam ſi idem procreetur numerus ex primo numero in quartum inuentũ, qui ex ſecundo in tertium, dubitandum non eſt, quin recte inuentus ſit quartus numerus proportionalis: ſi vero non idem numerus gignatur, repetenda erit operatio.

Alia probatio regulæ trium.

Eſt tamen alia probatio regulæ trium, à pleriſq; vſurpata, quæ fit hoc modo. Statuatur primus numerus in tertio loco, & tertius in primo, quartuſque in medio. Si namque, iuxta præceptum regulæ trium, reperiatur hoc modo quartus numerus, qui prius erat ſecundus, recte ſoluta fuit quæſtio propoſita. vt primum exemplum ſupra allatum ita ſtabit.

Aurei.	Libræ.	Aurei.		Libræ.
20.	60.	4?	fiunt	12.

Nam ſi verum eſt, 20. aureis emi 60. lib. propterea quod 4. aureis emptæ ſunt libræ 12. efficitur neceſſario, vt viciſſim 4. aureis emantur libræ 12. hoc ipſo, quod 20. aureis, libræ 60. emantur.

Poſſunt interdum duo numeri ex datis tribus, vt primus & ſecundus, vel primus & tertius, ad minores redigi, vt facilior reddatur operatio. Quod quidem fiet, ſi tam primus, quàm ſecundus; vel tam primus, quam tertius, per communem aliquam vtriuſque menſuram notam, ſiue ea maxima ſit ſiue non maxima, diuidatur & loco illorum Quotientes ſtatuantur. vt in hoc exemplo.

4.	12.	20?	fiunt	60.

Quoniam numerus 4. metitur primum, & ſecundum, ſi, diuiſo vtroque per 4. Quotientes 1. & 3. pro illis ponantur, ita ſtabit exemplum.

1.	3.	20?	fiunt	60.

Item quia in eodem exemplo numerus idem 4. numerat primum & tertium, ſi, diuiſo vtroque per 4. Quotientes 1. & 5. pro illis accipiantur, ſic ſtabit idem exemplum.

1.	12.	5?	fiunt	60.

Item in ſequenti hoc exemplo.

36.	48.	63?	fiunt	84.

Quoniam numerus 12. metitur primum, & ſecundum, ſi, diuiſo vtroque per 12. Quotientes 3. & 4. pro illis reponantur, ita ſtabit exemplum.

3.	4.	63?	fiunt	84.

Item quia numerus 9. metitur primum, & tertium in eodem exemplo, ſi, diuiſo vtroque per 9. Quotientes 4. & 7. pro illis in regula collocentur, ſic ſtabit exemplum.

4.	48.	7?	fiunt	84.

Rurſus

Rurſus hoc etiam modo qnæſtio propoſita ſoluetur. Diuidatur ſecundus numerus per primum, & per Quotientem tertius multiplicetur: vel tertius per primum diuidatur, & per Quotientem multiplicetur medius. Vtroque enim modo productus numerus erit quartus proportionalis, qui quæritur. Vt in hoc exemplo.

60.	360.	132?	fiunt	792.

Diuiſo ſecundo numero per primum, fit Quotiens 6. per quem ſi multiplicetur tertius numerus gignetur quartus 792. ac ſi iuxta præceptum regulæ trium operatus eſſes. Item diuiſo tertio numero per primum, fit Quotiens $2\frac{12}{60}$. hoc eſt, $2\frac{1}{5}$. ſiue $\frac{11}{5}$. per quem ſi multiplicetur ſecundus, producetur idem quartus 792.

His recte intellectis, varijs modis examinare poteris, num per regulam trium quartus numerus recte ſit inuentus, necne. Nam ſi per varias huiuſmodi operationes eundem ſemper quartum numerum repereris, maximo argumento eſt, operationem recte eſſe inſtitutam.

Quod ſi quis roget, qui fieri poſſit, vt per tot vias ad eundem ſemper ſcopum perueniamus, ſciat, huius rei cauſam totam ex proportionibus pendere. Quoniam enim eadem proportio eſſe debet inter primum numerum, & ſecundum, quæ inter tertium, & quartum; fit vt permutando eadem proportio ſit inter primum, & tertium, quæ inter ſecundum, & quartum; Item & conuertendo eadem inter ſecundum. & primum, quæ inter quartum, & tertium; nec non eadem inter tertium, & primum, quæ inter quartum, & ſecundum. Cum ergo ſemper eadem proportio ſit inter Quotientes duorum numerorum per eundem numerum diuiſorum, quæ inter ipſos numeros; perſpicuum eſt, ſi diuidatur tam primus numerus, quam ſecundus, vel tam primus, quam tertius, per communem aliquam menſuram eandem, & pro ipſis numeris Quotientes reponantur, eſſe adhuc eandem proportionem inter Quotientes primi, & ſecundi numeri, quæ eſt inter tertium numerum, & quartum; Item eandem eſſe proportionem inter Quotientes primi, & tertij numeri, quæ eſt inter ſecundum numerum, & quartum. Rurſus quoniam, diuiſo numero quouis per alium numerũ, producitur denominator proportionis, quam diuiſus numerus habet ad diuiſorem, denominator autem alium quemcunq; numerũ multiplicans, producit numerum, qui ad multiplicatum proportionem habet à dicto denominatore denominatam; fit, vt diuiſo ſecundo, aut tertio numero per primum, Quotiens ſit denominator proportionis ſecundi, aut tertij numeri ad primum. Quare ſi per hunc Quotientẽ multiplicetur tertius numerus, aut ſecundus, procreabitur quartus; qui videlicet eandem proportionem habeat ad tertiũ, quam ſecundus ad primum, vel eandem ad ſecundum, quam tertius ad primum.

Quoniam vero freqnenter quæſtiones per regulam trium ſoluendæ præpoſtero ordine proponuntur, interdum etiam diuerſæ monetæ, menſuræ, vel pondera in vno numero reperiuntur, deniq; non raro primus numerus diſſimilis eſt tertio, vt facile hærere, atque impediri poſſit is, qui parum in rebus Arithmeticis eſt verſatus, explicabimus quæſtionibus aliquot varias difficultates, quæ occurrere poſſunt, hinc exordientes. *Quæſtiones nonnullæ, quibus varia difficultates regulæ triũ explicantur.*

1. Quanti conſtat vna libra piperis, ſi 60. libræ emptæ ſint aureis 20? In hac quæſtione præpoſtere poſiti ſunt numeri. Nam 1. libra, cuius primo loco mentio fit, quæſtionem habet annexam, ac proinde tertium occupare debet locum, primum vero numerus 60. librarum, cum numero vnius libræ ſit ſimilis. Itaque recto ordine proponenda fuiſſet quæſtio hoc modo. Libræ 60. piperis conſtant 20. aureis, libra ergo 1. quanti conſtabit? vt in appoſito hic exemplo apparet.

Lib.	Aur.	Lib.		Aurei.
60.	20.	1?	fiunt	$\frac{20}{60}$. ſiue $\frac{1}{3}$.

Inuenies autem (ſi ſecundum numerum per tertium multiplices, productumque 20. per primum partiaris) valorem 1. libræ eſſe $\frac{20}{60}$. vel $\frac{1}{3}$. vnius aurei, quia cum minor numerus per maiorem diuiditur, fit fractio, cuius numerator eſt numerus diuidendus, denominator autem diuiſor vt cap. 5. & 6. diximus. Reducetur autem vtrauis harum minutiarum, nempe prior ad baiochos hoc modo. Multiplicetur numerator 20. per 100. (tot enim baiochi vnum aureum conficiunt.) productusque numerus 2000. per denominatorem 60. diuidatur. Quotiens enim dabit baiochos $33\frac{20}{60}$. ſiue $33\frac{1}{3}$. Tantundem inueniſſes, ſi poſterioris minutiæ $\frac{1}{3}$. numeratorem per 100. multiplicaſſes, productumque per denominatorem diſtribuiſſes. Quod ſi $\frac{1}{3}$. vnius baiochi ad quatrinos velis reuocare, multiplicabis numeratorem per 4. (cum tot quatrini baiochum conficiant.) productumque per denominatorem partieris. Inuenies enim quatr. $1\frac{1}{3}$. Itaque 1. libra conſtabit baioc. 33. quatr. $1\frac{1}{3}$.

2. Si libræ $10\frac{2}{5}$. & vnciæ $7\frac{1}{2}$. ceræ albæ conſtent aureis 2. & Iul. 6. quantum ceræ emetur baiochis 90? Sic ſtabit exemplum. *Quæſt. 2.*

Aur.	Iul.	Lib.	Vnc.	Baioc.		Vnc.
2.	6.	$10\frac{2}{5}$.	$7\frac{1}{2}$.	90?	fiunt	$45\frac{207}{260}$.

Quoniam vero in primo numero, ac tertio diuerſæ monetæ continentur, reducendæ erunt omnes ad minimam monetam ibi expreſſam, vt ad baiochos, eruntque in primo numero baiochi 260. Rurſus quia in ſecundo numero reperiuntur diuerſa pondera, redigenda erunt ad minima ibi expreſſa, vt ad vncias, quarum 12. vnam libram efficiunt, eruntque in $10\frac{2}{5}$. libris vnciæ $124\frac{4}{5}$. quibus ſi addantur vnciæ $7\frac{1}{2}$. fient vnciæ $132\frac{3}{10}$. Quo pacto autem fractiones vel ſolæ, vel vna cum integris multiplicari inter ſe debeant, aut diuidi, docuimus cap. 13. & 14. Itaque ſic ſtabit exemplum reductum. *Quid agẽdum quando diuerſa moneta, menſura, pondera, & fractiones occurrũt.*

Baioc.	Vnc.	Baioc.		Vnc.
260.	$132\frac{3}{10}$.	90?	fiunt	$45\frac{207}{260}$.

Illud vero hoc loco annotandum eſt, minutiam ex multiplicatione medij numeri per tertiam productam, licet eius numerator ſit denominatore maior, non debere redigi ad integra, donec diuiſio ſit abſoluta, ne operatio impediatur. Vnde quia tunc multiplicatio medij nnmeri per tertium facit $\frac{119070}{10}$. diuidenda erit hæc minutia, antequam ad integra reducatur, per primum numerum: quæ diuiſio dabit hanc minutiam $\frac{119070}{2600}$. continentem vncias $45\frac{207}{260}$.

D 3. Quan-

10. Vlnas aliquot panni emit quidam 44. aureis, atque eodem pretio alius deinde aureis 220. emit vlnas 260. quot ergo vlnas prior emit? Stabit exemplum hoc modo. *Quæſt. 10.*

Aur.	Vlnæ.	Aur.		Vlnæ.
220.	260.	44?	fiunt	52.

Appoſui quatuor hæc poſtrema exempla, in quibus iidem quatuor numeri regulæ trium varijs modis vices inter ſe permutant, quippe cum quiſque illorum ex alijs tribus datis eruatur, vt intelligas, quo pacto te gerere debeas in alijs quæſtionibus ſimilibus.

REGVLA TRIVM EVERSA.

CAPVT XVIII.

DIximus, in quatuor numeris regulæ trium eam proportionem eſſe primi numeri ad ſecundum, quæ eſt tertij ad quartum, atque adeo, (vt ex propoſ.14.lib.5. Euclid colligitur.) ſi primus maior eſt, vel minor tertio, ſecundum quoque maiorem eſſe, vel minorem quarto; id quod in exemplis omnibus hactenus adductis perſpicuum eſſe poteſt. Solet autem nonnunquam accidere, vt quo maior eſt primus numerus tertio, eo minor eſſe debeat ſecundus quarto; & quo minor eſt primus tertio, eo maior eſſe debeat ſecundus quarto. Quare contraria tunc via tenenda erit, nempe primus numerus per ſecundum multiplicandus, numerusque productus per tertium diuidendus. Quando autem hæc regula trium euerſa (ita eam appellant) adhibenda ſit, & ratio naturalis dictare videtur, & clariſſime ex ſequentibus exemplis intelligi poteſt, quorum primum hoc ſit. *Regula trium euerſa quo pacto quartum numerum eliciat.*

1. Pannus 9. vlnarum, cuius latitudo eſt 3. palmorum, emitur à quodam, vt ſibi tunica conficiatur. Quot ergo vlnæ alterius panni, cuius latitudo eſt 2. palmorum, requirantur ad eandem tunicam, vel ſimilem conficiendam? Quoniam quæſtio eſt de panno latitudinem habente 2. palmorum, ita ſtabit exemplum. *Quæſt. 1.*

Palmi latitud.	Vlnæ.	Palmi latitud.		Vlnæ.
3.	9.	2?	fiunt	$13\frac{1}{2}$.

Hic manifeſte vides, quo anguſtior eſt ſecundus pannus, eo plures vlnas eſſe neceſſarias. Quare licet primus numerus tertio maior ſit, non tamen propterea ſecundus maior etiam eſſe debet quarto, ſed minor; ita vt quam proportionem habet tertius numerus ad primum, eam habeat ſecundus ad quartum. Hinc fit, vt primus per ſecundum ſit multiplicandus, numerusque productus per tertium diuidendus: quia vt debita proportio ſeruetur, tertius numerus primum locum obtinere debet in regula proportionum, vt dictum eſt, atque hic apparet.

Palmi latitud.	Palmi latitud.	Vlnæ.		Vlnæ.
2.	3.	9?	fiunt	$13\frac{1}{2}$.

2. Quidam accepit mutuo ab alio 4000. aur. ad annos 3. quos cum ei reſtitueret, nullum cenſum accipere voluit, ſed tantum petijt, vt ei viciſſim pecuniam mutuo daret. Dedit ergo ei mutuo 7480. aur. Quamdiu ergo hic pecuniam iſtam retinere debet, vt ei ſatisfiat pro beneficio præſtito per 4000. aur. quos illi accommodauerat? In hac quæſtione, quia numerus 7480. aur. ſecum habet quæſtionem, collocandi erunt numeri hoc ordine. *Quæſt. 2.*

Aur.	Anni.	Aur.		Anni.	Dies.	Horæ.
4000?	3.	7480?	fiunt	1.	220.	$13\frac{80}{187}$

Perſpicuum etiam hic eſt, maiorem cenſum deberi in æquali tempore aureis 7480. quam aur. 4000. atque adeo minori tempore opus eſſe, quã 3. anni vt idem cenſus, qui debetur aur. 4000. tribus annis, lucrifiat ex aur. 7480. Quare licet primus numerus minor ſit, quam tertius, non tamẽ idcirco ſecundus minor etiam erit, quam quartus, ſed maior; ita vt quam proportionem habet tertius numerus ad primum, eam habeat ſecundus ad quartum. Ex quo fit, multiplicandum eſſe primum per ſecundum, productumque numerum per tertium diuidendum: quia vt debita proportio ſeruetur, tertius numerus primum locum obtinere debet in regula proportionum, vt dictum eſt, atque hic apparet.

Aur.	Aur.	Anni.		Anni.	Dies.	Horæ.
7480.	4000.	3?	fiunt	1.	220.	$13\frac{80}{187}$.

3. Quando menſura tritici emitur 6. aureis, panis vno baiocho emptus, iuxta ciuitatis alicuius ordinationem, pondus habet 10. vnciarum; Iam ſi eadem menſura tritici ematur 4. aureis, vel 8. aureis, quantum eſſe debet eiuſdem panis pondus? Ita ſtabunt exempla. *Quæſt. 3.*

Aur.	Vnciæ.	Aur.		Vnciæ.
6.	10.	4?	fiunt	15.
6.	10.	8?	fiunt	$7\frac{1}{2}$.

Ratio dictat, quo vilius eſt triticum, eo maius pondus habiturum panem, & quo carius, eo minus. Talis enim proportio debet eſſe 4. aur. ad 6. aur. vel 8. aur. ad 6. aur. qualis eſt ponderis 10. vnciarum ad pondus ignotum, quod quæritur. Vnde iuxta regulam proportionum ita collocandi eſſent numeri.

Aur.	Aur.	Vnciæ.		Vnciæ.
4.	6.	10.	fiunt	15.
8.	6.	10?	fiunt	$7\frac{1}{2}$.

4. Operarij 30. perficiunt opus quoddam in 4. annis; quanto ergo tempore idem abſoluent 50. operarij, vel 20? vel, quot operarij idem abſoluent in annis 2. & diebus 146? Vel in annis 4. & diebus 292? Quadru- *Quæſt. 4.*

plex hoc exemplum ita ſtabit, reductis annis (quorum quilibet ſtatuatur dierum 365.) ad dies, in poſteriori-bus duobus exemplis.

Operarij.	Anni.	Operarij.		Anni.	Dies.
30.	4.	50?	fiunt	2.	146.
30.	4.	20?	fiunt	6.	0.

Dies.	Operarij.	Dies.		Operarij.
1460.	30.	876?	fiunt	50.
1460.	30.	1752?	fiunt	25.

Quo enim plures ſunt operarij, eo minori tempore opus eſt, quo autem pauciores, eo maiore. Item quo minus tempus eſt, eo pluribus operarijs opus eſt, quo autem maius, eo paucioribus. Igitur iuxta regulam proportionum ita collocarentur numeri.

Operarij.	Operarij.	Anni.		Anni.	Dies.
50.	30.	4?	fiunt	2.	146.
20.	30.	4?	fiunt	6.	0.

Dies.	Dies.	Operarij.		Operarij.
876.	1460.	30?	fiunt	50.
1752.	1460.	30?	fiunt	25.

Quæſt. 5. 5. Obſeſſus quidam exercitus 8500. militum victum habet ad 11. menſes; verum ſpes nulla eſt ſolutionis obſidionis, vel futuri auxilij, niſi poſt 25. menſes. Quot ergo milites retinendi ſunt, vt reliquis victus ſufficiat ad 25. menſes? Numeri ita diſponendi ſunt.

Menſes.	Milites.	Menſes.		Milites.
11.	8500.	25?	fiunt	3740.

Retinendi ergo erunt milites 3740. his enim victus ſufficiet ad 25. menſes, dimittendique propterea erunt milites reliqui 4760.

REGVLA TRIVM COMPOSITA.

CAPVT XIX.

Regula triũ compoſita quid & quomodo fiat. FIT, vt interdum plures, quam tres numeri proponantur noti, ita tamen, vt ſint ſemper tres principales, alij autem illis adiuncti minus principales, denotantes vel tempus, vel lucrum, damnumue. Quod vbi contigerit, fit regula trium compoſita, & tunc vel inſtituenda erit regula trium bis, aut ter, vel quilibet per ſibi adiunctos multiplicandus, vt fiant tres tantum numeri noti, per quos quartus ignotus eliciatur, vel certe alia quædam via tentanda. Id quod ſequentibus exemplis perſpicuum fiet, in quibus variæ quæſtiones de lucro, damno, interueniente etiam diuerſitate temporis, & varietate lucri in ratione tot pro 100. diſcutientur.

Quæſt. 1. 1. Sunt 8. in communi conuictu, quorum ſinguli ſingulis mẽſibus ſoluunt 6. aureos. Quantum ergo erit pretium victus omnium ad 4. annos? Hæc quæſtio ita recte proponeretur. Vnus in vno menſe ſoluit 6. aureos: quid ergo ſoluent 8. in 4. annis, hoc eſt, in 48. menſibus? Ita autem collocandi erunt numeri.

Conuictor.	Menſes.	Aur.	Conuictores.	Menſes.
1.	1.	6.	8.	48?
	fiunt	Aur.	2304.	

Vbi vides, primum numerum vnius conuictoris habere adiunctum vnum menſem, tertium autem 8. conuictorum habere adiunctos 48. menſes. Primo ergo ita inſtituetur regula trium. Si vnus ſoluit 6. aureos, quantum ſoluent 8? vt hic.

Conuict.	Aur.	Conuict.		Aur.
1.	6.	8?	fiunt	48.

Soluent ergo 8. conuictores in vno menſe 48. aureos, cum vnus ſoluat 6. aureos in menſe. Secundo ergo iterum ita inſtituetur regula trium. Si in vno menſe ſoluunt 48. aureos, quantum ſoluent in 48. menſibus? vt hic.

Menſis.	Aur.	Menſes		Aurei.
1.	48.	48?	fiunt	2304.

Breuius tamen eadem quæſtio explicabitur, ſi tam duo numeri in principio quæſtionis primo loco poſiti inter ſe, quam duo tertio loco poſiti inter ſe multiplicentur, vt fiant tres numeri regulæ trium hoc modo.

	Aur.			Aur.
1.	6.	384?	fiunt	2304.

Nam ex hac multiplicatione procreatur numerus maior conuictorum pro vno menſe, qui æquiualet minori pro pluribus menſibus. Vt ex multiplicatione 8. conuictorũ per 48. menſes producuntur 384. conuictores pro vno menſe Si enim ſingulis menſibus ſunt 8. conuictores, procul dubio in 48. menſibus, ſi accederent ſemper noui conuictores, fierent 384. conuictores: atq; ita tantum ſoluent hi 384. conuictores in vno menſe, quantũ 8. conuictores in 48. menſibus. Hæc eſt cauſa cur multiplicandi ſint numeri principales, per adiunctos minus principales, qui tempus ſignificant, vel aliud quippiam, dummodo non ſit de eadem re, quã ſignificant numeri principales; alioquin non eſſent duo numeri, ſed vnus. Vt ſi in aliquo loco poſiti ſint aurei, baiochi, & quatrini, cenſe-

cenſebuntur tres hi numeri pro vno, cum ſint de eadem re, vtpote qui monetam ſignificent. Eademque ratio eſt proportione quadam in alijs huiuſmodi quæſtionibus.

2. Pro 200. libris quarundam mercium aduectis per 100. milliaria ſoluendi ſunt 4. aurei: quantum ergo ſoluendum eſt pro 300. libris aduectis per 400. milliaria? Ita collocabuntur numeri. *Quæſt. 2.*

Lib.	Mill.	Aur.	Lib.	Mill.		Aur.
200.	100.	4.	300.	400?	fiunt	24.

Multiplicatis duobus numeris primi loci, & duobus tertij loci inter ſe, confecti erunt tres numeri regulæ trium hoc pacto.

	Aur.			Aur.
20000.	4.	120000?	fiunt	24.

Si eadem hæc quæſtio ſoluenda ſit per regulam trium bis repetitam, ita ſtabit primo loco exemplum.

Lib.	Aurei.	Lib.		Aurei.
200.	4.	300?	fiunt	6.

Atque ita ſoluendi eſſent 6. aurei pro 300. libris per 100. milliaria aduectis, per quot nimirum 200. libræ ſunt aduectæ. Sed quoniam 300. libræ vehendæ ſunt per 400. milliaria, ita rurſus ſtabit ſecundo loco exemplum.

Mill.	Aur.	Mill.		Aur.
100.	6.	400?	fiunt	24.

3. Tres Perſonæ conſumunt modium tritici 3. aureis emptum in 5. ſeptimanis, quantus ergo eſt ſingularum ſumptus in vno die? Ita numeri ordinandi erunt. *Quæſt. 3.*

Perſ.	Sept.	Aur.	Perſ.	Dies.
3.	5.	3.	1.	1?

fiunt Aur. $\frac{1}{105}$. hoc eſt, quatrini $11\frac{3}{7}$.

Reductis autem 5. ſeptimanis ad dies, vt primus numerus, ac tertius ſimiles ſint, ita ſtabit exemplum.

Perſ.	Dies.	Aur.	Perſ.	Dies.
3.	35.	3.	1.	1?

fiunt Aur. $\frac{1}{105}$. hoc eſt, quatrini $11\frac{3}{7}$.

Multiplicatis duobus numeris primi loci, & duobus tertij inter ſe, diſponentur tres numeri ad regulam trium hoc modo.

	Aur.			Aur.		quatrini.
105.	3.	1?	fiunt	$\frac{1}{105}$.	hoc eſt,	$11\frac{3}{7}$.

Per regulam trium bis repetitam ita ſoluetur eadem quæſtio.

Perſ.	Aur.	Perſ.		Aur.
3.	3.	1?	fiunt	1.

Item.

Dies.	Aur.	Dies.		Aur.		quatrini.
35.	1.	1?	fiunt	$\frac{1}{35}$.	hoc eſt,	$11\frac{3}{7}$.

4. Si 300. aurei in 4. annis lucrantur 100. aureos, quid lucrabuntur 1580. aurei in 7. annis? Multiplicatis aureis, qui ad lucrum exponuntur, per tempus adiunctum, ita ſtabit exemplum. *Quæſt. 4.*

	Aur.			Aur.
1200.	100.	11060?	fiunt	$921\frac{2}{3}$.

Per regulam trium bis repetitam ita ſtabit exemplum.

Aur.	Aur. lucrum.	Aur.		Aur. lucrum.
300.	100.	1580?	fiunt	$526\frac{2}{3}$.

Item.

Anni.	Aur.	Anni.		Aur.
4.	$526\frac{2}{3}$.	7.	fiunt	$921\frac{2}{3}$.

5. Quidam in tribus menſibus 10. aureis lucratus eſt 4. aureos in quanto ergo tempore 100. aureis lucrabitur 2000. aureorum? Hæc quæſtio redigi non poteſt ad ſimplicem regulam trium, propterea quod tempus, in quo 100. aurei lucrari debent 2000. aureos, ignotum eſt, atque adeo per 100. aureos multiplicari non poteſt. Adhibenda ergo erit regula trium bis, hoc modo. *Quæſt. 5.*

Aur.	Aur. lucr.	Aur.		Aur. lucr.
10.	4.	100?	fiunt	40.

Atque ita 100. aurei lucrabuntur 40. aureos in tribus menſibus, in quibus 10. aurei lucrati ſunt 4. Quare vt ſciatur, in quanto tempore 100. aurei lucraturi ſunt 2000. inſtituetur ſecundo regula trium hoc modo.

Aur.	Menſes.	Aur.		Menſes.
40.	3.	2000?	fiunt	150.

Itaque ſi 10. aurei in 3. menſibus lucrantur 4. aureos, 100. aurei lucrabuntur 2000. aur. in 150. menſibus. Quod facile probabitur, ſi quæſtio ita proponatur. Si 10. aur. in 3. menſ. lucrantur 4. aur. quantum in 150. menſ. lucrabuntur aurei 100? Reperietur enim lucrum 2000. aur. vt hic apparet.

Aur.	Menſ.	Aur.	Aur.	Menſ.		Aur.
10.	3.	4.	100.	150.	fiunt	2000.

Nam ſi tempus quodlibet per ſuam pecuniam multiplicetur, ſtabit exemplum ad ſimplicem regulam trium reductum hoc modo.

	Aur.			Aur.
30.	4.	15000?	fiunt	2000.

Quæſt. 6. 6. Si 100. aurei in 8. menſibus lucrantur 20. aureos, in quanto tempore iidem 100. aurei lucrabuntur 3000. aur? Diſpoſitio numerorum ita ſe habet.

Aur.	Menſ.	Aur.		Menſ.
20.	8.	3000?	fiunt	1200.

Quando enim eadem ſemper ſumma exponitur ad lucrum, non ponenda eſt ea inter numeros alios. Idem etiam fiet, quando idem tempus proponitur, vt in ſequenti exemplo apparebit.

Quæſt. 7. 7. Si 300. aurei in 7. menſibus lucrantur 45. aureos, quid lucrabuntur 1780. aurei in eiſdem 7. menſibus? Ita ſtabit exemplum.

Aur.	Lucr. aur.	Aur.		Lucr. aur.
300.	45.	1780.	fiunt	267.

Quæſt. 8. 8. Si ſingulis militibus in ſingulos menſes tribuerentur 4. aurei, quantum pecuniæ expenderetur in militibus 13000. nouem menſibus? Ita ſtabit exemplum.

Milit.	Menſ.	Aur.	Milit.	Menſ.	Aur.
1.	1.	4.	13000.	9?	fiunt 468000.

Quæſt. 9. 9. Si 10. equis quotidie dentur 7. menſuræ hordei, vel auenæ, quot menſuræ, iuxta eandem diſtributionem, conuenient 100. equis ad 20. dies? ita ſtabit exemplum.

Equi.	Dies.	Menſuræ.	Equi.	Dies.	Menſuræ
10.	1.	7.	100.	20?	fiunt 1400.

Quæſt. 10. 10. Si duodecim meſſores demetant 20. iugera in 9. diebus, quanto tempore 30. meſſores demetent 45. iugera? Hic opus eſt regula trium bis repetita, primo tamen loco euerſa, quod 30. meſſores minori tempore indigeant ad demetenda 20. iugera, quam 12. meſſores. Ita ergo ſtabit regula trium euerſa.

Meſſores.	Dies.	Meſſores.		Dies.
12.	9.	30?	fiunt	$3\frac{3}{5}$.

Atque diebus $3\frac{3}{5}$. demetent 30. meſſores 20. iugera. Quare ita rurſum ſtabit exemplum ad regulam trium.

Iugera.	Dies.	Iugera.		Dies.
20.	$3\frac{3}{5}$.	45.	fiunt	$8\frac{1}{10}$.

Quæſt. 11. 11. Romæ aureus ducatus æſtimatur Iulijs $11\frac{1}{2}$. hoc eſt, baiochis 115. Quot ergo eiuſmodi ducatos recipiam pro 1000. aureis, quorum ſinguli 10. Iulijs, ſiue 100. baiochis æſtimantur? Vel ſi 20. ducati conſtituant 23. aureos, quot ducatos efficient 1000. aurei? Vtrumque exemplum ſic ſtabit, reductis prius 1000. aureis ad baiochos 100000.

Baioc.	Duc.	Baioc.		Duc.
115.	1.	100000?	fiunt	$869\frac{13}{23}$.
Aur.	Duc.	Aur.		Duc.
23.	20.	1000?	fiunt	$869\frac{13}{23}$.

Quæſt. 12. 12. Quot aureos reddent ducati 4000. ſi 1. aureus contineat 100. baiochos, at 1. ducatus 115. baiochos? vel vel ſi 20. ducati æſtimentur 23. aureis, quot aureos continebunt ducati 4000? Reductis 4000. ducatis prioris exempli ad baiochos 460000. ſic ſtabit vtrumque exemplum.

Baioc.	Aur.	Baioc.		Aur.
100.	1.	460000?	fiunt	4600.
Duc.	Aur.	Duc.		Aur.
20.	23.	4000?	fiunt	4600.

Quæſt. 13. 13. Mercator quidam emit 300. libras cuiuſdam mercis aureis 60. ſcire autem cupit, quantum pro 100. aureis lucraturus ſit, ſi eaſdem 300. libras vendat 64. aureis? vel quantum pro 100. aureis perditurus ſit, ſi 300. illas libras vendat 57. aureis? Hic manifeſtum eſt, eum pro 60. aureis eſſe lucraturum 4. aureos, vel perditurum 3. aureos: vt patet, ſi minus pretium à maiori ſubducatur. Dic ergo. Si 60. aur. lucrantur 4. aureos, vel perdunt 3. aur. quantum lucrabuntur, vel perdent 100. aurei?

Aur.	Lucr. aur.	Aur.		Lucr. aur.
60.	4.	100?	fiunt	$6\frac{2}{3}$.
Aur.	Damnum aur.	Aur.		Damnum aur.
60.	3.	100?	fiunt	5.

Quæſt. 14. 14. Quærit apud ſe mercator quidam, quanti emendæ ſint libræ 100. alienius mercis, vt eædem poſtea venditæ 64. aureis lucrum dent aur. $6\frac{2}{3}$. pro 100. aur? Perſpicuum eſt, eum, qui $6\frac{2}{3}$. aur. lucrari vult pro 100. aur. augere velle 100. vt fiant $106\frac{2}{3}$. Dic ergo. Si $106\frac{2}{3}$. aur. qui continent & pretium 100. aureorum, & lucrum $6\frac{2}{3}$. aur. proueniunt ex 100. aureis, ex quo prouenient 64. aurei, qui continent & pretium 100. librarum ignotum, & lucrum ſimul, ignotum etiam, quod reddat $6\frac{2}{3}$. pro 100.

Pret. & lucr.	Aur.	Pretium, & lucr.		Aur.
$106\frac{2}{3}$.	100.	64?	fiunt	60.

Emen-

Emendæ ergo ſunt 100. libræ aureis 60. Nam diuenditæ poſtea 64. aureis dant lucrum 4. aureorum, ant pro 100. dabunt lucrum $6\frac{2}{3}$. aur.

15. Empta eſt gemma quædam, quæ ſi vendatur 200. aureis, perduntur 10. aurei pro 100. quanti ergo Quæſt. 15.
conſtitit gemma illa? Hic etiam clarum eſt, eum, qui perdit 10? pro 100. facere 90. ex 100. Hic ergo. Si 90. aur. fiunt ex 100. aur. ex quo fient 200. aur.

Aur.	Aur.	Aur.		Aur.
90.	100.	200?	fiunt	$222\frac{2}{9}$.

conſtitit ergo gemma illa $222\frac{2}{9}$. aur. Quod vt probes, dic. Si ex $222\frac{2}{9}$. aur. fiunt 200. aur. quid fiet ex 100? Inuenies enim fieri. 90. aureos, ac proinde damnum fieri 10. aureorum pro 100. vt hic vides.

Aur	Aur	Aur		Aur
$222\frac{2}{9}$.	200.	100?	fiunt	90.

Vel dic. Si pro $222\frac{2}{9}$. aur. amitto $22\frac{2}{9}$. aur. (Nam ſi gemma illa. empta ſit $222\frac{2}{9}$. aur. vendatur autem 200. aureis, liquido conſtat, damnum fieri $22\frac{2}{9}$. aur.) pro 100. quid amittam? Inuenies enim damnum 10. aureorum, vt hic apparet.

Aur.	Damnum aur.	Aur.		Damnum aur.
$222\frac{2}{9}$.	$22\frac{2}{9}$.	100?	fiunt	10.

16. Emit quidam 1000. vlnas panni certo pretio, quas ſi 3. aureis minores emiſſet. & vendidiſſet poſtea Quæſt. 16.
3600. aureis lucratus fuiſſet 10. pro 100. aureis: quanti ergo 1000. illas vlnas emit? Quoniam qui lucrari cupit 10. pro 100. vult ex 100. facere 110. Dic ergo. Si 110. fiunt ex 100. ex quo fient 3600? vt hic cernis.

Aur.	Aur.	Aur.		Aur.
110.	100.	3600?	fiunt	$3272\frac{8}{11}$.

Si igitur voluiſſet tantum lucrari 10. pro 100. conſtitiſſent ille 1000. vlnæ aureis $3272\frac{8}{11}$. Nam ſi $3272\frac{8}{11}$. aur. dant 3600. aureos, aurei 100. dabunt 110. aureos, ac proinde 10. cedent in lucrum ex 100. vt hic patet.

Aur.	Aur.	Aur.		Aur.
$3272\frac{8}{11}$.	3600.	100?	fiunt	110.

Vel ſi certe $3272\frac{8}{11}$. aur. lucrantur $327\frac{3}{11}$. aur. (Qui enim emit quippiam $3272\frac{8}{11}$ aureis, poſtea autem vendit aureis 3600. lucratur neceſſario $327\frac{3}{11}$. aur.) 100. aur. lucrabuntur 10. aur. vt hic vides.

Aur.	Lucr. aur.	Aur.		Lucr. aur.
$3272\frac{8}{11}$.	$327\frac{3}{11}$.	100?	fiunt	10.

Sed quoniam in quæſtione additum eſt, eum lucraturum fuiſſe 10. aur. pro 100. ſi 1000. illas vlnas 3. aureis minoris emiſſet, vendidiſſetque 3600. aureis; liquido conſtat, eum 3. aureos expendiſſe vltra $3272\frac{8}{11}$. aureos. Quare 1000. conſtiterunt $3275\frac{8}{11}$. aur.

17. Emit quidam 1000. vlnas panni certo pretio, quæ ſi 6. aur. conſtitiſſent, & venditæ poſtea fuiſſent Quæſt. 17.
3600. aureis, perditi fuiſſent 10. aur. pro 100. quantum ergo fuit pretium illarum 1000. vlnarum? Quoniam qui perdit 10. pro 100. facit 90. ex 100. Dic ergo. Si 90. fiunt ex 100. ex quo fient 3600?

Aur.	Aur.	Aur.		Aur.
90.	100.	3600?	fiunt	4000.

Si igitur perdidiſſet tantum 10. pro 100. conſtitiſſent 1000. vlnæ 4000. aureis. Nam ſi 4000. aur. dant 3600. aur, dabunt 100. aurei aureos 90. vt patet. Vel ſi 4000. aur. pendunt 400. aur. (Qui enim emit rem aliquam 4000. aureis, eandem autem vendit 3600. perdit omnino 400. aur.) 100. aurei perdent 10. aureos, vt hic vides.

Aur.	Dam. aur.	Aur.		Damn. aur.
4000.	400.	100?	fiunt	10.

Quia vero additum eſt in Quæſtione, eum perditurum fuiſſe 10. pro 100. ſi 1000. vlnas 6. aureis pluris emiſſet, eaſque vendidiſſet poſtea 3600. aureis; liquet, eum 6. aureos minus expendiſſe, quam 4000. Quare 1000. vlnæ conſtiterunt 3994. aur.

18. Qui ſingulas libras mercis alicuius vendit 20. baiochis, lucratur 30 pro 100. quantum ergo lucrabi- Quæſt. 18.
tur, ſi vendat maiori pretio, nempe 24. baiochis? Hic primum inueſtigare oportet, quanti conſtat vna libra, vt vendita 20. baiochis, det lucrum 30. pro 100. vt in quæſtione 14. docuimus, hoc modo. Si 136. (pretium nimirum 100. & lucrum 30?) proueniunt ex 100. vt pretio; ex quo prouenient 20. baiochi, qui continent & pretium vnius libræ ignotum, & lucrum ſimul, ignotum etiam, quod reddat 30. pro 100?

130.	100.	20.	fiunt	$15\frac{5}{13}$.

Conſtabit ergo vna libra $15\frac{5}{13}$. baiochis. Ita enim fiet, vt cum baiochi $15\frac{5}{13}$. (vna libra vendita 20. baiochis) lucrentur baiochos $4\frac{8}{13}$. lucrifiant ex baiochis 100. baiochi 30. vt hic vides.

$15\frac{5}{13}$.	$4\frac{8}{13}$.	100?	fiunt	30.

Iam vero inuento pretio vnius libræ, $15\frac{5}{13}$. baioch. perſpicuum eſt, ſi vna libra vendatur 24. baiochis, ex baiochis $15\frac{5}{13}$. lucrifieri baiochos $8\frac{8}{13}$. Quare ex 100. baioch. lucrifient 56. baiochi, vt hic vides.

$15\frac{5}{13}$.	$8\frac{8}{13}$.	100?	fiunt	56.

19. Qui 100. libras mercis alicuius vendit 10. aur. perdit 10. pro 100. quantum ergo pro 100. perdet, ſi eas Quæſt 19.
vendat minori pretio, nempe 8. aureis? Hic etiam primum inueſtigare oportet, quanti conſtent 100. illæ libræ, vt venditæ 10. aureis damnum inferant 10. aureorum pro 10. vt in quæſtione 15. docuimus, hoc modo. Si 90. fiunt ex 100. (qui enim perdit 10. pro 100. facit 90. ex 100.) ex quo numero fient 10?

90.	100.	10?	fiunt	$11\frac{1}{9}$.

Emptæ ergo ſunt illæ 100. libræ aureis $11\frac{1}{9}$. Ita enim fiet, vt cum aurei $11\frac{1}{9}$. (venditis 100. illis libris 10. aureis) perdant aur. $1\frac{1}{9}$. perdantur 10. pro 100. vt hic cernis.

$11\frac{1}{9}$.	$1\frac{1}{9}$.	100?	fiunt	10.

Inuento autem pretio 100. illarum librarum $11\frac{1}{9}$. aur. manifeſtum eſt, ſi eædem 100. libræ vendantur 8. aureis, ex $11\frac{1}{9}$. aur. amitti aureos $3\frac{1}{9}$. Quam ob rem pro 100. perdentur 28. vt hic vides.

$11\frac{1}{9}$.	$3\frac{1}{9}$.	100?	fiunt	28.

Quæſt. 20. 20. Mercator quidam in Luſitania emit 50000. lib. piperis, aut 10000. & ibidem pro vectigali ſoluit aureos 500. Naulum autem illinc in Italia conſtitit 300. aureis, & in portu aliud vectigal exactum eſt 200. aur. Vectura deinde à mari Florentiam vſque conſtitit 100. aur. ibique aliud vectigal perſolutum 100. aur. Miniſtris denique ad eam negotiationem miſſis pro mercede, & victu dati ſunt 1000. aurei. Verum hæſitat, quanti vendenda ſit libra, vt ſupra omnes impenſas de ſingulis libris lucretur 2. Iulios. Hic omnes impenſas primum in vnam ſummam colligere oportet, vt habeatur pretium, quod cum omnibus illis impẽſis pro 50000. libris expoſitum eſt. Summa autem hæc in exemplo dato complectitur 12200. aur. Quare ſi 50000. lib. conſtant 12200. aureis ſiue 122000. Iulijs, vna libra conſtabit $2\frac{11}{25}$. Iul. vt hic vides.

	Aurei.
Piper.	10000.
Vectigal.	500.
Naulum.	300.
Vectigal.	200.
Vectura.	100.
Vectigal.	100.
Miniſtri.	1000.
	12200.

Lib.	Iul.	Lib.		Iul.
50000.	122000.	1?	fiunt	$2\frac{11}{25}$.

Igitur ſi ſingulas libras vendat $4\frac{11}{25}$. Iul. lucrabitur de ſingulis libris Iulios 2.

REGVLA SOCIETATVM.

CAPVT XX.

Regula ſocietatum, quãdo adhibetur, & quo pacto fiat. Quoties regula trium adhibenda ſit in regula ſocietatũ. Quando eſt diuerſitas temporum in regula ſocietatum quid agendum.

SEquitur ſocietatum regula immenſum vſum apud mercatores habens, quæ quidem totá nititur regula triũ, vt ex propoſitis exemplis fiet perſpicuum. Adhibetur autem, quando plures conſortium ineunt, ita vt ſinguli ſummam quandam pecuniæ conferant, fitq; hoc modo. Pecuniæ omnium in vnam ſummam colliguntur, & numerus collectus primo loco in regula trium ſtatuitur: Secundum vero locum occupat lucrum commune, vel damnum, quod ex omnium pecuniis prouenit: Tertium denique locum tenent pecuniæ ſingulorum, &c. ita vt toties adhibenda ſit regula triũ, quot ſunt illi, qui ſocietatem inierunt. Quando autem interuenit temporum diuerſitas, multiplicanda erit cuiuſque pecunia per ſuum tempus, antequam omnium pecuniæ in vnam ſummam colligantur. Deinde hi numeri producti colligendi in vnam ſummam, vt habeatur primus numerus in regula trium. Tertium autem locum occupabunt ſinguli numeri producti ex multiplicatione pecuniæ cuiuſq; in ſuum tempus, collocato rurſus lucro, vel damno communi in medio loco. Id quod in exemplis manifeſtum erit, quorum primum hoc ſit.

Quæſt. 1. 1 Quatuor mercatores, inito conſortio, lucrati ſunt in nũdinis quibuſdam 6000. aur. Primus autem illorum contulit tantum 60. aur. ſecundus 100. tertius 120. & quartus 200. in quæſtionem iam vocatur, quid quiſque ex illo lucro accipere debeat, habita ratione pecuniæ, quam expoſuit. Ante omnia colligenda eſt ſumma ex omnium pecuniis, quæ eſt 480. aur. Deinde quater inſtituenda eſt regula trium hoc modo. Si 480. aurei (quæ eſt pecunia ex omnium pecuniis collecta) lucrati ſunt 6000. aur. quid lucrabuntur 60. aur. quid 100. quid 120. & quid 200. quos ſinguli poſuerunt? veluti hic apparet.

Aur	Lucr. aur.	Aur.		Lucr. aur.
480.	6000.	60?	fiunt	750. Pri.
		100?		1250. Secun.
		120?		1500. Tert.
		200?		2500. Quar.
				6000

Facta operatione, vt præcipit regula trium, reperies, primum debere accipere 750. aur. ſecundum 1250. tertium 1500. & quartum 2500.

Examen huius rei erit, ſi lucra omnium in vnam ſummam collecta efficiant lucrum totum, vt in propoſito exemplo factum eſſe vides.

Quæſt. 2. 2 Tres mercatores, emptis mercibus nauem onerarunt. Primi merces conſtiterunt 300. aur. ſecundi 500. tertii 180. Graui deinde tempeſtate orta, proiectæ ſunt in mare merces grauiores, quæ conſtabant 400. aur. Conuenit autem inter eos, vt iactura hæc communis ſit. Quantum ergo quiſque damnum feret pro rata ſuarum mercium portione? Colligantur in vnam ſummam aurei omnium & numerus collectus 980. in primo loco regulæ trium collocetur, damnum vero commune in ſecundo, & pecuniæ ſingulorum in tertio, vt hic vides.

Aur.	Damn. aur.	Aur.		Dam. aur.
980.	400.	300?	fiunt	$122\frac{440}{980}$. prim.
		500?		$204\frac{80}{980}$. ſecun.
		180?		$73\frac{460}{980}$. tertij.

Primus ergo perdet $122\frac{440}{980}$. aur. ſecundus $204\frac{80}{980}$. & tertius $73\frac{460}{980}$.

3. Tres

3. Tres emere volunt 4000. libras ſacchari, quæ æſtimantur 5000. aur. Primus tamen vult 1300. lib. ſecundus 1460. tertius denique reliquas lib. 1240. quantum ergo ſoluet quilibet? Dic, ſi 4000. lib. valent 500. aur. quid valent 1300 quid 1460. & quid 1240. lib. quas ſinguli capere volunt? Inuenies enim primum ſoluere aur. $162\frac{1}{2}$. ſecundum $182\frac{1}{2}$. & tertium 155. vt hic vides. *Quæſt. 3.*

Lib.	Aur.	Lib.		Aur.
4000.	500.	1300?	fiunt	$162\frac{1}{2}$. primi.
		1460?		$182\frac{1}{2}$. ſecundi.
		1240?		155. tertij.

4. Tres ſocietate inita, lucrati ſunt 1000. aur. Primus expoſuit 200. aur. eoſque poſt 8. menſes recepit. Secundus contulit 450. aur. eoſque poſt 6. menſes recepit. Tertius denique 500. aur. attulit, eoſque in negotiatione reliquit 10. menſibus. Quantum ergo quiſque ex lucro accipiet, habita ratione ſuæ pecuniæ, & temporis? Cuiuſque pecunia per ſuum tempus multiplicetur, & numeri producti in vnam ſummam colligantur, pro primo numero regulæ trium: ſecundum vero locum occupet lucrum: tertium denique tres illi producti. In noſtro exemplo, ex pecunia primi in ſuum tempus fiunt 1600. ex pecunia ſecundi in ſuum tempus, 2700. ex pecunia tertij in ſuum tempus, 5000. horum autem productorum ſumma eſt 9300. Sic ergo ſtabit exemplum. *Quæſt. 4.*

Lucr.	aur.			Lucr. aur.
9300.	1000.	1600?	fiunt	$172\frac{4}{93}$. Primi.
		2700?		$290\frac{10}{31}$. Secun.
		5000?		$537\frac{59}{93}$. Tertij.

5. Tres, ſocietate inita, lucrati ſunt 1000. aur. Primus poſuit 300. aur. per 10. menſes. Secundus attulit 700. aur. Tertius vero 800. aur. Accepit autem primus ex lucro 500. aur. ſecundus 300. & tertius 200. Quanto ergo tempore fuerunt duorum poſteriorum pecuniæ in negotiatione? Quoniam, vt in præcedenti quæſtione dictum eſt, pecunia cuiuſque in ſuum tempus multiplicanda eſt; multiplicabimus pecuniam primi per ſuum tempus, faciemusque 3000. atque ex hoc producto prouenit lucrum primi. Vt igitur ſciamus, ex quibuſnam productis lucra poſteriorum duorum proueniant, dicemus. Si 500. aur. (quod eſt lucrum primi) proueniunt ex 3000. ex quo prouenient 300. & 40. aur. quæ ſunt lucra poſteriorum? Veluti hic apparet. *Quæſt. 5.*

Lucr.	aur.	Lucr. aur.		
500.	3000.	300?	fiunt	1800. Secundi.
		200?		1200. Tertij.

Secundi ergo tempus per ſuam pecuniam multiplicatum facit 1800. Tertij vero 1200. Quare ſi 1800. diuidamus per 700. hoc eſt, per pecuniam ſecundi, inueniemus menſes $2\frac{4}{7}$. quibus à ſecundo expoſiti ſunt ad lucrum 700. aurei. Item ſi 1200. partiamur per 800. id eſt, per pecuniam tertij, reperiemus menſes $1\frac{1}{2}$. pro tertio.

Hoc ita eſſe experieris, ſi ita conſortium proponas. Tres, inito conſortio, lucrati ſunt 1000. aur. Primus poſuit 300. aur. per 10. menſes: ſecundus 700 aur per menſes $2\frac{4}{7}$. tertius denique 800. aur. per. $1\frac{1}{2}$. menſes. Quantum ergo quiſq; pro rata pecuniæ ſuæ, ac temporis portione ex lucro accipiet? Si cuiuſque pecunia per ſuum tempus multiplicetur, faciemus ex pecunia primi in ſuum tempus 3000 ex pecunia ſecundi in ſuum tempus, 1800. ex pecunia tertij in ſuum tempus, 1200. Hi autem tres producti faciunt ſummam 6000, Sic ergo ſtabit exemplum.

Lucr.	aur.			Lucr. aur.
6000.	1000.	3000?	fiunt	500. primi.
		1800?		300. ſecund.
		1200?		200. tertij.

Vbi vides prodijſſe lucra ſingulorum, ſicut in quæſtione proponebantur. Recte ergo tempora duorum poſteriorum explorata ſunt.

6. Quatuor ſocietatem inierunt biennio duraturam, lucratique ſunt 10000. aur. Primus in initio ſocietatis attulit 3000. aur. & poſt menſem octauum tranſactum abſtulit ex illis 1000. aureos. viceſimo deinde menſe inchoante expoſuit rurſum 1200. aur. Secundus à principio dedit 2400. aur. & poſt 6. menſes elapſos abſtulit 800. aur. ſed ad initium menſis 16. denuo protulit 1400. aur. Tertius ſub initium conſortij exhibuit 2000. aur. tranſactiſque 7. menſibus, totam pecuniam ſuam repetijt: ſed menſe 18. incipiente, iterum poſuit 1600. aur. Quartus denique inchoante 7. menſe expoſuit 1800. aur & poſt 4. menſes finitos recepit 900. aur. ſed ad initium menſis 17. rurſus contulit 1500. aur. Quantum ergo quilibet ex communi lucro pro ratione ſuæ pecuniæ, ac temporis recipiet? Hic diligenter explorandum eſt, quantam quiſque pecuniam, & quanto tempore expoſuerit, vt ſemper pecuniam per tempus multiplicemus, &c. Quod vt planius fiat, exemplum propoſitum ita explicabimus. *Quæſt. 6.*

Quoniam primus in principio conſortij dedit 3000. aur. recepitque 1000. poſt 8. menſes exactos, manifeſtum eſt eum in communi negotiatione expoſuiſſe 3000. aur. per 8. menſes. Multiplicantes ergo 3000. per 8. faciemus 24000. Et quia poſt 8. menſes elapſos abſtulit 1000. aur. certum eſt remanſiſſe in communi conſortio 2000. aur. vſque ad finem 19. menſis, vbi nonam pecuniam contulit. Auferentes igitur 8. menſes ex 19. remanent 11. menſes, quibus expoſuit tantum 2000 aur. & multiplicantes 2000. per 11. faciemus 22000. Poſt hæc, quoniam denuo attulit 1200. aur. ad initium 20. menſis vſque ad finem ſecundi anni, liquet, ſi addamus hos 1200. aur. ad 2000. aur. eum in communi negotiatione per 5. reliquos menſes duorum annorum, habuiſſe 3200. aur. Multiplicantes ergo 3200. per 5 faciemus 16000. Colligentes iam tres hoſce productos 24000. 22000. 16000. in vnam ſummam, efficiemus 62000. qui numerus erit poſitio primi, productus ex pecunijs, & temporibus ipſius.

Rurſus

Rurſus, quoniam ſecundus per 6. menſes impoſuit 2400. aur. propterea quòd elapſo 6. menſe, abſtulit 800 aur. multiplicabimus 2400. per 6. faciemusque 14400. Quia vero ad principium 16. menſis nouam pecuniam dicitur exhibuiſſe, perſpicuum eſt, eum per 9. menſes à principio 7. menſis vſque ad finem 15. habuiſſe in conſortio communi 1600. aur. qui relinquuntur, ſubtractis 800. ex 2400. Multiplicantes igitur 1600. per 9. faciemus ſimiliter 14400. Deinde, qoia dicitur ad initium 16. menſis iterum poſuiſſe 1400. aur. manifeſtum eſt, hanc pecuniam expoſitam eſſe per reliquos 9. menſes duorum annorum, quibus ſi addantur aurei 1600. qui adhuc in communi negotiatione exponuntur, fient aurei 3000. qui per 9. illos vltimos menſes in communi vſu fuerunt. Multiplicantes ergo 3000. per 9. faciemus 27000. Collectis autem tribus hiſce productis 14400. 14400. 27000. in voam ſummam, efficiemus 55800. pro numero ſecundi producto ex pecuniis, & temporibus ipſius.

Poſt hæc, cum tertius per 7. menſes contulerit 2000. aur. quod eos repetierit poſt 7. menſes elapſos; multiplicabimus 2000. per 7. efficiemusque 14000. Sed quia ad principium 18. menſis deouo exhibuit 1600. aur. multiplicabimus 1600. per 7. (tot enim menſes ex duobus annis ſuperſunt) faciemusque 11200. Collectis autem duobus hiſce productis 14000. 11200. in vnam ſummam, procreabimus 25200. numerum ex pecuniis, ac temporibus tertii mercatoris productum.

Quia tandem quartus à principio 7. menſis per 4. menſes poſuit 1800. aur. multiplicabimus 1800. per 4. efficiemusque 7200. Sed quia, finitis 4. menſibus, recepit 900. aur. relicti ſunt 900. aurei, qui fuerunt in negotiatione per 6. menſes à principio 11. menſis vſque ad finem 16. menſis, quando nouam pecuniam attulit. Multiplicantes ergo 900 per 6. faciemus 5400. Quoniam vero ſub principium 17. menſis poſuit iterum 1500. aur. vſque ad finem duorum annorum, additis 900. aur. qui adhuc in communi vſu ſunt, fient 2400. Multiplicantes ergo 2400. per 8. menſes reſiduos, faciemus 19200. Collectis autem tribus hiſce productis 7200. 5400. 19200. in vnam ſummam, efficiemus 31800. pro numero ex pecunijs, temporibusque quarti mercatoris procreato.

Iam vero colligentes hos quatuor numeros 62000. 55800. 25200. 31800. qui ex ſingulorum pecunijs, ac temporibus producti ſunt, in vnam ſummam faciemus 174800. pro primo numero regulæ trium. In ſecundo autem loco erit lucrum commune, & in tertio numerus ex pecunijs, & temporibus cuiusque procreatus, vt in 4. quæſtione dictum eſt. Ita ergo ſtabit exemplum.

174800.	10000.	62000?	fiunt	$3546\frac{1592}{1748}$.	primi.
		55800?		$3192\frac{384}{1748}$.	ſecundi.
		25200?		$1441\frac{1132}{1748}$.	tertij.
		31800?		$1819\frac{388}{1748}$.	quarti.

Quæſt. 7. 7. Tres ineunt ſocietatem. Primus confert 400. aur. Secundus 300. aur. & 86. baioch. Tertius 1000. aur. Iul. 7. baioch. 9. In ipſa autem negotiatiooe vſi ſunt fortuna aduerſa, iacturamq; fecerunt de tota ſumma 100. aureorum. Quantum ergo cuiuslibet damnum? Reductis omnibus ad baiochos, fient pro primo 40000. baiochi: pro ſecundo 30086. pro tertio vero 100079. quorum omniū ſumma eſt 170165. Ita ergo ſtabit exemplum.

	Baioch.		Damn. baioc.
Si	170165.	dant	10000.
Quid	40000?	fiunt	$2350\frac{112250}{170165}$.
	30086?		$1768\frac{8280}{170165}$.
	100079?		$5881\frac{49635}{170165}$.

Quæſt. 8. 8. Tres ſocietatem inierunt. Primus attulit 200. aur. eosqoe in ſocietate reliquit 12. menſibus. Secundus contribuit 240. aur. Tertius aureum torquem, cuius pretium repetijt, poſt decem menſes elapſos. Lucrum acquiſitum fuit 138. aureorum. Facta autem debita diſtributione, primus habuit 60. aur. ſecundus 48. & tertius 30. Quot ergo menſibus reliquit ſecundus pecuniam collocatam in conſortio, & quanti torques aureus æſtimatus, vt dictæ portiones lucri cuilibet deberentur? Quoniam pecunia cuiuſque per ſuum tempus multiplicari debet, moltiplicabimus 200. aur. primi per 12. menſes, faciemusque 2400. atque ex hoc numero illi prouenerunt 60. aur. Dic ergo, vt ſcias, ex quo ſecundus lucrum 48. aureorum acquiſierit: Si 60. aur. prouenerunt 2400. ex quo prouenerunt aurei 48? vt hic vides.

60. 2400. 48? fiunt 1920.

Inueniesque 1920. qui numerus productus eſt ex 240. aur. ſecundi in ſuum tempus. Diuiſo igitur numero dicto 1920. per 240. prodibunt menſes 8. quibus pecunia ſecundi in negotiatione manſit. Rurſus, vt ſcias, ex quo tertius lucrum 30. aureorum adeptus ſit, dic. Si lucrum primi 60. aur. prouenit ex 2400. ex quo oritur lucrum tertij 30. aur? Vel ſi lucrum ſecundi 48. aur. ortum eſt ex 1920. ex quo proueniet lucrum tertij 30. aur? vt hic cernis.

60.	2400.	30?	fiunt	1200.
48.	1920.	30?	fiunt	1200.

Semper enim inuenies numerum 1200. qui productus eſt ex 10. menſibus tertij in ſuam pecuniam, hoc eſt, in pretium torquis. Diuiſo ergo hoc numero 1200. per 10. menſes, prodibit valor torquis aureorum 120. quos tertius ad negotiationem per 10. menſes attulit.

Rem ita ſe habere, cognoſces, ſi ita proponas ſodalitatem. Tres, conſortio inito, lucrati ſunt 138. aur. Primus contulit 200. aur. per 12. menſes: ſecundus 240. aur. per 8. menſes: & tertius 120. aur. per 10. menſes. Quan-

Google

Quantum ergo cuilibet de lucro debetur? Multiplicata enim pecunia cuiuſque per ſuum tempus, inuenies lucra ſingulorum, quemadmodum in quęſtione dictum eſt, vt hic apparet.

					Lucr. aur.
Lucr.	aur.	2400?			60. primi.
5520.	138.	1920?		fiunt	48. ſecund.
		1200?			30. tertij.

9. Tres, inito conſortio per annum duraturo, lucrati ſunt ſummam quandam aureorum. Primus expoſuit ſtatim ab initio 1000. aur. ſecundus vero aureos, neſcio quot, cōtulit poſt 2. menſes exactos. Tertius demū poſt 4. menſes à ſecundo contribuit etiam multitudinem aureorum mihi ignotam. Finita tamen ſocietate, lucrum participarunt æqualiter. Quid ergo ſecundus & tertius in eam ſocietatem contulerunt? Multiplicando 1000. aur. primi per 12. menſes, quibus eos in ſodalitate reliquit, fient 12000. Ac tantundem debet fieri ex pecunia ſecundi in ſuum tempus, atque ex pecunia tertij in ſuum tempus; quandoquidem æqualia lucra habere debent. Quoniam vero ſecundus pecuniam ſuam 10. menſibus reliquit in negotiatione, ſi partiamur 12000. per 10. inueniemus pecuniam ſecundi fuiſſe 1200. aur. at ſi diuidamus per 6. menſes, quibus tertius ſuam pecuniam expoſuit, deprehendemus pecuniam tertij fuiſſe 2000. aur. Nam hac ratione ex pecunia cuiuſque in ſuum tempus producetur numerus 12000. qui tertium locum in regula trium occupabit, ac proinde æqualia lucra omnes tres habebunt, quodcunq; fuerit lucrum illud commune. Si enim lucrum commune fuiſſet 900. aur. & tres hi numeri 12000. 12000. 12000. qui ex ſingulorum pecunijs in ſua tempora ſunt producti, in vnam ſummam colligerentur, ita ſtaret exemplum. Quæſt. 9.

		12000?		300.
36000.	900.	12000?	fiunt	300.
		12000?		300.

10. Tres in communi negotiatione lucrati ſunt 190. aur. quos ita diſtribuerunt, vt portio primi tripla eſſet portionis ſecundi, & quadrupla portionis tertij. Primus autē contulit per 12. menſes 80. aur. Secundus ſuam pecuniam expoſuit per 8. menſes, & tertius per 4. Quantum ergo quiſque duorum poſteriorum contulit in hanc ſocietatem, & quid de lucro ſinguli acceperunt? Multiplica pecuniam primi, nempe 80. aur. per ſuum tempus, vt per 12. menſes? facieſque 960. Huius numeri ſume $\frac{1}{3}$. nimirum 320. Item $\frac{1}{4}$. nempe 240. Atque hi numeri ſunt, qui produci debent ex pecunijs duorum poſteriorum in ſua tempora: quia hac ratione lucrum ſecundi erit $\frac{1}{3}$ lucri primi, & lucrum tertij erit $\frac{1}{4}$. eiuſdem, quemadmodum & numerus 320. ex quo lucrum ſecundo oritur, eſt $\frac{1}{3}$. numeri 960. ex quo lucrum primi gignitur, & numerus 240. quod parit lucrum tertij, eſt $\frac{1}{4}$. eiuſdem numeri 960. Si igitur partiamur 320. per 8. menſes ſecundi, inueniemus 40. aur. quos ſecundus poſuit: Si vero diuidamus 240. per 4. menſes tertij, producentur 60. aur. pro tertio. Nam hac ratione pecuniæ ſingulorum per ſua tempora multiplicatę producunt numeros 960. 320 240. quorum primus triplus eſt ſecundi, & quadruplus tertij. Ex quo fit, lucra eaſdem quoque proportiones habitura. Vt hic vides. Quæſt. 10.

		960?		120.	
1520.	190.	320?	fiunt	40.	Lucra.
		240?		30.	

11. Tres, inito conſortio, contulerunt in communem negotiationem 1520. aur. lucratique ſunt aur. 190. quos (habita ratione pecuniæ cuiusque quam poſuit) ita partiti inter ſe ſunt, vt primus haberet 120. ſecundus 40. Quid ergo tertius habuit & quid quiſque in ſocietatem contulerſit? Si lucrum tam primi, quam ſecundi ex toto lucro demas, relinquetur lucrum tertij 30. aur. Cognitis autem ſingulorum lucris, dic. Si totum lucrum 190. aur. ortum eſt ex communi pecunia 1520. aur. ex quo prouenit lucrum primi 120. aur. & lucrum ſecundi 40. aur. & lucrum tertij 30. aur. Reperies enim primum attuliſſe 960. aur. ſecundum 320. & tertium 240. Vt hic vides. Quæſt. 11.

		120?		960.	primi.
190.	1520.	40?	fiunt	320.	ſecundi.
		30?		240.	tertij.

Examinabitur, ſi dicas. Si 1520. (quæ eſt ſumma pecuniarum, quas ſinguli contulerunt) lucrantur 190. quid lucrabuntur 960. 320. & 240? Inuenies enim lucra 120. 40. & 30.

12. Tres, inita ſodalitate, in negotiationem contulerunt 1520. aur. quibus lucrati ſunt 190. aur. Primus, facta diſtributione, recepit 1080. aur. conflatos ex ſua pecunia, quam poſuit, & lucro, quod illi obtigit. Similiter ſecundus accepit 360. aur & tertius 270. Quantum ergo quiſque poſuit & quantum eſt lucratus? Facta vna ſumma ex pecunia, quam omnes poſuerunt, & lucro communi, quæ eſt 1710. Dic. Si 1710. pecunia omnium, & lucrū, prouenit ex 1520. pecunia omnium. ex quo proueniunt 1080. qui numerus continet & pecuniam primi, & lucrum? & ex quo orientur 360 quæ continent & pecuniam & lucrum ſecundi? & ex quo numerus 270. producetur continens & pecuniam, & lucrum tertij? Inuenies enim hoc modo pecunias, quas ſinguli poſuerunt. vt hic manifeſtum eſt. Quæſt. 12.

		1080?		960.	Primi.
1710.	1520.	360?	fiunt	320.	Secun.
		270?		240.	Tertij.

Ablata autem pecunia cuiuſq; ex numero, qui illi obtigit, relinquetur lucrum ſolum. Ita deprehendes lucrum primi eſſe aur. 120. ſecundi 40. & tertij 30.

13 Duo in communi conſortio lucrati ſunt 200. aur. ex quibus primo obtigerunt 50. aur. ſecundus tamen duplo plus contulit, quam primus, & præterea 8. aur. Quantum ergo vterque expoſuit? Quoniam primus lucratus eſt 50. aur. manifeſtum eſt, ſecundum, qui duplo plus poſuit, lucratum eſſe 100. ac proinde reliquos 50. aur. qui ex toto lucro 200. aur. ſuperſunt, eſſe lucrum 8. aureorū, quos præterea ſecundus attulit. Vt ergo habeas pecuniā, quam vterq; poſuit, dic. Si 50. aurei reſidui proueniunt ex 8. aur. quos ſecundus præterea contribuit, ex Quæſt. 13.

quo

quo producentur 50.aur.quos primus lucratus eſt,& ex quo 100.aur.quos lucratus eſt ſecundus? Reperies enim hac ratione primum poſuiſſe 8.aureos, & ſecundum 16. vt hic apparet.

50.	8.	50? 100?	fiunt	8. 16.

Si igitur addas 8.ad 16 aur.ſecundi, facies 24.aur.quos ſecundus in eam ſodalitatem contulit.

Examen huius rei erit,ſi 8.aur.& 24.quos ambo contribuerunt, in vnam ſummam colligas, quæ eſt 32. & dicas. Si 32.lucrati ſunt 200.quid lucrabuntur 8.& quid 24? Deprehendes enim lucrum primi eſſe 50. aur.& ſecundi 150 vt hic vides.

32.	200.	8? 24?	fiunt	50. 150.

Quæſt. 14. 14. Duo contraxerunt ſocietatem,quorum primus expoſuit 120. aur. & ſecundus 180. Aſſumpſerunt autem procuratorem ea conditione, vt ex lucro acciperet 10. pro 100. Lucrum vero fuit 1000. aur. Quid ergo debuit habere procurator, & quid vterque illorum? Dic. Si 100.dant 10.procuratori, quid dabunt 1000.inueniesque 100.aur.qui procuratori debentur in ratione 10.pro 100. Ablatis autem his 100.aur.ex toto lucro, hoc eſt,ex 1000.aur. remanent 900. aur. pro lucro amborum. Dic ergo. Si 300.aur. quos ambo poſuerunt, lucrati ſunt 900.aur. quid lucrabuntur aurei 120.& quid 180. veluti hic appoſitum eſt.

300.	900.	120? 180?	fiunt	360. 540.

Quæſt. 15. 15. Tres inierunt ſocietatem,lucratique ſunt 1520.aur.Primus contulit 1080.aur.& ſecundus 360.tertius autem tantam pecuniam expoſuit, vt ei de lucro cederent 240.aur. Quid ergo hic tertius poſuit, & quid duorum priorum quiſque eſt lucratus? Subtrahe 240.aur. quos tertius lucratus eſt, à toto lucro 1520.aureorum, vt reliqui ſint 1280.aur.pro lucro priorum duorum. Dic ergo. Si 1440. aur.quos primus & ſecundus expoſuerunt, lucrantur 1280. aur. quid lucrabuntur 1080. aur. primi, & quid 360. aur.ſecundi? Inueniesque lucrum primi eſſe 960. & ſecundi 320. vt hic cernis.

1440.	1280.	1080? 360?	fiunt	960. 320.

Ita enim omnium lucra conficient 1520. aur. vt autem habeas pecuniam à tertio expoſitam, dic. Si lucrum priorum duorum 1280. aur. prouenit ex 1440.aur. quos in ſocietatem attulerunt,ex quo proueniet lucrum tertii 240.aur.inueniesque 270.aur.vt hic vides.

1280. 1440. 240? fiunt 270.

Quæſt. 16. 16. Tres expoſuerunt æquales pecuniæ ſummas,lucratique ſunt 1000.aur.in vno anno.Primus reliquit ſuam pecuniam in conſortio 7. menſibus: ſecundus ſuam repetiit poſt 6. menſes: tertius autem ſuam vſque ad finem anni expoſuit.Quid ergo quiſque de lucro accipiet? Collectis omnibus menſibus,quibus ſinguli ſuas pecunias expoſuerunt,vt fiat ſumma 25.dic.Si 25.lucrantur 1000.quid lucrabuntur 7.menſes,& quid 6.& quid 12. quemadmodum hic factum eſt.

25.	1000.	7? 6? 12?	fiunt	280. 240. 480.

Verum hoc eſſe perſpicuum eſt, cum omnium lucra efficiant 1000. aur.quos quidem dicebantur eſſe lucrati.

Idem tamen hoc modo examinabis. Finge ſingulos expoſuiſſe 100 aur. quos per tempus cuiuſque multiplica,vt fiant 700. 600. 1200. Collectis autem hiſce numeris in vnam ſummam, quæ eſt 2500.dic.Si 2500.lucrantur 1000. quid lucrabuntur 700.600.& 1200? Inuenies enim eadem lucra, quæ prius,vt hic apparet.

2500.	1000.	700? 600? 1200?	fiunt	280. 240. 480.

Quæſt. 17. 17. Quatuor ſimul lucrati ſunt 340. aur.quos ita inter ſe,habita ratione pecuniarum collatarum, partiti ſunt,vt quoties ſecundus habuit 5.toties tertius habuerit 9.quoties autem tertius habuit 7.toties quartus habuerit 11. quoties denique quartus habuit 9. toties primus habuerit 13. Primus autem contulit 286. aur. quid ergo alii tres expoſuerunt,& quid ſinguli ex lucro reportarunt? Hic exprimuntur proportiones lucrorum,atque adeo pecuniarum, ex quibus lucra proueniunt. Sunt enim lucra pecuniis expoſitis proportionalia. Quoniã igitur primus toties habiturus eſt 13.quoties quartus 9. erit proportio pecuniarum expoſitarum eadem,quæ 13.ad 9. propterea quod idem numerus multiplicans 13.& 9. producit pecunias vtriuſque cum toties in illa contineri debeant 13.quoties 9.in hac. Dic ergo. Si 13.dant 286. aur. quos primus poſuit, quid dabunt 9. inueniesque 198. aur.pro collatione quarti, vt hic cernis.

13. 286. 9? fiunt 198.

Vbi vides,toties contineri 9.in 198. quoties 13.in 286.

Quoniam vero quartus dicitur habiturus toties 11. quoties tertius 7. erit proportio 198. nempe pecuniæ quarti,ad pecuniam tertii,quæ 11.ad 7. Dic ergo. Si 11.dant 198. quid 7.reperieſque collationem tertii 126.aur.vt hic conſtat. 11. 198. 7? fiunt 126.

Vbi etiam liquet,toties contineri 7.in 126.quoties 11. in 198.

Rurſus quia tertius toties debet habere 9. quoties ſecundus 5. erit proportio 126. nimirum pecuniæ tertii, ad pecuniã ſecundi,quæ 9.ad 5. Dic ergo.Si 9.dant 126 quid 5? inueniesq; collationẽ ſecundi 70.aur.vt hic patet.

9. 126. 5? fiunt 70.

Vbi

Vbi etiam apparet, toties reperiri 5. in 70. quoties 9. in 126.

Habitis autem pecuniis, quas ſinguli contribuunt, inueniemus lucra eorum, ſicuti in aliis ſocietatibus. Collectis enim omnium pecuniis in ſummam 680. dicemus. Si 680. lucrantur 340. quid lucrabuntur 286. 70. 126. 198. quos primus, ſecundus, tertius, ac quartus poſuit? veluti hic vides.

680.	340.	286?	fiunt	143. primi.
		70?		35. ſecundi.
		126?		63. tertii.
		198?		99. quarti.

Vbi quidem liquido cernis, omnia lucra facere 340. & toties contineri 13. in 143. quoties 9. in 99. & toties 5. in 35. quoties 9. in 63. Item toties 7. in 63. quoties 11. in 99.

18. Tres partiri inter ſe volunt 760. aur. ea conditione, vt quoties primus habet 10. toties ſecundus habeat 7. & tertius 2. Quantum ergo ſinguli ſunt accepturi? Iunge ſimul 10. 7. & 2. vt habeas 19. Deinde dic. Si 19. dant 760. quid dabunt 10. 7. & 2. veluti hic vides. Quæſt. 18.

19.	760.	10?	fiunt	400. primi.
		7?		280. ſecundi.
		2?		80. tertii.

19. Quatuor partiri inter ſe volunt 785. aur. ea lege, vt quoties primus habet 10. toties ſecundus habeat 7, quoties autem ſecundus habet 14. toties tertius habeat 3. quoties deniq; tertius habet 12. toties quartus habeat 9. Quid ergo quiſq; accipiet? Vt facilior reddatur operatio, incipiendum erit ab vltimo, nempe à quarto, qui ponatur habere ſemel 9. Habebit igitur tertius ſemel etiam 12. Quia vero quoties tertius habet 3. toties ſecundus habere debet 14. ſi diuidamus 12. numerum tertii per 3. inueniemus Quotientē 4. qui indicabit in 12. quater contineri 3. Multiplicabimus igitur 14. per dictum Quotientem 4. vt inueniamus 56. numerum ſecundi, in quo toties 14. continentur; quoties 3. in 12. Et quoniam quoties ſecundus habet 7. toties primus habere debet 10. ſi partiamur 56. numerum ſecundi, per 7. inueniemus Quotientem 8. qui indicat, in 56. octies contineri 7. Multiplicabimus igitur 10. per Quotientem hunc 8. vt producatur numerus primi 80. in quo toties 10. continētur, quoties 7. in 56. Atq; ita partes numeri dati habere debent proportiones horum numerorum 80. 56. 12. 9. Ita enim toties primus habebit 10. quoties ſecundus 7. Et toties ſecundus 14. quoties tertius 3. Et quoties tertius 12. toties quartus 9. Collectis igitur illis numeris in vnam ſummam, quæ erit 157. Dic. Si 157. dant 785. quid dabunt 80. 56. 12. & 9? vt hic vides. Quæſt. 19.

157.	785.	80?	fiunt	400. Primi.
		56?		280. Secundi.
		12?		60. Tertii.
		9?		45 Quarti.

Alio modo ita ſoluetur eadem quæſtio propoſita. Quoniam cum primus habet 10. ſecundus habet 7. Ponemus 10. pro primo & 7. pro ſecundo. Deinde, quia cum ſecundus habet 14 tertius habet 3. dicemus. Si 14 ſecundi ſunt 7. quid erunt 3. tertii? Inueniemuſq; $1\frac{1}{2}$ atq; talem proportionem habebit poſitio ſecundi ad poſitionem tertii, qualem 7. ad $1\frac{1}{2}$. hoc eſt, toties erunt 14. in 7. quoties 3. in $1\frac{1}{2}$. Rurſus, quia cum tertius habet 12 quartus habet 9. dicemus. Si 12 tertii ſunt $1\frac{1}{2}$. quid erunt 9. quarti? inueniemuſq; $1\frac{1}{8}$. atq; talem proportionē habebit poſitio tertii ad poſitionem quarti, qualem $1\frac{1}{2}$. ad $1\frac{1}{8}$ hoc eſt, toties erunt 12 in $1\frac{1}{2}$. quoties 9. in $1\frac{1}{8}$. Collectis iam his numeris 10. 7. $1\frac{1}{2}$. $1\frac{1}{8}$. in vnam ſummam, efficiemus $19\frac{5}{8}$. Quare dicemus. Si $19\frac{5}{8}$. dant 785. quid dabunt 10. 7. $1\frac{1}{2}$. & $1\frac{1}{8}$. vt hic vides.

$19\frac{5}{8}$.	785.	10?	fiunt	400. primi.
		7?		280. ſecundi.
		$1\frac{1}{2}$?		60. tertii.
		$1\frac{1}{8}$?		45. quarti.

20. Quatuor duces, ſex ſigniferi, & 100. milites in direptione cuiuſdam vrbis irruerunt in domum quādam, vbi repererunt 72400. aur. quos inter ſe ita partiti ſunt, vt quoties quilibet dux acceperit 8. toties quilibet ſignifer acceperit 5. & quilibet miles 3. Quid ergo cuilibet ex illa præda obuenit? Multiplica numerum ducum, id eſt 4. per 8. nempe per numerum, quem toties quilibet dux debet habere, quoties alii 5. & 3. efficieſque 32. Similiter multiplica 6. numerum ſigniferorum per 5. & 100. numerum militum per 3. efficieſque 30. & 300. Iunctis ſimul tribus his numeris 32. 30. 300. vt fiant 362. Dic. Si 362. dant 72400. quid dabunt 32. 30. & 300. vt hic vides. Quæſt. 20.

362. 72400.	32?	fiunt	6400.
	30?		6000.
	300?		60000.

Itaque quatuor duces acceperunt ex illa præda 6400. aur. at 6. ſigniferi 6000. & 100. milites 60000. qui omnes conficiunt ſummam aureorum inuentam 72400. Iam vero ſi partiamur aureos ducum 6400. per 4. numerum ducum, reperiemus quemlibet habuiſſe 1600 aur. Item ſi aureos ſigniferorum diuidamus per 6. deprehendemus cuilibet obtigiſſe 1000. aur. Si denique aureos militum per 100. diſtribuamus, inueniemus ſingulos accepiſſe 600. aur. vbi manifeſte vides, toties 8. contineri in 1600. quoties 5. in 1000. & 3. in 600. nimirum ducenties.

21. Quidam extremum ſpiritum agens, cui filia erat, & filius, qui in bello dicebatur occubuiſſe, ita hæreditatem 18088. aureorum diſtribuendam inter vxorem & filiam reliquit, vt vxor haberet $\frac{1}{5}$. filia autem $\frac{4}{5}$. ſed ſi forte filius rediret, vt filius $\frac{2}{3}$. haberet. Accidit autem, vt filius reuerteretur. Qua igitur ratione dicta hæreditas diuidenda eſt, vt voluntati teſtatoris ſatisfiat? Certum eſt, quæſtionem hanc non poſſe intelligi, vt verba ſonant. Nam ſi filius accipiat $\frac{2}{3}$. non poterit vxor habere $\frac{1}{5}$. & filia $\frac{4}{5}$. Quare omnes Arithmetici voluntatem teſtatoris Quæſt. 21.

interpretātur, vt voluerit, filium duplo plus debere habere, quam vxorem, & vxorem duplo plus, quam filiam. Id quod proportio harum minutiarum $\frac{2}{3}$.$\frac{1}{3}$. quæ dupla eſt. (continet enim minutia $\frac{2}{3}$. minutiam $\frac{1}{3}$. bis.) indicare videtur. Itaque numerus 18088. ſecandus eſt in tres partes, ita vt prima contineat ſecundam bis, & ſecunda tertiam etiam bis, hoc eſt, quæ habeant continuam proportionem duplam, quod hoc modo fiet. Pone tertiam eſſe 1. Erit ergo ſecunda 2. & prima 4. quæ omnes faciunt 7. Dic igitur. Si 7. dant 18088. quid dabunt 4.2.& 1? vt hic vides.

7. 18088. { 4? 2? 1? } fiunt { 10336. filii. 5168. vxoris. 2584. filiæ. }

Quæſt. 22. 22. Tres crumenã inuenerunt cum 3042. aur, quos ita inter ſe diſtribuerunt. Primus accepit $\frac{1}{2}$. ſecundus $\frac{1}{3}$. & tertius $\frac{1}{4}$. Quid ergo quiſque accepit? Hic etiam perſpicuum eſt, quæſtionem non poſſe intelligi, vt ſonat. Si namque primus accepiſſet $\frac{1}{2}$. ſecundus $\frac{1}{3}$. non potuiſſet tertius accipere $\frac{1}{4}$. Nam hæ tres minutiæ efficiunt plus, quam integrum, nempe $\frac{13}{12}$. Quare ſenſus eſt, vt datus numerus diſtribuatur in tres partes, quæ eaſdem proportiones inter ſe habeant, has quæ minutiæ $\frac{1}{2}$.$\frac{1}{3}$.$\frac{1}{4}$. Quod vt fiat inueniatur numerus à denominatoribus numeratus. Minimus autem hic numerus eſt 12. inuentus per ea, quæ cap. 10. ſcripſimus. Ex hoc numero cape $\frac{1}{2}$. nempe 6. Item $\frac{1}{3}$. nempe 4. Item $\frac{1}{4}$. nempe 3. quas partes ſimul adde, vt habeas 13. Dic ergo. Si 13. dant 3042. quid dabunt 6.4.& 3? vt hic cernis.

13. 3042. { 6? 4? 3? } fiunt { 1404. primi. 936. ſecundi. 702. tertii. }

Examen ita fiet. Reduc datas minutias ad eandem denominationem, vt ad $\frac{6}{12}$.$\frac{4}{12}$.$\frac{3}{12}$. Habebunt enim hæ minutiæ eaſdem proportiones, quas numeratores habent. Eaſdem autem habent tres numeri inuenti 1404. 936. 702. vt apparet.

Quæſt. 23. 23. Tres inuento loculo cum 1407. aur. ita diſtributionem fecerunt: primus accepit $\frac{1}{2}$. ſecundus $\frac{3}{5}$. tertius $\frac{8}{11}$. quid ergo quiſque accepit? Hic etiam ſenſus eſt, vt datus numerus in tres partes ſecetur datis minutiis proportionales: alias impoſſibilis quæſtio foret. Inuento igitur, ex cap. 10. minimo numero 110. dictas minutias continente, ſume eius dimidium 55. & tres quintas 66. & octauo vndecimas 80. eaſque in vnam ſummam 201. collige, ac dic. Si 201. dant 1407. quid dabunt 55.66.& 80? vt hic apparet.

201. 1407. { 55? 66? 80? } fiunt { 385. primi. 462. ſecundi. 560. tertii. }

Examen fiet, vt in antecedente quæſtione. Reductis enim datis minutiis ad eandem denominationem, vt ad $\frac{55}{110}$.$\frac{66}{110}$.$\frac{80}{110}$. habebunt tres numeri inuenti eaſdem proportiones; quas hæ minutiæ, nempe earum numeratores, habent, vt conſtat.

Quæſt. 24. 24. Quatuor partiri inter ſe volunt 396 aur. ita vt primus habeat $\frac{1}{2}$ & præterea 10. ſecundus $\frac{3}{5}$. minus 20. tertius $\frac{1}{3}$. & præterea 8. quartus denique $\frac{1}{4}$. minus 6. quantum ergo quiſque accipiet? In huiuſmodi quæſtionibus aufer ex tota ſumma numeros, qui accipi debent vltra partes dictas. & alios, qui deeſſe debent dictis partibus, ad eandem ſummam adiice. Vt hic aufer 10.& 8. vt remaneant 378. adde rurſus 20.& 6. fiunt 404. Deinde inuento minimo numero 60. continente datas minutias, cuius $\frac{1}{2}$. eſt. 30. & $\frac{3}{5}$. 36. & $\frac{1}{3}$. 20. & $\frac{1}{4}$. 15. quæ omnes faciunt 101. Dic ergo. Si 101. dant 404 (qui numerus productus eſt ex additione & ſubtractione datorum numerorum ex tota ſumma 396.) quid dabunt 30.36.20.& 15? vt hic vides.

101. 404. { 30? 36? 20? 15? } fiunt { 120. primi. 144 ſecundi. 80. tertii. 60. quarti. }

Quatuor igitur hi numeri inuenti proportiones habent eaſdem, quas datæ minutiæ, ſed in vnam ſummam collecti faciunt 404. non autem 396. vt quæſtio proponit. Quod ſi primo addas 10. vt fiant 130. & à ſecundo auferas 20. vt relinquantur 124. tertio item adiicias 8. vt fiant 88. & à quarto demum auferas 6. vt remaneant 54. efficient hi quatuor numeri 396. Vt autem habeant dictas proportiones, auferendi erunt prius numeri, & addendi, qui additi ſunt, & ſubtracti: Ita vt vere 130. ad 124. proportionem habeant, quam $\frac{1}{2}$. ad $\frac{3}{5}$. ſi prius 10. detrahantur ex illo & huic adiiciantur 20. vt recte dicatur numerus 130. continere $\frac{1}{2}$. & præterea 10. numerus vero 124. continere $\frac{3}{5}$. minus 20, &c.

Quæſt. 25. 25. Eſt ciſterna habens in imo fundo tres fiſtulas inæquales: maxima reſerata, effluit tota aqua in 2. horis; media autem aperta, effluit tota in 3. horis; minima denique aperta effluit tota aqua in 6. horis. Quanto ergo tempore reſeratis omnibus tribus fiſtulis, tota aqua effluet, ſi per ſingulas fiſtulas à principio vſque ad finem aqua ſemper eodem modo effluat? Sumpto minimo numero, quem tempora in quæſtione expreſſa, nempe horæ 2.3.& 6. metiantur, qui hic eſt 6. dic. Si maxima fiſtula in 2. horis vnam ciſternam exhaurit, quot ciſternas in 6. horis exhauriet? inueniesque 3. Item ſi media fiſtula vnam ciſternam exhaurit in 3. horis, quot ciſternas in 6 horis exhauriet? inueniesque 2. Item ſi minima fiſtula in 6. horis vnam ciſternam exhaurit quot ciſternas exhauriet in 6. horis? inueniesque 1. vt hic vides.

Horæ.	Ciſterna.	Horæ.	Ciſternæ.
2. 3. 6.	1.	6?	3. 2. 1.

Colle-

Collectis iam in vnum his tribus inuentis numeris 3.2.1. vt fiãt 6.dic. Si ſex ciſternæ euacuãtur in 6.horis, quanto tempore 1.euacuabitur? inueniesque in vna hora. Id quod hac ratione examinabis. Si maxima fiſtula exhaurit totam ciſternam in 2.horis, & media in 3.& minima in 6.quantam partem ciſternæ exhaurient ſingulæ fiſtulæ in 1.hora? veluti hic appoſitum eſt.

Horæ.	Ciſterna.	Hora.	Ciſterna.
2.			$\frac{1}{2}$.
3.	1.	1?	$\frac{1}{3}$.
6.			$\frac{1}{6}$.

Inuenies enim maximam fiſtulam euacuare $\frac{1}{2}$.ciſternæ, & mediam $\frac{1}{3}$.& minimam $\frac{1}{6}$.quæ omnes partes efficiunt vnam integram ciſternam.

Eadem hæc quæſtio ita proponi poteſt. Eſt ciſterna habens in ſummitate tres fiſtulas inæquales: maxima replet eiſternam in 2.duis horis, media in 3 & minima in 6.quanto ergo tempore omnes ſimul ciſternam implebunt? Inuenies enim 1.horam.

Pari ratione ita poteſt proponi. Sunt tres artifices: primus abſoluit opus quoddam in 2. annis, ſecundus in 3.& tertius in 6.quanto ergo tempore omnes ſimul idem opus perficient? Inuenies enim 1.annum.

Cæterum huiuſmodi quæſtiones ſolui etiam poſſunt hoc pacto. Inueſtigetur per regulam trium, quantum aquæ ſingulæ fiſtulæ exhauriant in 1. hora, treſque numeri inuenti in vnam ſummam colligantur. Nam ſi hæc ſumma fuerit 1.requiritur 1.hora, vt omnes fiſtulæ totam ciſternam euacuent: ſi vero non fuerit 1. inuenietur tempus requiſitum per regulam trium, vt in hoc exemplo erit manifeſtum. Sunt tres artifices: primus abſoluit opus quoddam in 6.annis, ſecundus in 9.& tertius in 18. Quanto ergo tempore omnes ſimul idem opus perficient? Die Si primus in 6.annis abſoluit 1.opus. & ſecundus in 9. & tertius in 18.quantum abſoluet quilibet in 1.anno? vt hic vides. *Alia ſolutio huius quæſt. ouis.*

Anni.	Opus.	Ann.		Operis.
6.				$\frac{1}{6}$. primi.
9.	1.	1?	fiunt	$\frac{1}{9}$. ſecundi.
18.				$\frac{1}{18}$. tertii.

Efficiunt autem tres numeri inuenti $\frac{1}{3}$. Die ergo Si. $\frac{1}{3}$. operis requirit 1. annum, quot annos requiret 1. opus inueniesque 3.annos. Quod examinabis, vt ſupra, veluti hic vides.

Anni.	Opus.	Anni.		
6.				$\frac{1}{2}$.prim.
9.	1.	3?	fiunt	$\frac{1}{3}$.ſecund.
18.				$\frac{1}{6}$.tert.

Inuenies enim primum in 3. annis abſoluere $\frac{1}{2}$.operis ſecundum $\frac{1}{3}$.& tertium $\frac{1}{6}$. quæ omnes partes efficiunt. 1.

Si prius exemplum hac arte explicaretur, prima ſtatim operatione ſcopus attingeretur: quia in 1. hora tota ciſterna euacuatur, vt conſtat ex operatione examinis dicti exempli.

26. Eſt ciſterna habens fiſtulam in orificio, per quam impletur in 4.horis: habet autem in imo fundo aliam fiſtulam, per quam in 6.euacuatur. Si ergo continue influat aqua, & effluat, quanto tempore ciſterna replebitur? Primum inueſtigare oportet, quanta pars ciſternæ (poſita illa conditione) in 1.hora impleatur; quod hoc modo fiet: Si in quatuor horis 1.ciſterna impletur, quantum implebitur in 1.hora? Inuenies autem $\frac{1}{4}$. ciſternæ. Rurſus. Si in 6.horis 1.ciſterna exhauritur, quantum euacuabitur in 1.hora? Inuenies autem $\frac{1}{6}$.ciſternæ. Si ergo auferas $\frac{1}{6}$.ex $\frac{1}{4}$.remanebit $\frac{1}{12}$.ciſternæ: ac tanta portio eiſternæ implebitur in 1.hora. Dic ergo. Si $\frac{1}{12}$.ciſternæ requirit vnam horã, quid requiret 1.ciſterna? Inueniesque 12.horas. Atque in tot horis ciſterna tota implebitur. Quod hac ratione examinabis verũ eſſe. Si in 4.horis impletur 1.ciſterna, in 12. horis quot ciſternæ implebuntur? Inuenies autem 3.ciſternas. Item ſi in 6.horis euacuatur 1.ciſterna, in 12.quot ciſternæ euacuabuntur? Inuenies auten 2.ciſternas quas ſi auferas ex 3.inuentis, remanebit 1.ciſterna plena. *Quæſt. 26.*

Quod ſi quis dicat: Ciſterna per fiſtulam ſuperiorem impletur in 3.horis, per inferiorem euacuatur in 8. hor.eodem modo ſoluetur quæſtio, ſi dicas. Si in 3. horis 1.ciſterna impletur, quantum implebitur in 1. hora? Inuenies autem $\frac{1}{3}$.ciſternæ. Item ſi in 8.horis vna eiſterna euacuatur, quantum euacuabitur in 1. hora? Inuenies autem $\frac{1}{8}$.ciſternæ. Si ergo demas $\frac{1}{8}$.ex $\frac{1}{3}$. remanebunt $\frac{5}{24}$. ac tanta portio eiſternæ implebitur in 1.hora. Dic ergo. Si $\frac{5}{24}$.ciſternæ requirunt 1.horã, quid requiret 1.ciſterna? Inueniesque $4\frac{4}{5}$. hor. quo tempore tota ciſterna implebitur. Quod ita probabis. Si in 3.hor.impletur 1.eiſterna, in $4\frac{4}{5}$.hor.quot ciſternæ replebuntur? Inuenies autẽ $4\frac{4}{5}$. ſi item in 8.horis euacuatur vna ciſterna, in $4\frac{4}{5}$.hor.quot eiſternæ euacuabuntur? Inuenies autem $\frac{3}{5}$. quas ſi ex $1\frac{3}{5}$.auferas, remanebit 1.ciſterna plena.

Breuius fortaſſis huiuſmodi quæſtiones ſoluentur, ſi quæratur, quanta portio ciſternæ implcatur in illis horis, in quib.tota impleretur, ſi nihil efflueret. Quod ita fiet in priori quæſtione. Die. Si 6. horæ 1. ciſternã euacuant, quantum euacuabunt 4 horæ? inueniesque $\frac{2}{3}$.quas ſi ex 1, auferas (ponimus enim 1.ciſternam 4.horis impleri, ſi nihil efflueret) remanebit $\frac{1}{3}$.quæ 4.horis implebitur. Die igitur rurſus. Si $\frac{1}{3}$.ciſternæ requirit 4.horas, quid requiret 1.ciſterna? Inueniesque 12.horas, vt prius. *Alia ſolutio huius quæſtionis.*

In poſteriori vero quæſtione dic. Si 8.horæ 1.ciſternam exhauriunt, quantum exhaurient 3.horæ? Inueniesque $\frac{3}{8}$.quas ſi demas ex 1. (ponimus enim 1.ciſternam 3. horis impleri, ſi nihil efflueret) remanebunt $\frac{5}{8}$. quæ 3.horis implebuntur. Dic ergo rurſus. Si $\frac{5}{8}$. ciſternæ expoſcunt 3.horas, quid expoſcet 1.ciſterna? inueniesque $4\frac{4}{5}$.horas, vt prius.

REGVLA ALLIGATIONIS.

CAPVT XXI.

Regula alligationis quid.

SOLENT nonnunquam Arithmetici varias merces variorum pretiorum miſcere, ita vt, ſtatuto quodam pretio medio, omnes eo emantur: quod quidem efficiunt regula quadam, quam regulam alligationis dicunt, eo quod variæ merces alligentur, quodammodo ad vnum pretium, vt ex ſequentibus exemplis perſpicuum fiet.

Quæſt. 1.

Regula alligationis quomodo fiat.

1. Duo genera vini ſunt: menſura 1. primi conſtat 20. baioch. at menſura 1. ſecundi venditur 12. baioch. Quantum ergo ex vtroq; ſumendum eſt, vt menſura 1. valeat 15. baioch? Pone vnum pretium ſub altero, & ad ſiniſtram illorum colloca pretium ſtatutum, quod medium eſt inter data duo pretia. Deinde confer vtrunq; pretium datum cum ſtatuto pretio, differentiamque vtriuſque pone ad dexteram pretiorum, alternatim tamen, hoc eſt, differentiam maioris pretii iuxta minus pretium, & differentiam minoris iuxta maius: atq; has differentias in vnam ſummam collige, vt in exemplo vides.

Pretium medium.	Pretia.	Differentiæ.
	20.	3.
15.		
	12.	5.
		8.
		Summa differentiarum.

Poſt hæc inſtitue regulam trium bis, ita vt ſumma differentiarum primum locum occupet; menſura vero 1. ſecundum; & vtraq; differentia tertium, veluti hic cernis.

$$8. \quad 1 \quad \begin{Bmatrix} 3? \\ 5? \end{Bmatrix} \text{fiunt} \begin{cases} \frac{3}{8}\text{ primi.} \\ \frac{5}{8}\text{ ſecundi.} \end{cases}$$

Dic ergo. Si ſumma differentiarum 8. dat 1. menſuram, quid dabunt ſingulæ differentiæ 3. & 5? Inuenies enim ex primo vino accipiendas eſſe $\frac{3}{8}$ vnius menſuræ, ex ſecundo vero $\frac{5}{8}$. atq; ita fiet 1. menſura ex vtroq; conſtans 15. baiochis. Quod ita probabis. Dic. Si 1. menſura primi vini valet 20. baioch. quid valebunt $\frac{3}{8}$? Item, ſi 1. menſura ſecundi vini valet 12. baioch. quid valebunt $\frac{5}{8}$? vt hic cernis.

1.	20.	$\frac{3}{8}$.	fiunt	$7\frac{1}{2}$.
1.	12.	$\frac{5}{8}$.	fiunt	$7\frac{1}{2}$.

Inuenies enim duo pretia efficere 15. baiochos, quemadmodum proponitur.

Quæſt. 2.

2. Sunt duo genera argenti non puri. Primi libra 1. valet aur. 30. alterius libra 1. valet aur. 24. Vt ergo lib. 1. valeat aur. 28. quantum ex vtroq; argento ſumendum eſt? Facta alligatione, vt in præcedenti quæſtione, dic. Si ſumma differentiarum 6. dat 1. lib. quid dabunt ſingulæ differentiæ 4. & 2. vt hic vides.

Pretium medium.	Pretia.	Differentiæ.
	30.	4.
28.		
	24.	2.
		6
		Summa differentiarum.

$$6. \quad 1. \begin{Bmatrix} 4? \\ 2? \end{Bmatrix} \text{fiunt} \begin{cases} \frac{2}{3}\text{ primi.} \\ \frac{1}{3}\text{ ſecundi.} \end{cases}$$

Hoc enim modo habebis 1. lib. ex vtroq; argento conſtantem 28. aureis, vt examines, dic. Si 1. lib argenti prioris valet aur. 30. quid valebunt $\frac{2}{3}$ vnius libræ? Item ſi 1. lib. poſterioris argenti valet 24. aur. quid valebit $\frac{1}{3}$? vt hic apparet.

1.	30.	$\frac{2}{3}$?	fiunt	20.
1.	24.	$\frac{1}{3}$?	fiunt	8.

Atque ita 1. lib. conſtabit 28. aur. vt proponitur.

Quæſt. 3.

Nota.

3. Libra 1. piperis valet 4. Iul. Libra 1. garyophilli 3. Iul. Libra 1. cinnamomi 6. Iul. Libra 1. croci 10. Iul: Libra 1. zingiberis 8. Iul. Quantum ergo ex quolibet accipiendum eſt, vt 1. libra conſtet 7. Iuliis? Quando plures res proponuntur alligandæ, variis modis fieri poteſt alligatio, dummodo quælibet ſemel ſaltem alligetur. Poteſt n. quodlibet pretiū cum quolibet alio, vel cum pluribus etiam alligari ad pretium medium, ita tamen, vt ſtatutum pretium ſit medium inter duo, quæ alligantur ad ipſum, vel certe alteri illorum æquale: vt in hoc exemplo apparebit, quod variis alligationibus explicabimus.

Variis modis fieri poſſe alligationē eiuſdem exempli.

Primo ergo alligabimus pretia piperis, & zingiberis ad pretium medium, quorum differentiæ ſunt 3 & 1. alternatim collocatæ. Deinde pretia garyoph. & croci, quorum differentiæ ſunt 4. & 3. alternatim quoq; poſitæ. Denique quia ſupereſt ſolum cinnam. alligabimus eius pretium cum pretio Zingib. exempli gratia, quorum differentiæ ſunt 1. & 1. alternatim etiam ſcriptæ. Omnium differentiarum ſumma eſt 13. Differentiæ autem è regione Zingib. faciunt 4. Semper enim differentiæ plures è regione eiuſdem pretii poſitæ colligendæ ſunt in vnam ſumam. Dic iam. Si ſumma differentiarum 13. dat 1. lib. quid dabunt ſingulæ differentiæ 1. 3. 1. 4 4? vt hic vides.

Quid faciendū quādo plures differentiæ ponuntur è regione eiuſdem pretij.

Pretium medium.	Pretia.		Differentiæ.
	Piper.	4.	1.
	Garyoph.	3.	3.
7.	Cinnam.	6.	1.
	Crocus.	10.	4.
	Zingib.	8.	3. 1.
			13.
			Summa differentiarum.

$$13.\quad 1.\left\{\begin{matrix}1?\\3?\\1?\\4?\\4?\end{matrix}\right\}\text{fiunt}\left\{\begin{matrix}\frac{1}{13}.\text{pip.}\\\frac{3}{13}.\text{garyoph.}\\\frac{1}{13}.\text{cinnam.}\\\frac{4}{13}.\text{croc.}\\\frac{4}{13}.\text{zingib.}\end{matrix}\right.$$

Hac ratione habebis 1 lib. ex omnibus, quæ conſtet 7. Iul. Vt examines, dic. Si 1. lib. piperis valet 4. Iul. quid valebit $\frac{1}{13}$? Item, ſi 1. lib. garioph. valet 3. quid valebunt $\frac{3}{13}$? Item, ſi 1. lib. cinnā. valet 6. Iul. q d valebit $\frac{1}{13}$? Item ſi 1. lib. croci valet 10. Iul. quid valebunt $\frac{4}{13}$? Item ſi 1. lib. zingib. valet 8. Iul. quid valebunt $\frac{4}{13}$? veluti hic cernis.

$$1.\left\{\begin{matrix}4.\\3.\\6.\\10.\\8.\end{matrix}\right\}\text{quid}\left\{\begin{matrix}\frac{1}{13}?\\\frac{3}{13}?\\\frac{1}{13}?\\\frac{4}{13}?\\\frac{4}{13}?\end{matrix}\right\}\text{fiunt?}\left\{\begin{matrix}\frac{4}{13}.\text{pip.}\\\frac{9}{13}.\text{garyoph.}\\\frac{6}{13}.\text{cinnam.}\\3\frac{1}{13}.\text{croc.}\\2\frac{6}{13}.\text{aingib.}\end{matrix}\right.$$

Inueniesq; omnia pretia efficere 7. Iul. vt proponitur.

Alio modo fiet alligatio, ſi pretia piperis, & xingib. alligentur ad pretium medium: Item pretia piperis, & croci. Deinde pretia garyoph. & xingib. & rurſus pretia garyoph. & croci. Poſtremo pretia cinnam. & croci: Item pretia cinnam. & aingib. vt in hoc appoſito exemplo factum eſt. Neque vero plures alligationes fieri poſſunt in hoc exemplo. Nam pretia piperis, garyoph. & cinnam. inter ſe alligari non poſſunt, cum ſingula minora ſint ſtatuto pretio medio: atq; ita quodlibet illorum bis tantum alligari poteſt; poſteriorum autem duorum vtrumque ter, nempe cum quolibet trium priorum. At inter ſe alligari nequeunt, cum ſtatutum pretium 7. Iuliorum non ſit medium inter illa, ant alteri eorum æquale, ſed vtroque minus. Dic ergo. Si ſumma differentiarum 28. dat 1. lib. quid dabunt ſingulæ differentiæ 4. 4. 4. 8. & 8. vt hic cernis.

Alia alligatio huius 3. quæſtionis.

	Pretia.		Differentiæ.
Pretium medium.	Piper.	4.	1. 3.
	Garyoph.	3.	1. 3.
7.	Cinnam.	6.	3. 1.
	Crocus.	10.	3. 4. 1.
	Zingib.	8.	3. 4. 1.
			28. Summa differentiarum.

$$28.\quad 1.\left\{\begin{matrix}4?\\4?\\4?\\8?\\8?\end{matrix}\right\}\text{fiunt}\left\{\begin{matrix}\frac{4}{28}.\text{pip.}\\\frac{4}{28}.\text{garyoph.}\\\frac{4}{28}.\text{cinnam.}\\\frac{8}{28}.\text{croc.}\\\frac{8}{28}.\text{zingib.}\end{matrix}\right.$$

Ita enim conflabis 1. librā ex omnibus, quæ conſtet 7. Iuliis. Quod vt probes, dic. Si 1. lib. pip. valet 4. Iul. quid valebunt $\frac{4}{28}$? Item, Si 1. lib. garyoph. valet 3. Iul. quid valebunt $\frac{4}{28}$? &c. veluti hic factum eſſe vides.

$$1.\left\{\begin{matrix}4.\\3.\\6.\\10.\\8.\end{matrix}\right\}\text{quid}\left\{\begin{matrix}\frac{4}{28}\\\frac{4}{28}\\\frac{4}{28}\\\frac{8}{28}\\\frac{8}{28}\end{matrix}\right\}\text{fiunt}\left\{\begin{matrix}\frac{16}{28}.\text{pip.}\\\frac{12}{28}.\text{garyoph.}\\\frac{24}{28}.\text{cinnam.}\\2\frac{24}{28}.\text{crco.}\\2\frac{8}{28}.\text{zingib.}\end{matrix}\right.$$

Inuenies enim omnia pretia conficere 7. Iulios, quemadmodum in quæſtione proponitur.

Poteſt etiam alia ratione inſtitui alligatio huius eiuſdem exempli, ſi pretia piperis, & croci alligentur; Deinde pretia garyoph. & zingib. ac poſtremo pretia cinnam. & zingib. vt in hoc exemplo videre licet. Dic ergo. Si ſumma differentiarum 13. dat 1. lib. quid dabunt ſingulæ differentiæ 3. 1. 1. 3. & 5? quemadmodum hic vides.

Alia alligatio huius 3. quæſtionis.

	Pretia.		Differentiæ.
Pretium medium.	Piper.	4.	3.
	Garyoph.	3.	1.
7.	Cinnam.	6.	1.
	Crocus	10.	3.
	Zingib.	8.	4. 1.
			13. Summa differentiarum.

$$13.\quad 1.\left\{\begin{matrix}3?\\1?\\1?\\3?\\5?\end{matrix}\right\}\text{fiunt}\left\{\begin{matrix}\frac{12}{13}.\text{pip.}\\\frac{3}{13}.\text{garyoph.}\\\frac{6}{13}.\text{cinnam.}\\2\frac{4}{13}.\text{croc.}\\3\frac{1}{13}.\text{aingib.}\end{matrix}\right.$$

Sic enim habebis 1. lib. ex omnibus pro 7. Iuliis. Quod probabis, vt ſupra.

Vides igitur, variis modis fieri poſſe alligationem, ſi res alligandæ plures ſint, quam duæ; dummodo pretium medium ſemper minus ſit vno pretio alligando, & maius altero? vel æquale vni, & maius vel minus altero. Verum licet ex variis alligationibus ſemper habeas pondus rerum miſcendarum propoſitum pro pretio medio ſtatuto, non tamen eadem ſemper pondera ex rebus miſcendis accipies, vt ex propoſitis exemplis perſpicuū eſt.

Quid obſeruandū ſit in alligationibus pluriū rerum.

4. Vlna 1. panni rubri valet 4. aur. & vlna 1. panni viridis valet 6. aur. & vlna 1. panni nigri valet 10. aur. Vult quidam ex omnibus 80. vlnas pro 480. aureis, quantum ergo ex ſingulis pannis accipiet? In huiuſmodi quæſtionibus oportet prius inueſtigare pretium vnius vlnæ ex omnibus pannis mixtæ, quod ita fiet, in noſtro exemplo. Si 80. vlnæ mixtæ valent 480. aur. quid valebit 1. vlna? inueniesque 6. aur. quod eſt pretium 1. vlnæ medium inter pretium vilioris panni, & pretium carioris. Quod ſi reperiretur pretium non medium, impoſſibilis eſſe i quæſtio. Vt ſi diceret aliquis. Vult quidam ex omnibus pannis 80. vlnas pro 300. aur. vel pro 900. aur. impoſſibilis eſſet quæſtio. Nam ſi 800. valent 300. aur. valebit 1. vlna $3\frac{3}{4}$. quod pretium minus eſt pretio vilioris panni. Quare

Quæſt. 9. Quando quæſtio alligationis eſt impoſſibilis.

 neque

neque ex viliori panno habere poteſt quiſpiam 80.vlnas pro 300. aureis, tantum abeſt, vt ex omnibus vlnas 80. rurſus accipiat. Rurſus, ſi 80.vlnæ valent 900. aur. valebit 1.vlna $11\frac{1}{4}$. aur. quod pretium maius eſt pretio carioris panni. Quare plures vlnas carioris panni, quam 80. emet quiſpiam aureis 900. ac proinde multo plures, ſi ex omnibus aliquot vlnas accipere velit: Sed redeamus ad noſtrum exemplum.

Pretium medium.	Pretia.		Differentiæ.
	rub.	4.	4.
6.	virid.	6.	4.
	nig.	10.	2.0.
			10.
			Summa differeotiarum.

Inuento pretio medio vnius vlnæ, fiat alligatio vt in præcedentibus, quemadmodũ hic eſt factum. Primum enim alligauimus pretia 4. & 10. ad medium pretium 6. Deinde pretia 6.&10. Dic igitur. Si ſumma differentiarum 10. dat 80.vlnas, (tot enim vlnas accipere vult ex triplici panno) quid dabunt ſingulæ differentiæ 4.4.&2? vt hic factum eſt.

$$10. \quad 80. \left\{ \begin{matrix} 4? \\ 4? \\ 2? \end{matrix} \right\} \text{fiunt} \left\{ \begin{matrix} 32.\text{rubri.} \\ 32.\text{viridis.} \\ 16.\text{nigri.} \end{matrix} \right.$$

Ita enim ex tribus illis pannis ſumentur 80.vlnæ pro 480.aur. Quod ita probabis. Si 1.vlna valet 6.aur. (hoc enim pretium medium inuentum eſt vnius vlnæ ex tribus pannis mixtæ.) quid valebunt 32.vlnæ panni rubri, & 32.viridis, & 16.nigri? veluti hic cernis.

$$1. \quad 6. \left\{ \begin{matrix} 32? \\ 32? \\ 16? \end{matrix} \right\} \text{fiunt} \left\{ \begin{matrix} 192.\text{rub.} \\ 192.\text{virid.} \\ 96.\text{nig.} \end{matrix} \right.$$

Reperieſq; omnia pretia conficere 480.aureos.

Pretium medium.	Pretia.		Differentiæ.
	rub.	4.	4.0.
6.	virid.	6.	2.
	nig.	10.	2.
			8.
			Summa differentiarum.

Quod ſi pretium panni viridis non alligaſſemus cum pretio panni nigri, ſed cum pretio panni rubri, fieret ſequens alligatio. Verum alios numeros inueniſſemus. Dixiſſemus enim. Si ſumma differentiarũ 8. dat 80. vlnas, quid dabunt ſingulæ differentiæ 4.2.& 2? vt hic vides.

$$8. \quad 80. \left\{ \begin{matrix} 4? \\ 2? \\ 2? \end{matrix} \right\} \text{fiunt} \left\{ \begin{matrix} 40.\text{rub.} \\ 20.\text{virid.} \\ 20.\text{nig.} \end{matrix} \right.$$

Examen fiet, vt prius, ſi dicas. Vlna 1.valet 6.aur. quid valebunt vlnæ 40.panni rubri, & 20.viridis, & 20.nigri? inuenies enim omnia pretia conficere 480.aureos.

Quæſt.5. 5. Sunt quatuor genera vini: primi amphora 1. valet 21. baioch. ſecundi 27. tertii 30. & quarti 40. Vult quidam miſcere ex his 300 amphoras, ea lege, & conditione, vt ſingulæ amphoræ valeant 33. baioch. Quantum ergo ex quolibet accipiet? Hic neceſſario tria priora pretia cum poſteriori alliganda ſunt ad medium pretium 33. baioch. cum illa tria ſint hoc minora, vt in dato exemplo vides. Dic ergo. Si ſumma differentiarum 42. dat 300.amphoras quid dabunt ſingulæ differentiæ 7.7.7.& 21? vt patet in exemplo.

	Pretia.	Differentiæ.
	21.	7.
	27.	7.
33	30.	7.
	40.	12.6.3.
		42.
		Summa differentiarum.

$$42. \quad 300. \left\{ \begin{matrix} 7? \\ 7? \\ 7? \\ 21? \end{matrix} \right\} \text{fiunt} \left\{ \begin{matrix} 50.\text{primi.} \\ 50.\text{ſecundi.} \\ 50.\text{tertii.} \\ 150\ \text{quarti.} \end{matrix} \right.$$

Sic enim conficies 300.amphoras, quarum ſingulæ conſtabunt 33.baioch. Quod vt probes, dic. Si ſumma differentiarum 42.dat 1.amphoram, quid dabunt ſingulæ differentiæ 7.7.7.& 21? vt hic vides.

$$42. \quad 1. \left\{ \begin{matrix} 7? \\ 7? \\ 7? \\ 21? \end{matrix} \right\} \text{fiunt} \left\{ \begin{matrix} \frac{1}{6}.\text{primi.} \\ \frac{1}{6}.\text{ſecundi.} \\ \frac{1}{6}.\text{tertii.} \\ \frac{1}{2}.\text{quarti.} \end{matrix} \right.$$

Atque ita habebis vnam amphoram ex quadruplici illo vino mixtam. Dic ergo rurſus. Si 1.amphora vini primi valet 21.baioch. quid valebit $\frac{1}{6}$.amphoræ? Item ſi 1.amphora ſecundi valet 27. quid valebit $\frac{1}{6}$? Item ſi 1.amphora tertii valet 30. quid valebit $\frac{1}{6}$? Item ſi 1.amphora quarti valet 40. quid valebit $\frac{1}{2}$? vt hic vides.

$$1. \left\{ \begin{matrix} 21. \\ 27. \\ 30. \\ 40. \end{matrix} \right\} \text{quid} \left\{ \begin{matrix} \frac{1}{6}? \\ \frac{1}{6}? \\ \frac{1}{6}? \\ \frac{1}{2}? \end{matrix} \right\} \text{fiunt} \left\{ \begin{matrix} 3\frac{1}{2}.\text{primi.} \\ 4\frac{1}{2}.\text{ſecundi.} \\ 5.\text{tertii.} \\ 20.\text{quarti.} \end{matrix} \right.$$

Quæ omnia pretia efficiunt 33. baioch. vt proponitur.

Breuius tamen ita quoq; inſtitui poteſt examen. Quoniam ſi 1.amphora valere debet 33.baioch. valebunt 300.amphoræ 9900.baioch. Dicemus ergo ſi 300.amphoræ valent 9900.baioch. quid valebunt 50.amphoræ primi vini, & quid 50.ſecundi, & 50.tertii, & 150.quarti? vt hic vides.

30. 9900.	50?	fiunt	1650.primi.
	50?		1650.ſecundi.
	50?		1650.tertii.
	150?		4950.quarti.

Inuenies enim omnia pretia conficere 9900.baiocbos.

6. Quidam pro 400. aur. emere vult 400. lib. aromarum variorum, nimirum garyophillorum, piperis, cinnamomi, Zingiberis, nucum myriſticarum, & croci, quorum hæc ſunt pretia pro ſingulis libris, Iulii 6. 7. 9. 11. 12. 16. Quot ergo ſingulorũ libras accipiet, vt 400. lib. pro 400. aur. habeat? Hic vt in quæſtione 4. dictum eſt, inueſtigandum eſt prius pretium medium vnius libræ, ad quod alligatio fieri debet, hoc modo. Si 400. lib. valent 400. aur. quid valebit 1. lib? Inuenies enim 1. aur. hoc eſt, 10. Iul. Quoniam vero, vt diximus, variæ fieri poſſunt alligationes, alligabimus primum garioph. cum Zingib. & croco. Deinde piper cum nuc. myriſt. & croco. Poſtremo cinnam. cum nuc. myriſt. vt hic factũ eſſe vides. Deinde dicemus. Si ſumma differentiarum 32. dat 400. lib. quid dabunt ſingulæ differentiæ 7. 8. 2. 4. 4. & 7? vt hic vides. Quæſt. 6.

Pretium medium.		Pretia.	Differentiæ.
	garyoph.	6.	1. 6.
	piper.	7.	2. 6.
	cinnam.	9.	2.
10.	zingib.	11.	4.
	nuc. myr.	12.	3. 1.
	crocus.	16.	4. 3.
			32.
		Summa differentiarum.	

32. 400.	7?	fiunt	87½.garyoph.
	8?		100.pip.
	2?		25.cinnam.
	4?		50.zingib.
	4?		50.nuc.myr.
	7?		87½.croc.

Inuenies enim 400. lib. quæ valebunt 400. aur. & ſingulæ lib. conſtabunt 10. Iul. Quod probabis, vt in præcedenti quæſtione dictum eſt.

Poſſunt fieri in bac quæſtione plures aliæ alligationes diuerſæ, vt in quatuor exemplis hic appoſitis apparett.

Pretium medium.	Pretia.	Differentiæ.
	6.	1. 2. 6.
	7.	1. 2. 6.
	9.	1. 2. 6.
10.	11.	4. 3. 1.
	12.	4. 3. 1.
	16.	4. 3. 1.
	51.	
	Summa differentiarum.	

Pretium medium.	Pretia.	Differentiæ
	6.	1.
	7.	2.
	9.	6.
10.	11.	4.
	12.	3.
	16.	1.
	17.	
	Summa differentiarum.	

Pretium medium.	Pretia	Differentiæ.
	6.	6.
	7.	2.
	9.	1.
10.	11.	1.
	12.	3.
	16.	4.
	17.	
	Summa differentiarum.	

Pretium medium.	Pretia.	Differentiæ.
	6.	2.
	7.	1.
	9.	6.
10.	11.	3.
	12.	4.
	16.	1.
	17.	
	Summa differentiarum.	

In primo enim quodlibet priorum trium pretiorum alligatum eſt cum omnibus tribus poſterioribus. In ſecundo vero primum cum quarto, & ſecundum cum quinto, & tertium cum ſexto. In tertio deinde primum cum ſexto, & ſecundum cum quinto, & tertium cum quarto. In quarto deniq; primum cum quinto, & ſecundum cum quarto, & tertium cum ſexto Atq; ita in ſimilibus quæſtionibus plures fieri poſſunt alligationes inter ſe diuerſæ.

7. Quidam vult ſtatuam argenteam 300. librarum. Offeruntur ei duo genera argenti: Primi lib. 1. valet 30. aur. ſecundi 20. quæ ita inter ſe miſcere vult, vt 1. lib. conſtet 24. aur. Quantum ergo ex quolibet argento ſumet, vt habeat 300. lib. quarum ſingulæ conſtent 24. aur? Ita ſtabit alligatio, vt hic vides. Dic ergo. Si ſumma differentiarum 10. dat 300. lib. quid dabunt ſingulæ differentiæ 4. & 6? vt hic vides. Quæſt. 7.

Pretium medium.	Pretia.	Differentiæ.
	30.	4.
24.		
	20.	6.
		10.
	Summa differentiarum.	

10. 300.	4?	fiunt	120.primi arg.
	6?		180.ſecundi arg.

Ita enim reperies 300. libras, quarum ſingulæ valent 24. aur. Quod probabis, vt in quæſtione 5. dictum eſt.

REGVLA FALSI SIMPLICIS POSITIONIS.

CAPVT XXII.

INTER alias Arithmeticæ regulas non poſtremum locum obtinet regula falſi, quæ ſic dicitur, non quod falſum nos doceat, ſed quod ex falſo poſito verum eruere oſtendat: quod quidem efficit, ponendo quemuis numerum, qui propoſitæ quæſtioni putatur ſatisfacturus, licet reipſa non ſatisfaciat. Hæc autem regula duplex eſt. Quædam enim vocatur ſimplicis poſitionis, in qua nimirum vnica fit poſitio vnius duntaxat numeri, qui quæſtioni creditur ſatisfacturus: quædam vero duplicis poſitionis dicitur, in qua videlicet duplex fit poſitio duorum numerorum, quorum vterque quæſtioni ſatisfacturus putatur. Regula falſi cur ſic dicta ſit. Regula falſi duplex.

Diſcrimen inter duas regulas falſi

Cæterum magnũeſt inter duas has regulas diſcrimen. Quidquid. n. per priorem ſoluitur, id etiam per poſteriorem explicari poteſt, non autem contra. Innumeræ enim propemodum quæſtiones per poſteriorem ſoluuntur, quæ nulla ratione per priorem poſſunt explicari. Nã ſub priori continentur illæ tantum quæſtiones, in quibus tales partes, aut numeri exprimuntur, qui eandẽ proportionem habent in paruis numeris, quam in magnis: quales ſunt, $\frac{1}{2}.\frac{1}{3}.\frac{2}{3}.\frac{1}{4}.\frac{3}{4}$. &c. Item numeri dupli, tripli, quadrupli, &c. Itaque ſatis eſſet, ſi poſterior regula ſola proponeretur. Sed quia per priorem plurimæ quæſtiones multo breuius explicantur, quam per poſteriorem, vtramque paucis declarabimus, initio ſumpto à priori, quæ facilior eſt.

Nota.

Regula falſi ſimplicis poſitionis quomodo fiat.

Propoſita igitur quæſtione quacunq; per regulam falſi ſimplicis poſitionis ſoluenda, ponatur quiuis numerus, qui quæſtioni creditur ſatisfacturus, iſque iuxta quæſtionis tenorem examinetur; & quidem ſi omnia conſonent, numerus poſitus erit is, qui quæritur: Si vero aliter ſe res habeat, falſa fuit poſitio numeri aſſumpti. Quare ex hoc falſo eliciendum erit verum beneficio regulæ trium, vt in exemplis declarabitur.

Quæſt. 1. 1. Tres emere conſtituunt domum quandam 7200. aur. Secundus duplo plus vult dare, quam primus, & tertius triplo plus, quam ſecundus. Quantũ ergo quiſque expendet? Hac quæſtione nihil aliud quæritur, quam vt numerus 2700. diuidatur in tres partes ea lege, vt ſecunda ſit dupla primæ, & tertia tripla ſecundæ. Pone ergo primum dare quotcunque aureos volueris, nempe 6. Igitur iuxta tenorem quæſtionis ſecundus dabit 12. cum hic numerus ſit duplus primi; tertius vero dabit 36. quod hic numerus ſit triplus ſecundi. Omnes autem hi tres numeri efficiunt 54. aur, cum tamen efficere deberent 2700. Dic ergo. Si 54 prouenerunt ex falſa poſitione 6. aur. primi ex qua vera poſitione prouenient 2700? Inueniesque primum dediſſe 300. aur. ac proinde ſecundum 600 tertium 1800. qui omnes tres numeri efficiunt 2700.

Poſſet quoque pecunia ſecundi, & tertij reperiri ex vtriuſque poſitione, ſi diceretur. Si 54. prouenerunt ex falſa poſitione 12. aur. ſecundi, & ex falſa poſitione 36. aur. tertij, ex quo prouenient 2700. Inuenires enim pecuniam ſecundi eſſe 600. aur. & tertij 1800. Sed ſatius eſt inueſtigare per regulam trium pecuniam vnius duntaxat. Ex hac enim aliorum pecuniæ facili negotio elicientur, iuxta tenorem quæſtionis.

Eoſdem proſus numeros repeririſſes, ſi pro primo alium numerum poſuiſſes, quam 6. ac proinde pro ſecundo alium, quam 12. & pro tertio alium, quam 36.

Quæſt. 2. 2. Interrogatus quidam, quantum pecuniæ in arca haberet, reſpondit ſe neſcire, hoc tamen ſe certo à procuratore cognouiſſe, $\frac{1}{3}$. & $\frac{1}{4}$. & $\frac{1}{5}$. ſuæ pecuniæ conſtituere 4700. aur. Quantum ergo pecuniæ is habuit? Hic etiam nihil aliud quæritur, quam numerus, cuius $\frac{1}{3}.\frac{1}{4}$. & $\frac{1}{5}$. ſimul efficiant 4700. Pone ergo illum habere 60. aur. (vt autem fractiones vitentur, quoad fieri poteſt, ſumendus eſt ſemper numerus, qui contineat fractiones in quæſtione expreſſas, vt cap. 10. docuimus, qualis hic eſt 60.) cuius $\frac{1}{3}$. eſt 20. & $\frac{1}{4}$. 15. & $\frac{1}{5}$. 12. quæ omnes partes conſtituunt 47. Debebant autem conficere 4700. Dic ergo. Si 47. prouenerunt ex 60. quem numerum falſo poſuimus, ex quo prouenient 4700. inueniemuſque 6000. atque tot aureos in arca habuit. Nam $\frac{1}{3}$. continet 2000. & $\frac{1}{4}$. 1500. & $\frac{1}{5}$. 1200. quæ omnes partes efficiunt 4700.

Quæſt. 3. 3. Interrogatus quidam ludimagiſter, quot haberet diſcipulos, reſpondit: Si adhuc ſemel tot haberem, quot habeo, & accederet $\frac{1}{2}$. eorum, & $\frac{1}{3}$. & $\frac{1}{4}$. & præterea 1. haberem 112. Quot ergo diſcipulos habuit? Hæc quæſtio ita propoſita ſolui non poteſt per hanc regulam, propterea quod vnitas, cuius poſtremo loco fit mentio, non poteſt habere eandem proportionem cum $\frac{1}{2}.\frac{1}{3}.\frac{1}{4}$. & duplo parui numeri, quam cum eiſdem partibus, & duplo magni numeri. Si tamen auferatur 1. ex numero 112. qui in quæſtione debet produci, ſoluetur quæſtio propoſita. Tunc enim nihil aliud quæritur, quam numerus, qui bis ſumptus vna cum $\frac{1}{2}.\frac{1}{3}$. & $\frac{1}{4}$. facit 111. Nam ſi tandem addatur 1. fient 112. Pone ergo illum habuiſſe 12. diſcipulos. Hic n. numerus continet fractiones datas. Si ergo totidem diſcipuli accedant, habebit 24. nempe duplo plures quã prius. Ad quos ſi rurſus accedat $\frac{1}{2}$ nimirũ 6. & $\frac{1}{3}$. nempe 4. & $\frac{1}{4}$. vt pote 3. habebit 37. Debebant autem eſſe 111? vt additio 1. haberet 112. Dic ergo. Si 37. prouenerunt ex 12. ex quo prouenient. 111? Inueniesque eum habuiſſe 36. diſcipulos. Nam ſi accedant totidem habebit 72. quibus ſi addantur $\frac{1}{2}.\frac{1}{3}$. & $\frac{1}{4}$. videlicet 18. 12. & 9. fient 111. addito denique 1. fient 112.

Quæſt. 4. 4. Quidam emit equum, hortum, ac domum 5000. aur. ea lege vt hortus quadruplo pluris conſtet, quam equus, at domus quincuplo pluris quam hortus. Quanti ergo emit equum, & quanti hortum, & quanti domum? Hic quæritur, vt numerus datus 5000. diſtribuatur in tres partes, ita vt ſecunda ſit primæ quadrupla, & tertia ſecundæ quincupla. Eſtque quæſtio hæc ſimilis primæ. Pone ergo equum valere 30. aur. quo poſito, valebit hortus 120. aur. & domus 600. qui omnes numeri conficiunt 750. Deberent autem conficere 5000. Dic ergo. Si 750. prouenerunt ex 30. ex quo prouenient 5000? Inueniesque 200, atque tot aureis fuit emptus equus, ac proinde hortus empus fuit 800. aur. & domus 4000. qui omnes numeri conſtituunt 5000. aur.

Quæſt. 5. 5. Quidam proficiſcens Venetiis Hieroſolymam expendit in itinere $\frac{2}{3}$. & $\frac{1}{5}$. ſuæ pecuniæ; domum autem reuerſus deprehendit ſibi ſupereſſe 36. aureos. Quantum ergo pecuniæ is ſecum tulit? Hic quæritur numerus à quo ſi auferãtur $\frac{2}{3}$. & $\frac{1}{5}$. reliquus ſit numerus 36. Pone illum habuiſſe 300. aur. ex quo ſi auferas $\frac{2}{3}$. nempe 200 & $\frac{1}{5}$. nimirum 60. ſuperſunt 40. Debebant autem remanere tantum 36. Dic ergo. Si 40. prouenerunt ex 300. ex quo prouenient 36. Inueniesque 270. atque tot aureos habuit. Nam ablatis $\frac{2}{3}$. nempe 180. $\frac{1}{5}$. nimirum 54. ſuperſunt 36.

Nota. Quod ſi quando contingat, partes in q̃ſtione expreſſas vnitatẽ ſuperare, ac proinde nõ poſſe ex poſito numero ſubtrahi, quæſtio impoſſibilis erit. Vt ſi diceret quis. Da mihi numerum, vt, ſi ex eo demas $\frac{3}{5}$. & $\frac{3}{5}$. relinquantur 36. quæſtio eſſet impoſſibilis. Nam $\frac{3}{5}$. & $\frac{3}{5}$. vnitatem ſuperant, ac proinde auferri nequeunt ex poſito numero 300. quia $\frac{3}{5}$. ſunt 180. & $\frac{3}{5}$. ſunt etiam 180. quæ partes ſimul conſtituunt 360. qui numerus ex 300. auferri non poteſt.

Quæſt 6. 6. Quæratur numerus, cuius $\frac{1}{2}.\frac{1}{3}.\frac{1}{4}.\frac{1}{5}$. & $\frac{1}{6}$. efficiant 522. Pone numerum eum eſſe 60. cuius $\frac{1}{2}.\frac{1}{3}.\frac{1}{4}.\frac{1}{5}$. & $\frac{1}{6}$. nempe 30. 20. 15. 12. 10. efficiunt 87. Nos autem volumus 522. Dic ergo. Si 87. prouenerunt ex 60. ex quo prouenient 522? Inueniesque 360. Huius enim numeri $\frac{1}{2}.\frac{1}{3}.\frac{1}{4}.\frac{1}{5}$. & $\frac{1}{6}$. nimirum 180. 120. 90. 72. & 60. efficiunt 522.

Quæſt 7. 7. Quidam interroganti ſe, quantum pecuniæ haberet, reſpondit, ſe tot aureos habere, vt ſi ad eos addatur $\frac{1}{2}$. eorum, & $\frac{1}{3}$. & $\frac{1}{4}$. & præterea 100. aur. conſtituant 300. aur. Quantam ergo pecuniam habuit? Vt hæc quæſtio

quæſtio per hanc regulã ſoluatur, detrahendi ſunt 100. aur. ex 300. vt in q̃ſtione tertia diximus, & inquirendus numerus, vt, ſi addatur eius $\frac{1}{2}$. & $\frac{1}{3}$. & $\frac{1}{4}$. fiant 200. Tunc enim additis 100 fient 300. vt in quæſtione proponitur. Pone ergo eũ numerũ eſſe 24. Huius $\frac{1}{2}$. eſt 12 & $\frac{1}{3}$. 8. $\frac{1}{4}$. 6. quæ omnes partes additæ ad 24. faciunt 50. Nos autẽ volumus, vt efficiant 200. Dic ergo Si 50. prouenerunt ex 24. ex quo prouenient 200? Inueniesq; 96. ac tanta fuit ſumma aureorum. Nam $\frac{1}{2}$. continet 48. & $\frac{1}{3}$. 32. & $\frac{1}{4}$. 24 qui omnes numeri faciunt 104. additi autem ad 96. efficiunt 200. ad quem numerum ſi tandem adijciantur 100. fient 300.

8. Quidam volens molere 500. modios tritici adit molitorem habentem 5. molas, quarum prima ſingulis horis molit 7. modios, ſecunda 5. tertia 4. quarta 3. quinta 1. Quanto ergo tempore totum triticum moletur, ſi omnibus molis triticum imponatur, & quantũ tritici ſingulis molis imponendum? Pone in 4. horis. Quo poſito, prima mola conficiet 28. modios, ſecunda 20. tertia 16. quarta 12. & quinta 4. qui omnes modii faciunt 80. Debent autem eſſe 500. Dic ergo. Si 80. modii prouenerunt ex 4. horis 500. modii ex quot horis prouenient? Inueniesq; 25. horas. In tot enim horis prima mola molet 175. modios, ſecunda 125. tertia 100. quarta 75. & quinta 25. qui omnes ſunt 500. modii; atq; tot modii cuilibet molæ ſubiiciendi ſunt, quot ipſa modios molit in 25. horas. Quæſt. 8.

9 Quidam proficiſcens ad nundinas lucratus eſt ex pecunia, quã ſecum attulerat, tantum, vt lucrum vna cum pecunia allata triplum eſſet pecuniæ allatæ. Ex hac deinde pecunia in aliis nundinis tantam pecuniam lucratus eſt, vt lucrũ vna cum pecunia ad has nundinas allata quincuplũ eſſet huius pecuniæ: Poſtremo ex hac pecunia in aliis nundinis tantũ lucratus eſt, vt lucrũ vna cum pecunia, quã proxime habebat, quadruplum eſſet illius pecuniæ; inuenitq; ſe habere 40000. aur. Quantũ ergo pecuniæ ad primas nundinas attulit? In hac q̃ſtione inquiritur numerus, qui multiplicatus per 3 & productus numerus per 5. & hic numerus productus per 4. faciat 40000. Pone eum numerũ eſſe 10. quem ſi multiplices per 3. facies 30. pro lucro vna cum pecunia in primis nũdinis. Si autẽ multiplices 30. per 5. procreabis 150. pro lucro vna cũm pecunia in ſecundis nundinis. Si denique multiplices 150. per 4. faciens 600. pro lucro vna cum pecunia in tertiis nundinis. Nos vero diximus, in tertiis nundinis eum habuiſſe 40000. aur. Dic ergo. Si 600. prouenerunt ex 10. ex quo prouenient 40000? Inueniesq; $666\frac{2}{3}$. atq; tot aureos ſecũ ille attulit ad primas nundinas. Nã ſi multiplicemus $666\frac{2}{3}$. per 3 efficiemus 2000. pro lucro & pecunia in primis nũdinis. Si deinde multiplicemus 2000. per 5. gignemus 10000. pro lucro ac pecunia in ſecundis nundinis. Si deniq; multiplicemus 10000. per 4. producemus 40000. pro lucro ac pecunia in tertiis nundinis. Quæſt. 9.

10. Inueſtigetur numerus, vt eo mulplicato per 4. & producto per 3. & hoc producto per 6. atque huic producto additis 10. producantur 800. Hæc quæſtio per hanc regulam ſolui nequit, niſi prius detrahantur 10. ex 800. propter rationem in quæſtione 3. dictam. Subtrahe ergo 10. ex 800. relinquenturque 790. atque hic numerus producendus eſt ex multiplicationibus in quæſtione expreſſis. Nam ſi ei addantur 10. fiet numerus 800. Pone numerum quæſitum eſſe 10. quẽ ſi multiplices per 4. facies 40. qui numerus multiplicatus per 3. facit 120. hic denique numerus mulplicatus per 6. producit 720. Deberent autem produci 790. Quare dic. Si 720. prouenerunt ex 10. ex quo prouenient 790? Inueniesque $10\frac{35}{36}$. atque hic eſt numerus, qui quæritur. Si enim multplices $10\frac{35}{36}$. per 4. facies $43\frac{8}{9}$. quem numerum ſi rurſus multiplices per 3. gignes numerum $131\frac{2}{3}$. quem ſi deniq; per 6. multiplices, procreabis 790. Additis autem 10. fient 800. Quæſt. 10.

11. Senex quidam interroganti de ſua ætate, reſpondit, ſe tot habere annos, vt ſi eis adderetur $\frac{1}{2}$. ipſorum, & ex ſumma detraheretur $\frac{1}{4}$. ipſius, haberet 99. annos. Quot ergo annos habuit? Hic inueniendus eſt numerus, ad quem ſi adiiciatur $\frac{1}{2}$. ipſius, & ex ſumma detrahatur $\frac{1}{4}$. eiuſdem ſummæ reliquus ſit numerus 99. Pone eum habuiſſe 80. annos. Si igitur adiiciatur eorum $\frac{1}{2}$. nempe 40. anni fient 120. à quibus ſi detrahatur $\frac{1}{4}$. nimirum 30. ſupererunt 90 Dicuntur autem ſupereſſe 99. Dic ergo. Si 90. prouenerunt ex 80. ex quo prouenient 99. Inueniesq; 88. atque tot annos ſenex ille habuit. Si namque eis adiicias $\frac{1}{2}$. eorum nimirum 44. facies 132 à quibus ſi auferas $\frac{1}{4}$. nempe 33. ſupererunt 99. Quæſt. 11.

12. Apparet faſtigium cuiuſdem turris 24. palmorum: dicit autem quidam, $\frac{1}{3}$. & $\frac{2}{5}$. eiuſdem turris à circumiacentib. ædificiis occultari. Quanta ergo eſt totius turris altitudo? Hic quærendus eſt numerus, ita vt, ſi ab eo auferatur $\frac{1}{3}$. & præterea $\frac{2}{5}$. relinquãtur 24. Pone eum numerum eſſe 30. à quo ſi auferas $\frac{1}{3}$. videlicet 10. & $\frac{2}{5}$. nimirum 12. remanent 8. Nos autem volumus, vt relinquantur 24. Dic ergo. Si 8. prouenerunt ex 30. ex quo prouenient 90. Inueniesq; 24? ac tanta eſt altitudo turris. Nam ſi auferas $\frac{1}{3}$. & $\frac{2}{5}$. nempe 30. & 36. relinquentur 24. Quæſt. 12.

13. Eſt haſta, cuius $\frac{1}{3}$. alba eſt, & $\frac{1}{5}$. nigra & $\frac{2}{9}$. cærulei coloris, ſuperſunt autẽ 12. palmi rubri. Quanta eſt ergo longitudo illius haſtæ? Hic etiam inquirendus eſt numerus, ita vt, ſi ex eo dematur $\frac{1}{3}$. & $\frac{1}{5}$. & $\frac{2}{9}$. reliquus ſit numerus 12. Pone eum numerum eſſe 45. à quo ſi auferas $\frac{1}{3}$. nempe 15. & $\frac{1}{5}$. nimirum 9. & $\frac{2}{9}$. hoc eſt, 10. ſuperſunt 11. Debent autem remanere 12. Dic ergo. Si 11. prouenerunt ex 45. ex quo prouenient 12? Inueniesque. $49\frac{1}{11}$. ac tot palmorum eſt haſtæ illius longitudo. Nam eius $\frac{1}{3}$. continet palmos $16\frac{4}{11}$ at $\frac{1}{5}$. continet palmos $9\frac{9}{11}$. Item $\frac{2}{9}$. continent palmos $10\frac{10}{11}$. qui omnes numeri ablati ex longitudine haſtæ palmorum $49\frac{1}{11}$. relinquunt 12. palmos. Quæſt. 13.

14. Quidam pro 30. vlnis panni albi, & 40. vlnis panni nigri expendit 660. aureos, conſtiteruntque ſingulæ vlnæ panni nigri duplo pluris, quam ſingulæ vlnæ panni albi. Quanti ergo conſtitit vna vlna panni albi, & quanti vna vlna nigri? Pone vnam vlnam panni albi conſtitiſſe 4. aur. Et quoniam pretium vnius vlnæ panni nigri eſt duplo malus, neceſſe eſt, vnam vlnam panni nigri conſtitiſſe 8. aur. Ex quo fit 30. vlnas panni albi conſtare 120. aur. & 40. vlnas panni nigri valere 320. aur. qui omnes aurei efficiunt 440. Nos autem diximus, illum expendiſſe 660. aur. Dic ergo. Si 440. prouenerunt ex 4. ex quo prouenient 660? Inueniesque 6. aur. pro pretio vnius vlnæ panni albi, ac proinde 12. aur. pro pretio vnius vlnæ panni nigri. Ita enim 30. vlnæ panni albi conſtabunt 180. aur. & 40. vlnæ panni nigri valebunt 480. qui omnes aur. conficiunt 660. aur. Quæſt. 14.

RE-

REGVLA FALSI DVPLICIS POSITIONIS.

CAPVT XXIII.

Regula falſi duplicis poſitionis quomodo fiat.

PROPOSITA quæſtione quacunque per regulam falſi duplicis poſitionis explicanda, ponatur quiuis numerus ſiue paruus, ſiue magnus, qui iuxta tenorem quæſtionis examinetur. Nam ſi is quæſito reſpondeat, ſoluta erit quæſtio; ſin minus; notandus erit exceſſus, vel defectus, quo à veritate aberratum eſt vna cum litera P. vel M. quarum illa plus; hæc vero minus ſignificat, prout videlicet error veritatem exceſſerit, aut ab ea defecerit. Deinde ponatur rurſus aliquis alius numerus ſiue maior priore, ſiue minor, qui eodem modo examinetur, &c. Nam ex duplici hac poſitione, & duplici errore veritas elicietur hoc modo.

Quando vtraq; poſitio veritatem excedit, fit ſubtractio.

Si in vtraque poſitione à veritate aberratũ eſt per exceſſum, vel defectum ſubtrahatur minor error ex maiore, & numerus relictus pro diuiſore ſeruetur. Deinde numerus primo poſitus per ſecundũ errorẽ, & numerus ſecundo poſitus per primum errorem multiplicetur, minorque numerus productus ex maiore detrahatur. Nam ſi numerus hic reſiduus per diuiſorem iam inuentum nimirum per differentiam errorum, diuidatur, dabit quotiens numerum quæſitum, qui quæſtioni propoſitæ ſatisfaciet.

Quando vna poſitio veritatem excedit & altera deficit, fit additio.

Si vero in alterutra poſitione à veritate aberratum eſt per exceſſum, & in altera per defectum, colligendi erunt duo errores in vnam ſummam, vt habeatur diuiſor. Similiter duo illi numeri, qui ex multiplicatione numerorum poſitorum per errores, vt dictum eſt, producuntur, in vnam ſummam ſunt colligendi, vt habeatur numerus diuidendus, &c. Id quod ex quæſtionibus fiet perſpicuum.

Quæſt. 1.

1. Quæratur numerus, à cuius dimidio ſubtracta $\frac{1}{3}$. & $\frac{1}{4}$. relinquãtur 300. Ponatur numerus 24. qui nimirũ habeat partem $\frac{1}{2}$. in quæſtione expreſſam, & eius $\frac{1}{2}$. alias partes expreſſas, nempe $\frac{1}{3}$. & $\frac{1}{4}$. contineat vt fractiones quoad fieri poteſt, vitentur: qui quidem numerus facile inuenietur, ſi numerus ſumatur habens poſteriores fractiones, & is poſtea duplicetur. Solet autem numerus hic primo acceptus poni ad ſiniſtrãm in ſuperiori parte crucis, & error in parte inferiori ad ſiniſtrã quoque, litera denique P. vel M. prout veritatem exceſſerit error ille, vel ab ea defecerit, in medio crucis ad eandem ſiniſtrã: Secundus vero numerus acceptus cum errore, & litera P. vel M. eodẽ ordine collocari ſolet ad dextrã eiuſdem crucis, vt in noſtro exẽplo factum eſſe vides. Hic numerus 24. poſitus ita iuxta pronunciationem quæſtionis examinabitur. Eius $\frac{1}{2}$ eſt 12. à quo numero detrahenda eſt $\frac{1}{3}$. & $\frac{1}{4}$. Eſt autem $\frac{1}{3}$. numeri 12. numerus 4. & $\frac{1}{4}$. numerus 3. qui numeri detracti ex 12. relinquunt 5. Debebantt autem relinqui 300. Aberratum eſt ergo à veritare per defectum 295. vnitatum; ac proinde error hic notandus eſt cum litera M.

24 96
M X M
295. 280.
15.
diuiſor.

Ponatur ſecundo numerus 96. qui ita iuxta quæſtionem examinabitur. Eius $\frac{1}{2}$. eſt 48. at $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{4}$. huius numeri 48. ſunt 16. & 12. qui ex 48. ablati relinquunt 20. Debebant autem relinqui 300. Defecimus ergo rurſus à veritate 280. vnitatibus, ac proinde error hic notandus eſt etiam cum litera M.

Iam vero quia in vtraq; poſitione defecimus à vero, ſubtrahendus erit minor error ex maiore, vt habeatur diuiſor 15. in inferiori parte crucis collocandus. Deinde multiplicandus numerus 24. primo poſitus per 280. ſecundum errorem, & numerus 96. ſecundo poſitus per 295. primum errorem, minorque numerus productus 6720. ex maiore 28320. ſubtrahendus, vt relinquatur numerus diuidendus 21600. Hic enim numerus diuiſus per diuiſorẽ inuentum 15, dabit quotientem 1440. qui eſt numerus quæſitus. Eius enim $\frac{1}{2}$. eſt 720. & huius $\frac{1}{3}$. & $\frac{1}{4}$. ſunt 240. & 180. qui numeri ex 720. detracti relinquunt 300. vt in quæſtione proponebatur.

Sed ſoluamus eandem quæſtionem per alios duos numeros, qui veritatem excedãt, deinde per alios, quorum vnus veritatem excedat, & alter ab eadem deficiat. Ponatur ergo primũ numerus 4800. Huius $\frac{1}{2}$. eſt 2400. cuius $\frac{1}{3}$. & $\frac{1}{4}$. ſunt. 800. &. 600. qui numeri ex 2400. ablati relinquunt 1000. Debebant autem relinqui 300. exceſſimus ergo veritatem 700. vnitatibus atque adeo error hic ſcribendus eſt cum littera P. ponatur deinde numerus 2400. Huius $\frac{1}{2}$. eſt 1200. cuius $\frac{1}{3}$. & $\frac{1}{4}$. ſunt 400. & 300. quibus numeris ex 1200. ablatis remanent 500. Debebant autem relinqui 300. Exceſſimus ergo rurſus veritatem 200. vnitatibus. Iam vero, ſubtracto minore errore de maiore, relinquetur diuiſor 500. facta autem multiplicatione numerorum poſitorum per errores in crucem, vt dictum eſt, ſubtractoque minore numero producto 960000. de maiore 1680000. relinquetur numerus diuidendus 720000. qui per 500. diuiſus dabit Quotientem 1440. vt prius.

4800. 2400
P X P
700. 200.
500.
diuiſor.

Rurſus ponamus primo numerum 2400, quo examinato iuxta quæſtionem propoſitam, inueniemus exceſſum 200. qui error ſcribendus eſt cum litera P. Deinde ponamus numerum 96. quo eadẽ ratione examinato, deprehendemus defectũ 280. qui ſcribendus eſt cum litera M. Quoniam vero in vna poſitione exceſſimus veritatem, & in altera defecimus à vero, facienda erit additio errorum vt componatur diuiſor 480. Item duo numeri producti ex multiplicatione numerorum poſitorum per errores in crucem, nempe 672000. & 19200. in vnam ſummam colligendi, vt fiat diuidendus numerus 691200. Diuiſo enim hoc numero 691200. per 480. fiet Quotiens 1440. veluti prius.

2400. 96.
200. P X M 280.
480.
diuiſor.

2. Quæſt.

2. Alexander Magnus in familiari colloquio, quod cum Caliſthene Philoſopho quodam die habuit in ætatum mentionem forte fortuna, vt accidere ſolet, incidit, hoc modo eum alloquens. Ego Epheſtionem duobus ſupero annis, Clytus vero noſtram amborum ætatem complectitur, & inſuper quatuor annos. Ex quo, fit, vt omnes tres compleamus annos 96. quot nimirum pater tuus vixiſſe dicitur, Quot ergo annos habuit tunc Alexander, Epheſtion, & Clytus? Vides hic numerum 96. diſtribuendum eſſe in tres partes, ita vt prima ſuperet ſecundã binario, tertia vero duas primas ſimul ſumptas quaternario excedat. Vel inueniẽdos eſſe 3. numeros, quorũ primus ſecundũ ſuperet binario, & tertius primos duos ſimul ſumptos quaternario excedat, omnes vero tres conſtituant 96. Pone ergo Alexandrum habuiſſe annos 20. ac proinde Epheſtionem 18. & Clytum

tum 42. Ita enim ætas Alexandri ſuperat Epheſtionis ætatem annis 2. Clytus autem amborum ætatem annorum 38. comprehendit, & inſuper 4. annos, vt in quæſtione proponitur. Quoniam vero hi numeri 20. 18. 42. conſtituunt tantum 80. qui 96. deberent conficere, fit vt à vero defecerimus 16. vnitatibus. Pone ergo rurſus Alexandri annos fuiſſe 30. ac propterea Epheſtionem habuiſſe annos 28. & Clytum 62. qui omnes efficiunt 120. Deberent autem efficere tantum 96. Exceſſimus ergo veritatem 24. vnitatibus. Facta iam additione errorum inter ſe, quod vnus defecerit à veritate, & alter eandem exceſſerit, fient 40. pro diuiſore. Facta item multiplicatione 20. per 24. & 30. per 16. productiſque 480. 480. inter ſe additis, fient 960. quibus diuiſis per 40 fiet Quotiens 42. atque tot annos tunc Alexander Magnus habuit, ac proinde, iuxta quæſtionis tenorem, Epheſtio 22. Clytus 50. q omnes conſtituunt 96. annos.

20.		30.
18.		28.
42.		62.
—M	X	P—
80.		120.
16.		24.
	40.	
	Diuiſor.	

3. Tres habent ſummam quandam pecuniæ, nempe 44. aureos. Secundus habet duplo plus quam primus, & præterea 4. aureos. Tertius autem tantum habet quantum primus & ſecundus, & præterea 6. aur. Quantum ergo quiſque habet? Hic vides numerum 44. diſtribuendum eſſe in tres partes vt ſecunda dupla ſit primæ, contineatque præterea 4. tertia vero æqualis ſit primæ, ac ſecundæ, contineatque præterea 6. Vel quærendos eſſe tres numeros, quorum ſecundus contineat primum bis, & inſuper 4. tertius vero contineat primum, & ſecundum ſemel, & præterea 6. ipſi vero tres numeri conficiant 44. Pone ergo primum habere 10. quo poſito, habebit ſecundus 24. nempe duplo plus quam primus, & inſuper 4. tertius autem habebit 40. tantum videlicet quantum primus & ſecundus, ac præterea 6. qui tres numeri conficiunt 74. Deberent autem conficere ſolum 44. Exceſſimus ergo veritatem 30. vnitatibus. Pone deinde primum habere 6. Habebit ergo ſecundus 16. & tertius 28. qui tres numeri conficiunt 50. Deberent autē conficere ſolum 44. Exceſſimus ergo rurſum veritatem 6. vnitatibus, facta iam ſubtractione minoris erroris de maiore, quia vterque error exceſſit veritatem, reliquus erit diuiſor 24. Facta item multiplicatione 10. per 6. & 6. per 30. ſubtractoque illo producto 60. ex hoc 180. remanebit diuidendus numerus 120. quo diuiſo per 24. fiet Quotiens 5. Tantum ergo habet primus; ſecundus vero 14. & tertius 25. qui tres numeri in vnam ſummam collecti efficiunt 44. Quæſt. 3.

10.		6.
24.		16.
40.		28.
—P	X	P—
74.		50.
30.		6.
	24.	
	Diuiſor.	

Si multiplicarentur numeri, quos poſuimus ſecundum ac tertium habere per eoſdem errores, &c. inuenirentur numeri, quos ſecundus ac tertius habent. Vt ex 24. per 6. fiunt 144. & ex 16. per 30. fiunt 480. Subtracto autem illo numero ex hoc, remanent 336. quo numero diuiſo per 24. diuiſorem inuentum, fiet Quotiens 14. pro numero ſecundi. Item ex 40. per 6 fiunt 240. & ex 28. per 30. fiunt 840. ſubtracto autem illo numero ex hoc, reliquus erit numerus 600. quo diuiſo per 24. fiet Quotiens 25. pro numero tertii. Sed ſatius eſt, inuento numero primi, inueſtigare reliquos, iuxta pronunciationem quæſtionis, nempe eo modo, quo vterque numerus falſo poſitus eſt examinatus. Aliquando tamen commodius erit inquirere alios numeros ea ratione, qua primus quæſitus eſt; vt in quæſtione, 6. manifeſtum erit.

4. Quærantur tres numeri, qui faciant 60. ſecundus autem contineat primum bis. & inſuper 4. tertius vero contineat primum ac ſecundum, & præterea 6. Hæc quæſtio ſimilis eſt antecedenti. Pone primum numerum eſſe 6. ac proinde ſecundum 16. & tertiū 28. qui tres numeri faciunt 50. Deberent autem facere 60. Factus eſt ergo error per defectum 10. Pone rurſus primum numerum eſſe 8. ac proinde ſecundum 20. & tertium 34. qui tres numeri faciunt 62. Deberent a. facere 60. Exceſſimus ergo verum 2. vnitatibus. Operare, vt regula præcipit, inueniesque primum numerum eſſe $7\frac{2}{3}$. ac proinde ſecundum $19\frac{1}{3}$. & tertium 33. qui tres numeri efficiunt 60. Quæſt. 4.

6.		8.
16.		20.
28.		34
—M	X	P—
50.		62.
10.		2.
	12.	
	diuiſor.	

5. Diuidatur numerus 30. in duas partes, quarum prior cum 60 numerum faciat triplum numeri ex poſteriori parte, & 20. compoſiti. Pone priorem partem eſſe 20. ac proinde poſteriorem 10. Prior cum 60. facit 80. & poſterior cum 20. facit 30. Deberet autem numerus 80. triplus eſſe numeri 30. iuxta pronunciationem exempli, Cum ergo numerus 90. triplus ſit numeri 30 defecimus 10 vnitatibus à vero. Pone rurſus priorem partem eſſe 24. ac proprea poſteriorem 6. Prior cum 60. facit 84. & poſterior cum 20. facit 26. Deberet autem numerus 84. iuxta tenorem quæſtionis triplus eſſe numeri 26. Cum ergo numerus 78. triplus ſit numeri 26. exceſſimus veritatem 6. vnitatib. Operare, vt regula præcipit, inueniesque priorem partem eſſe $22\frac{1}{2}$. atque adeo poſteriorem $7\frac{1}{2}$. Prior enim cum 60. facit $82\frac{1}{2}$. & poſterior cum 20. facit $27\frac{1}{2}$. cuius numeri ille triplus eſt. Quæſt. 5.

20.		24.
10.		6.
—M	X	P—
10.		6.
	16.	
	Diuiſor.	

Alio modo inſtitui poteſt ſolutio huius quæſtionis. Poſtquam enim in prima poſitione deprehendimus priorem partem 20. cum 60. facere 80. & poſteriorem partem 10. cum 20. facere 30. cuius numeri ille deberet eſſe triplus; videndum eſt, cuius numeri triplus ſit numerus 80. Eſt autem triplus numeri $26\frac{2}{3}$, quem numerus 30, ſuperat numero $3\frac{1}{3}$. Exceſſimus ergo veritatem hoc numero $3\frac{1}{3}$. Rurſus poſtquam in ſecunda poſitione inuentum eſt priorem partem 24. cum 60 facere 84. & poſteriorem partem 6. cum 20. facere 26. cuius numeri ille deberet eſſe triplus; videndum eſt, cuius numeri triplus ſit numerus 84. Eſt autem triplus numeri 28. à quo numerus 26. deficit 2. vnitatibus. Defecimus ergo à veritate binario. Operare iam ſecundum regulæ præcepta, inueniesque priorem partem eſſe $22\frac{1}{2}$. & poſteriorem $7\frac{1}{2}$. vt prius. Sed prior ratio commodior videtur, cum facilius per eam vitentur fractiones.

20.		24.
10.		6.
P	X	M—
$3\frac{1}{3}$.		2.
	$5\frac{1}{3}$.	
	Diuiſor.	

Quæſt. 6. 6. Quærantur tres numeri, quorum primus additus ad 73. faciat duplum reliquorum duorum; ſecundus vero cum 73. faciat triplum duorum reliquorum; tertius denique cum 73. faciat quadruplum reliquorum duorum. Pone primum numerum eſſe 1. vel alium quemuis numerum imparem, vt additus ad 73. faciat numerum parem, qui poſſit habere dimidium, quandoquidem primus cum 73. debet facere numerum duplum reliquorum duorum. Quoniam igitur 1. cum 73. facit 74. qui numerus duplus debet eſſe iuxta pronunciationem exempli reliquorum duorum, neceſſe eſt, reliquos duos ſimul eſſe 37. Et quia ſecundus cum 73. debet facere numerum triplum primi, (qui eſt 1.) & tertii, diuidendus erit per antecedentem quæſtionem, numerus 37. in duas partes, quarum prior cum 73. faciat triplum numeri, qui ex poſteriore parte, & 1. componitur, atque ita, antequam propoſita quæſtio ſoluatur, neceſſe eſt, aliam prius ſoluere, quæ in ipſa operatione occurrit.

1.		3.
$10\frac{1}{4}$.		$12\frac{1}{2}$.
$26\frac{3}{4}$.	P X P	$25\frac{1}{2}$.
$54\frac{3}{4}$.		$36\frac{1}{2}$.
	$18\frac{1}{4}$. diuiſor.	

Pone ergo priorem partem eſſe 2. atque adeo poſteriorem 35. Facit autem prior cum 73. numerum 75. poſterior vero cum 1. facit 36. cuius triplus non eſt numerus 75. ſed numerus 108. Defecimus ergo à veritate 33. vnitatib. cum tot vnitatibus minor ſit noſter numerus 75. quam 108. Pone rurſus, priorem partem eſſe 5. atque adeo poſteriorem 32. Prior autem cum 73. facit 78. & poſterior cum 1. facit 33. cuius numeri triplus non eſt numerus 78. ſed numerus 99. Defecimus ergo rurſus 21. vnitatibus. Operare iam ſecundum præcepta regulæ falſi, inueniesque priorem partem eſſe $10\frac{1}{4}$. ac proinde poſteriorem $26\frac{3}{4}$.

2.		5.
35.		32.
M	X	M
33.		21.
	12. diuiſor.	

Itaque ſi primus numerus propoſitæ quæſtionis eſt 1. erit ſecundus $10\frac{1}{4}$. tertius $26\frac{3}{4}$. Ita enim primus cum 73. facit duplum reliquorum duorum, & ſecundus cum 73. facit triplum duorum reliquorum. Si ergo tertius cum 73. faciat quadruplum reliquorum duorum, ſatisfactum erit quæſtioni. Facit autē tertius cum 73. numerum $99\frac{3}{4}$. qui quadruplus non eſt numeri $11\frac{1}{4}$. qui ex primo, & ſecundo conflatur, ſed numerus 45. quadruplus eſt numeri $11\frac{1}{4}$. Exceſſimus ergo veritatem hoc numero $54\frac{3}{4}$.

Pone iam primum numerum eſſe 3. qui cum 73. facit 76. qui numerus duplus eſſe debet reliquorum duorum. Duo ergo reliqui efficient 38. Et quia ſecundus cum 73. debet facere triplum primi, (qui eſt 3.) & tertii diuidendus erit per antecedentem quæſtionem numerus 38. in duas partes, quarum prior cum 73. faciat triplum eius numeri, qui ex poſteriore parte, & 3. componitur. Pone ergo priorem partem eſſe 2. atque adeo poſteriorem 36. Facit autem prior cum 73. numerum 75. at poſterior cum 3. facit 39. cuius triplus non eſt numerus 75. ſed numerus 117. Defecimus ergo à veritate numero 42. Pone rurſus priorem partem eſſe 23. ac proinde poſteriorem 15. Prior autem cum 73. facit 96. at poſterior cum 3. facit 18. cuius numeri triplus non eſt numerus 96. Sed numerus 54. Exceſſimus ergo verum numero 42. Operare ſecundum regulam falſi, inueniesque priorem partem eſſe $12.\frac{1}{2}$. ac proinde poſteriorem $25\frac{1}{2}$.

2.		23.
36.		15.
M	X	P
42.		42.
	84. Diuiſor.	

Itaq; ſi numerus primus quæſtionis propoſitæ eſt 3. ſecundus erit $12\frac{1}{2}$. & tertius $25\frac{1}{2}$. Ita enim primus cum 73. facit duplum reliquorum duorum, & ſecundus cum 73. facit triplum reliquorum duorum. Si igitur tertius cum 73. faciat quadruplum reliquorum duorum, ſoluta erit quæſtio. Facit autem tertius cum 73. numerum $98\frac{1}{2}$. qui quadruplus non eſt numeri $15\frac{1}{2}$. ſed numerus 62. Exceſſimus ergo verum numero hoc $36\frac{1}{2}$.

Iam vero ſi multiplices primos numeros per errores in crucem, item ſecundos, & tertios, (commodius n. inuenientur ſecundus & tertius hoc modo, quam ſi ex primo inuento illos elicere vellemus, propterea quod opus eſſet quæſtione præcedenti hic vti) & facta ſubtractione, reſiduos numeros diuidas per diuiſorem inuentum $18.\frac{1}{4}$. nempe per differentiam errorum, quod in vtraque poſitione factus eſt ſemper exceſſus, inuenies primum numerum eſſe 7. ſecundum 17. & tertium 23. Nam primus cum 73. facit 80. qui numerus duplus eſt reliquorum duorum; at ſecundus cum 73. facit 90. qui numerus triplus eſt duorum reliquorum. Tertius denique cum 73. facit 96. qui numerus reliquorum duorum quadruplus eſt.

Quæſt. 7. 7. Quæratur numerus, quo multiplicato per 3. & producto additis 10. Et ſumma hac multiplicata per 4. productoque additis 20. Sūma vero hac multiplicata per 5. & producto additis 30. Summa denique hac muliplicata per 6. productoque additis 40. numerus producatur 6700 Finge numerum eum eſſe 2. qui multiplicatur per 3. facit 6. additis autem 10. fiunt 16. Hac autem ſumma multiplicata per 4. fiunt 64. & additis 20. fiunt 84. Rurſus hac ſumma multiplicata per 5. fiunt 420. additiſque 30. fiunt 450. Hac denique ſumma multipicata per 6. fiunt 2700. additiſque 40. fiunt 2740. Debebat autem vltima hæc ſumma eſſe 6700. Defecimus ergo à veritate hoc numero 3960. Finge denide eundem numerum eſſe 3. qui multiplicatus per 3. facit 9. additiſque 10. fiunt 19. Hæc autem ſumma multiplicata per 4. facit 76. additiſque 20. fiunt 96. Hæc rurſum ſumma per 5. muliplicata facit 480. additiſque 30. fiūt 510. Deniq; hæc ſumma multiplicata per 6. facit 3060. additiſque 40. fiunt 3100. Debebant autem effici 6700. Defecimus ergo iterum à veritate numero hoc 3600. Operare ſecundum regulam, inueniesque numerum quæſitum eſſe 13. Hic .n. numerus multiplicatus per 3. facit 39. additiſque 10. fiūt 49. Hęc ſumma multiplicata per 4. facit 196. additis vero 20. fiunt 216. quæ ſumma multiplicata per 5. facit 1080. additis autem 30. fiunt 1110. quæ denique ſumma multiplicata per 6. facit 6660. additiſque 40. fiunt 6700.

	2.	X	3.	
3960.	P		M	3600.
		360. diuiſor		

Quæſt. 8. 8. Ludimagiſter quidam tot habet diſcipulos, vt ſinguli perſoluant 5. aur. deſint illi 30. aur. ad emendam domum, in qua habitat; ſi vero ſinguli dent 6. aur. ſuperſint 40. aurei vltra pretium domus. Quot ergo habet diſcipulos, & quantum eſt pretium domus? Hic nihil aliud quæritur, quam numerus, qui multiplicatus per 5. talem procreet numerum, vt additis 30. eadem ſumma fiat, quæ relinquitur, ſi idem numerus per 6. multiplicetur,

tur, & à producto detrahantur 40. Pone ergo numerum diſcipulorum eſſe 30. qui multiplicatus per 5. facit 150. additiſque 30 fiunt 180. Tanti ergo conſtabit domus, ſi 30. diſcipulos habeat, quorum ſinguli perſoluant 5 aureos. Videamus iam, an ſuperſint vltra hoc pretium aur 40. ſi ſinguli ſoluant 6. aur. Multiplicatus autem idem numerus diſcipulorum 30. per 6. facit 180. nihilq; ſupereſt vltra pretium domus 180. aureorum: debebant autem ſupereſſe 40. aurei. Defecimus ergo à veritate hoc numero 40. Finge rurſus, numerum diſcipulorum eſſe 100. qui multiplicatus per 5. facit 500. additiſq; 30. fiunt 530. Tanti ergo conſtabit domus, ſi 100. habeat diſcipulos, quorum ſinguli perſoluant 5 aureos. Videamus iam, an ſuperſint 40. aurei vltra hoc pretium, ſi ſinguli dent 6. aureos. Multiplicatus autem idem numerus diſcipulorum 100. per 6. facit 600. ſuperſuntq; 70 aurei vltra pretium domus 530 aureorum: debebant autem ſupereſſe tantum 40. Exceſſimus ergo veritatem hoc numero 30. Operare per regulam falſi. inueniesq; numerum diſcipulorum 70. Hic enim numerus multiplicatus per 5. facit 350. additiſq; 30. fiunt 380. Tantum ergo eſt pretium domus. Idem numerus diſcipulorum 70. multiplicatus per 6 facit 420 qui numerus ſuperat pretium domus 380. aur. hoc numero 40.

30. 100.
P X P
40. 30.
70.
Diuiſor.

9. Duo inter ſe partiri debebant æqualiter 60. aureos. Orta autem rixa inter eos, quilibet rapuit, quantum potuit. Inita poſtea pace, primus depoſuit $\frac{1}{4}$. ſuæ pecuniæ, ſecundus vero $\frac{1}{3}$. factumq; eſt tunc, vt tam primus accipiens $\frac{1}{3}$. ſecundi, quam ſecundus accipiens $\frac{1}{4}$ primi habuerit 30. aur. Quantum ergo quiſque primo rapuit? Pone primum rapuiſſe 36. aur. atque adeo ſecundum reliquos 24. Si igitur primus deponat $\frac{1}{4}$. nempe 9. aur. relinquentur ei aur. 27. quibus ſi addamus $\frac{1}{3}$. ſecundi, quam dicitur depoſuiſſe. nempe 8. aur. faciemus 35. aur. pro primo. Debebat autem ſolum habere 30. Exceſſimus ergo verum numero 5. Pone iam primum ſurripuiſſe 12. ac propterea ſecundũ reliquos 48. Si igitur primus deponat $\frac{1}{4}$. hoc eſt, 3. aur. remanebunt ei 9. aur. quibus ſi addamus $\frac{1}{3}$. ſecundi, puta 16. aur. efficiemus 25. aur. pro primo. Debebat autem habere 30. Defecimus ergo 5. vnitatibus à vero. Operare ſecundum regulam, inueniesq; primum rapuiſſe 24. & ſecundum propterea 36. Nam ſi primus deponat $\frac{1}{4}$. nimirum 6. aur. & reliquis 18. addat $\frac{1}{3}$. ſecundi, nempe 12. habebit 30. aur. Sic etiam ſi ſecundus, depoſita $\frac{1}{3}$. nempe 12. aur. reliquis 24. addat $\frac{1}{4}$. primi, id eſt, 6. aur. habebit 30. aur. Quæſt. 9.

36. 12.
24. 48.
P X M
5. 5.
10.
diuiſor.

Porro ex poſitione ſecundi eodem modo verum eliciemus. Nam in priori poſitione, ſi ſecundus deponat $\frac{1}{3}$. nempe 8. aureos & reliquis 16 adiungat $\frac{1}{4}$. primi hoc eſt, 9. aur. habebit 25. aur. qui deberent eſſe 30. Defecimus ergo à veritate 5. vnitatibus. In poſteriori vero poſitione, ſi ſecundus deponat $\frac{1}{3}$. nempe 16. aur. & reliquis 32 adijciat $\frac{1}{4}$. primi, nimirum 3. aur. efficiet 35. aur. qui deberent eſſe tantum 30. Exceſſimus ergo verum rurſus 5 vnitatibus. Operare per regulam, multiplicando errores per poſitiones ſecundi, &c. reperieſque ſecundum ſurripuiſſe 36. aur. & primum 24.

36. 12.
2. 48.
M X P
5. 5.
10.
Diuiſor.

10. Duo partiri debebant inter ſe 100. aur. æqualiter: orta autem inter eos rixa, quilibet quantũ potuit arripuit. Cõpoſita deinde pace inter eos, depoſuit primus $\frac{1}{3}$. ſuæ pecuniæ, ſecundus vero depoſuit $\frac{1}{5}$. primus autem accepit hanc $\frac{1}{5}$. & ſecundus illam $\frac{1}{3}$ quo facto vterque habuit 50. Quantum ergo quiſq; primo rapuit? Finge, primum rapuiſſe 30. aur. ac proinde ſecundum 70. Primi $\frac{1}{3}$. eſt 10. quam ſi deponat, relinquuntur illi 20. Secund. $\frac{1}{5}$ eſt 14. quæ ſi detur primo, habebit primus 34. aureos. Debebat autem habere 50. Defecimus ergo à veritate numero hoc 16. Finge rurſus, primum ſurripuiſſe 60. ac propterea ſecundum 40. Primi $\frac{1}{3}$. eſt 20. quam ſi deponat, ſupererunt ei aur. 40. Secundi $\frac{1}{5}$. eſt 8. quam ſi demus primo, habebit primus 48. Debebat a. habere 50. Defecimus ergo in hac etiam poſitione à veritate numero 2. Operare per regulam. reperieſq; primum ſurripuiſſe $64\frac{2}{7}$. atq; adeo ſecundum $35\frac{5}{7}$. Primi enim $\frac{1}{3}$. eſt $21\frac{3}{7}$. quam ſi deponat, remanebunt ei $42\frac{6}{7}$. Secundi $\frac{1}{5}$. eſt $7\frac{1}{7}$. quam ſi deponat, ſupererunt ei $28\frac{4}{7}$. Iam vero ſi $\frac{1}{5}$. ſecundi, nempe $7\frac{1}{7}$. detur reſiduo primi. quod fuit $42\frac{6}{7}$. habebit primus 50. Item ſi $\frac{1}{3}$. primi, nimirum $21\frac{3}{7}$. detur reſiduo ſecundi, quod fuit $28\frac{4}{7}$. habebit quoque ſecundus 50. vt in quæſtione proponebatur. Quæſt. 10.

30. 60.
70. 40.
M X M
16. 2.
14.
Diuiſor.

11. Duo inter ſe ita diſtribuunt 100. aur. vt ſi primus deponat $\frac{1}{3}$. & ſecundus $\frac{1}{4}$. atque aggregatum harum partium bifariam ſecetur, deturque $\frac{1}{2}$. vtriq; numero relicto, numeri fiant æquales, nempe 50. & 50. Quantæ ergo ſunt amborum partes? Finge primi partem eſſe 60. ac proinde ſecundi 40. Si primus deponat $\frac{1}{3}$ nempe 20. remanent ei 40. Si vero $\frac{1}{4}$. ſecundi, nempe 10. adijciatur ad $\frac{1}{3}$. primi, hoc eſt, ad 20. fient 30. atq; huius aggregati $\frac{1}{2}$. nimirum 15. demus reſiduo primi, quod fuit 40. faciemus 55. Debebamus autem facere tantummodo 50. Exceſſimus ergo veritatem hoc numero 5. Finge deinde, primum habere 24. ac proinde ſecundum 76. (Poſui autem hoſce numeros, quod prior habeat $\frac{1}{3}$. & poſterior $\frac{1}{4}$. ſine fractionibus.) Si primus deponat $\frac{1}{3}$. nempe 8. ſuperſunt ei 16. Si vero $\frac{1}{4}$ ſecundi videlicet 19. adjciatur ad $\frac{1}{3}$. primi, nempe ad 8. vt fiant 27. atq; huius aggregati $\frac{1}{2}$. hoc eſt, $13\frac{1}{2}$ demus reſiduo primi, quod fuit 16. habebit primus $29\frac{1}{2}$. Debebat autem habere 50. Defecimus ergo à veritate $20\frac{1}{2}$. Operare iam per regulam, inueniesq, partem primi eſſe $52\frac{16}{17}$. ac proinde ſecundi $47\frac{1}{17}$. Nam primi $\frac{1}{3}$. eſt $17\frac{11}{17}$ quam ſi deponat remanent ei $35\frac{5}{17}$. Secundi $\frac{1}{4}$. eſt $11\frac{13}{17}$. quam ſi deponat, ſuperſunt ei $35\frac{5}{17}$. Aggregatum autem ex $\frac{1}{3}$. primi, & ex $\frac{1}{4}$. ſecundi, id eſt, ex $17\frac{11}{17}$. & $11\frac{13}{17}$. eſt $29\frac{7}{17}$. cuius $\frac{1}{2}$. videlicet $14\frac{12}{17}$. adiecta ad reſiduum primi, hoc eſt, ad $35\frac{5}{17}$. & ad reſiduum ſecundi, id eſt, ad $35\frac{5}{17}$. facit 50 & 50. Quæſt. 11.

60. 24.
40. 76.
P X M
5. $20\frac{1}{2}$.
$25\frac{1}{2}$.
Diuiſor.

12. Diuidatur numerus 1000. in duas partes, quarum maior ſuperet minorem numero hoc 49. Finge, maiorem partem eſſe 600. ac proinde minorem 400. Superat autem illa hanc numero 200. & nos volebamus, exceſſum eſſe 49. Exceſſimus ergo veritatem numero 151. Finge deinde, maiorem partem eſſe 550. ac proinde minorem 450. Superat autem illa hanc numero 100. & nos volebamus, exceſſum eſſe 49. Exceſſimus ergo rurſus veritatem numero 51. Operare ſecundum regulam, inueniesq; maiorem partem eſſe $524\frac{1}{2}$. ac propterea minorem $475\frac{1}{2}$. Illa enim hanc ſuperat numero dato 49.

600. 550.
400. 450.
P X P
151. 51.
100.
Diuiſor.

Quaeſt. 13. 13. Quidam habet duo pocula aurea, & vnum cooperculum 150. aureorum, quod additum priori poculo facit eius pretium triplũ pretii poſterioris poculi, additum vero poſteriori poculo facit illud eiuſdem pretij cum priori. Quanti ergo conſtant duo illa pocula? Hic quæruntur duo numeri, quorum primus cum 150. triplus ſit ſecundi, ſecundus vero cum 150. æqualis ſit primo. Pone, prius poculum conſtare 30. aur. (Pono autem hunc numerum, quia additis 150. fit numerus, qui habet ſubtriplum ſine fractione.) Addito cooperculo 150. aureorum, conſtabit 180. aur. & quoniam pretium hoc triplum eſſe debet pretii poſterioris poculi, conſtabit poſterius poculum 60 aur. Addito cooperculo, conſtabit 210. Debebat autem conſtare tantum 30. vt eius pretium æquale eſſet pretio prioris. Exceſſimus ergo veritatem numero 180. Pone deinde, prius poculum conſtare 90. aur. Addito cooperculo 150. aureorum, conſtabit 240. aur. ac proinde poſterius poculum conſtabit 80 aur. cum ille numerus huius ſit triplus. Addito cooperculo, conſtabit 230. Debebat autem conſtare tantum 90. vt eius pretium prioris pretio eſſet æquale. Exceſſimus ergo etiam hic veritatem numero 140. Operare per regulam, inueniesq; pretium prioris poculi 300. aur. Addito enim cooperculo 150. aur. fiet pretium 450. aur. atq; adeo pretium poſterioris poculi erit 150. aur. ſubtriplum videlicet illius; additoq; cooperculo fiet pretium 300. aur. æquale pretio prioris.

30. 90.
150. 150.
— M X P —
180. 240.
180. 140.
40.
Diuiſor.

Quaeſt. 14. 14. Quidam habet duo pocula aurea, & vnum cooperculum 100. aureorum, quod additum priori poculo facit eius pretium triplum pretii poſterioris: additum vero poſteriori facit eius pretium duplum pretii prioris. Quanti ergo æſtimantur duo illa pocula? Finge, prius valere 50 aur. addito cooperculo 100. aur. valebit 150. aur. ac proinde poſterius valebit etiam 50. aur. cum ille numerus huius triplus ſit. Addito cooperculo, valebit 150. aur. qui numerus duplus non eſt pretii prioris, ſed numerus 100. duplus eſt illius pretii. Exceſſimus ergo veritatem numero 50. Pone rurſus, prius valere 110. aur. Addito cooperculo, valebit 210. aur. ac propterea poſterius valebit 70. aur. cum ille numerus huius ſit triplus. Addito cooperculo valebit 170. aur. qui numerus duplus non eſt pretii prioris, ſed numerus 220 eius duplus eſt. Defecimus ergo à veritate numero 50. Operare per regulam, inueniesq; pretiũ prioris poculi 80. aur. Addito n. cooperculo 100. aureorum, fiet pretium 180. aur. ac proinde pretium poſterioris poculi erit 60 aur. ſubtriplum videlicet illius: additoq; cooperculo, fiet pretium 160. aur. duplum pretii prioris, quod erat 80. aur.

50. 110.
100. 100.
— P X M —
150. 210.
50. 50.
100.
Diuiſor.

Quaeſt. 15. 15. Quidam emit tot perdices, vt ſi emiſſet $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. & $\frac{1}{4}$. illarum, & præterea 22. haberet 100. Quot ergo emit? Hic quæritur numerus, cuius $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. & $\frac{1}{4}$. cum 22. faciãt 100. Pone eum emiſſe 12. Huius numeri $\frac{1}{2}$. eſt 6 & $\frac{1}{3}$. 4. & $\frac{1}{4}$. 3. quæ partes faciunt 13. additiſq; 22. fiunt 35. Debebant autem fieri 100. Defecimus ergo numero 65. Pone ſecundo, cũ emiſſe 60. Huius numeri $\frac{1}{2}$. eſt 30. & $\frac{1}{3}$. 20. & $\frac{1}{4}$. 15. q partes faciunt 65. additiſq; 22. fiunt 87. Debebãt a. fieri 100. Defecimus ergo iterũ numero 13. Operare per regulam, inueniesq;, eum emiſſe 72. perdices. Huius namq; numeri $\frac{1}{2}$. eſt 36 & $\frac{1}{3}$. 24. & $\frac{1}{4}$ 18. quæ partes conficiunt 78. additis a. 22. fiunt 100. quemadmodum propoſitum eſt.

12. 60.
M X M
65. 13.
52.
Diuiſor.

Quaeſt. 16. 16. Duo habent ſummam quandam aureorum: ſi ſecundus primo det 12. habebit primus ſextuplo plus, quam ſecundus: ſi vero primus det 15 ſecundo, habebit ſecundus decuplo plus, quam primus. Quot ergo quiſq; aureos habet? Hic quæruntur duo numeri, quorum primus cum 12. vnitatibus ſecundi ſextuplus ſit reſidui ſecundi, ſecundus vero cum 15. vnitatibus primi decuplus reſidui primi. Vt hanc, & ſimiles quæſtiones facilius ſine fractionibus ſoluas, incipiendum erit à numero ſecundo. Finge ergo, ſecundum habere 20. ex quo ſi dentur 12. vnitates primo, habebit primus, iuxta quæſtionis pronunciationẽ, ſextuplum reſidui ſecundi, quod eſt 8. Habebit tunc ergo primus 48. atq; adeo antequam 12. accepit à ſecundo, habuit 36. Iam vero ſi ex hoc numero 36. primi dentur 15. vnitates ſecundo, habebit ſecundus 35. qui numerus decuplus eſſe debet, iuxta quæſtionis tenorẽ, reſidui primi, quod eſt 21. Conſtat autem, numerum 35. non eſſe decuplum numeri 21. ſed numerum 210. Defecimus ergo à veritate numero 175. Pone rurſus ſecundum habere 100. ex quo ſi dẽtur 12. primo, habebit primus, vt vult quæſtio, ſextuplum reſidui ſecundi, quod eſt 88. Habebit ergo tunc primus 528. atq; adeo, antequam 12. accepit à ſecundo habuit 516. Iam vero ſi ex hoc numero 516. primi dentur 15 vnitates ſecundo, habebit ſecundus 115. qui numerus decuplus eſſe debet, vt quæſtio vult, reſidui primi, quod eſt 501. conſtat autem, numerum 115. non eſſe decuplum numeri 501. ſed numerum 5010. Defecimus ergo rurſus à veritate numero 4895 Operare per regulam, inueniesq; ſecundum habere $17\frac{2}{59}$. ex quo ſi dentur 12. vnitates primo, habebit primus ſextuplum reſidui ſecundi, quod eſt $5\frac{2}{59}$. Habebit ergo tunc primus $30\frac{12}{59}$. ac proinde, antequam à ſecundo accepit 12. habuit $18\frac{12}{59}$. Si enim ex hoc numero dentur ſecundo 15. vnitates, habebit ſecundus $32\frac{2}{59}$. qui numerus decuplus eſt reſidui primi, quod eſt $3\frac{12}{59}$. vt quæſtio proponit.

20. 100.
M X M
175. 4895.
4720.
Diuiſor.

Quaeſt. 17. 17. Duo habent ſummã quandam aureorũ: Si ſecundus det 6. primo, habet primus duplum reſidui ſecundi; ſi vero primus ſecundo det 3. habebit ſecundus numerum æqualem reſiduo primi. Quot ergo aureos quiſq; habuit? Hic etiam quæruntur duo numeri, quorum primus cum 6. vnitatibus ſecundi duplus ſit reſidui ſecundi, ſecundus vero cum 3. vnitatibus primi æqualis reſiduo primi. Pone ſecundum habere 15. ex quo ſi dentur 6 vnitates primo, habebit primus 18. duplum videlicet reſidui ſecundi, quod eſt 9. atque adeo, priuſquam acc. pe-

rec

ret 6. à ſecundo, habuit 12. Iam vero ſi ex hoc numero dentur 3. vnitates ſecundo, habebit ſecundus 18. qui numerus æqualis non eſt reſiduo primi, quod eſt 9. ſed maior. Exceſſimus ergo veritatem nomero 9. Pone deinde, ſecundum habere 20. ex quo ſi dentur 6. vnitates primo, habebit primus 28. duplum videlicet reſidui ſecundi, quod eſt 14. Antequam ergo acciperet 6. à ſecundo, habuit 22. Iam vero ſi primos det ſecundo 3. vnitates, habebit ſecundus 23. qui numerus non eſt æqualis reſiduo primi, quod eſt 19. ſed maior. Exceſſimus ergo rurſus veritatem numero 4. Operare per regulam, inueniesque, ſecundum habere 24. ex quo ſi dentur 6. vnitates primo, habebit primus 36. nempe duplum reſidui ſecundi, quod eſt 18. Prius ergo habuit 30. atque adeo ſi det 3. vnitates ſecundo, habebit ſecundus 27. qui numerus æqualis eſt reſiduo primi, quod etiam eſt 27.

15.   20.
P X P
9.   4.
5.
Diuiſor.

18. Eſt ciſterna habens in fundo tres fiſtulas inæquales: per maximam reſeratam effluit tota aqua in 2. horis, per mediam in 3. & per minimam in 6. Si ergo aqua ſemper æquabiliter effluat, quanto tempore effluet, ſi omnes tres fiſtulæ ſimul reſerentur? Finge in 4. horis, & dic. Si maior fiſtula in 2. horis euacuat 1. ciſternam, quid euacuabit in 4. horis? inueniesq; 2. ciſternas. Item, Si media fiſtula in 3. horis euacuat 1. ciſternam, quantum exhauriet in 4. horis? inueniesq; $1\frac{1}{3}$. ciſtern. Item, Si minima fiſtula in 6. horis exhaurit 1. ciſternam, quantum euacuabit in 4. horis? inueniesq; $\frac{2}{3}$. ciſtern. atq; ita omnes tres fiſtulæ in 4. horis euacuarent 4. ciſternas. Nos autem volumus tantum 1 ciſternam. Exceſſimus ergo veritatem numero 3. Pone ſecundo in 10. horis, & dic. Si maxima fiſtula in 2. horis exhaurit 1. ciſternam, quantum exhauriet in 10. horis? inueniesq; 5. ciſternas. Item ſi media fiſtula 1. ciſternam euacuat in 3. horis, quantum euacuabit in 10. horis? reperiesq; $3\frac{1}{3}$. ciſtern. Item ſi minima fiſtula in 6. horis euacuat 1. ciſternam, quid exhauriet in 10. horis? inueniesq; $1\frac{2}{3}$. ciſtern. atq; ita omnes tres fiſtulæ euacuarent in 10. horis 10. ciſtern. Nos autem volumus 1. ciſtern. Exceſſimus ergo veritatem numero 9 Operare per regulam, inueniesq; in 1. hora euacuari ciſternam. Nam maxima fiſtula in vna hora exhauriet $\frac{1}{2}$. & media $\frac{1}{3}$. & minima $\frac{1}{6}$. quæ omnes partes conficiunt 1. ciſternam. *Quæſt. 18.*

4.   10.
P X P
3.   9.
6.
Diuiſor.

Hæc quæſtio etiam ita proponi poteſt. Eſt ciſterna habens in orificio tres canales inæquales. Per maximum impletur ciſterna in 2. horis, per medium in 3. & per minimum in 6 &c.

19. Eſt ciſterna habens fiſtulam in orificio, per quam impletur in 12. horis: in imo vero fundo habet aliam fiſtulam, per quam euocuatur in 18. horis. Si igitur per ſuperiorem continue influat aqua, & per inferiorem ſemper effluat, quanto tempore replebitur tota ciſterna? Pone in 20. horis, & dic. Si in 18. horis euacuatur 1. ciſtern. quid euacuabitur in 20. horis? inueniesq; $1\frac{1}{9}$. ciſtern. Neceſſe eſt ergo in 20. horis impleri $2\frac{1}{9}$. ciſtern. vt eodem tempore euacuata $1\frac{1}{9}$. ciſterna maneat 1. ciſterna repleta. Dic ergo: ſi in 12. horis impletur 1. ciſterna, quid implebitur in 20. horis? inueniesq; $1\frac{2}{3}$. ciſtern. Nos autem volumus $2\frac{1}{9}$. ciſter. Defecimus ergo à veritate numero hoc $\frac{4}{9}$. Pone ſecundo in 30. horis, & dic. Si in 18. horis euacuatur vna ciſterna, quid euacuabitur in 30. horis? inueniesq; $1\frac{2}{3}$. ciſtern. Neceſſe eſt ergo in 30. horis impleri $2\frac{2}{3}$. ciſtern. vt eodem tempore euacuata $1\frac{2}{3}$. ciſtern. relinquatur 1. ciſterna plena. Dic ergo. Si in 12. horis impletur in 1. ciſterna, quid implebitur in 30. horis? Inueniesque $2\frac{1}{2}$. ciſtern. Nos autem volumus $2\frac{2}{3}$. ciſtern Iterum ergo à veritate defecimus hoc numero $\frac{1}{6}$. Operare per regulam, inueniesq; in 36. horis ciſternam impleri. Nam in 36. horis ſuperior fiſtula implebit 3. ciſternas; inferior autem exhauriet 2. ciſternas; atq; ita remanebit vna plena. *Quæſt. 19.*

20.   30.
M X M
$\frac{4}{9}$. $\frac{1}{6}$.
$\frac{5}{18}$.
diuiſor.

20. Artifex quidam abſoluit opus quoddam in 30. diebus; at ſi accedat alius, abſoluent ambo idem opus in 18. diebus. Quanto ergo tempore ſecundus hic ſolus idem opus perficiet? Dic primo. Si primus artifex in 30. diebus abſoluit opus, quantum abſoluet in 18. diebus? inueniesq; $\frac{3}{5}$. operis. Eodem ergo tempore ſecundus abſoluet $\frac{2}{5}$. vt ambo totum opus perficiant. Pone ergo primo ſecundum abſoluere totum opus in 40. diebus. & dic. Si ſecundus in 18. diebus abſoluit $\frac{2}{5}$. operis, quantum abſoluet in 40. diebus? inueniesq; $\frac{8}{9}$. operis. Nos autem poſuimus eum abſoluere totum opus. Defecimus ergo à veritate hoc numero $\frac{1}{9}$. Pone deinde ſecundum abſoluere opus in 60. diebus, & dic. Si ſecundus in 18. diebus abſoluit $\frac{2}{5}$. operis, quantum abſoluet in 60. diebus? inueniesq; $1\frac{3}{9}$. Nos autem poſuimus eum abſoluere 1. opus. Exceſſimus ergo veritatem hoc numero $\frac{3}{9}$. Operare per regulam, inueniesq; ſecundum abſoluere opus totum in 45. diebus. Nam ſi in 18. diebus abſoluit $\frac{2}{5}$. operis, abſoluet in 45. diebus 1. opus. *Quæſt. 20.*

40.   60.
M X P
$\frac{1}{9}$. $\frac{3}{9}$.
$\frac{4}{9}$.
Diuiſor.

Facilius tamen ſine regula falſi hæc quæſtio ſoluetur, hoc modo. Poſtquam inueniſti, ſecundum in 18. diebus abſoluere $\frac{2}{5}$. operis, ita vt ſuperſint $\frac{3}{5}$. Dic. Si $\frac{2}{5}$. requirunt 18. dies, $\frac{3}{5}$. quot dies requirent? inueniesq; 27. dies, qui additi ad 18. faciunt 45. dies, quibus totum opus perficiet, vt prius. Vel certe dic. Si $\frac{2}{5}$. requirunt 18. dies, quot dies requiret 1. opus integrum? Inuenies namq; ruſum 45. dies, vt prius. *Alia ſolutio huius quæſtionis.*

21. Tres inter ſe ita luſerunt, vt ſtatim primus lucratus ſit $\frac{1}{2}$ pecuniæ ſecundi: poſtea vero ſecundus $\frac{1}{3}$. pecuniæ tertii: tertius deniq; $\frac{1}{4}$. pecuniæ eius, quam primus in ludum attulit. Finito autem ludo, quiſq; ipſorum 700. aur. habuit: quantum ergo pecuniæ quiſque in ludum attulit? Hic aliud nihil quæritur, quam vt datus numerus 2100. (Si enim ſinguli habent 700 habebunt omnes tres 2100.) in tres partes diſtribuatur, ita vt, ſi prima det $\frac{1}{4}$. tertiæ, accipiat vero $\frac{1}{2}$. ſecundæ; ſecunda autem accipiat $\frac{1}{3}$. tertiæ, fiant tres numeri æquales, nempe 700. 700. 700. Vel certe quæruntur tres numeri, quorum primus depoſita $\frac{1}{4}$. ſi accipiat $\frac{1}{2}$. ſecundi, faciat 700. ſimiliter ſecundus, depoſita $\frac{1}{2}$. cum $\frac{1}{3}$. tertii faciat 700. eodemq; modo tertius, depoſita $\frac{1}{3}$ cum $\frac{1}{4}$ primi faciat 700. Pone primum luſorem attuliſſe 100. aur. depoſita $\frac{1}{4}$. nempe 25. ſuperſunt ei 75. Et quia hoc reſiduum cum $\frac{1}{2}$. ſecundi debet facere 700. erit $\frac{1}{2}$. ſecundi 625. *Quæſt. 21.*

100.   200.
1250.   1100.
225.   450.
M X M
525   350.
175.
diuiſor.

quod hic numerus cum reſiduo primi, nempe cum 75. faciat 700. Attulit ergo ſecundus 1250. Poſtquam autem perdiderit $\frac{1}{2}$.remanebunt ei 625. Quoniam vero reſiduum hoc cum $\frac{1}{3}$. tertii debet facere 700. erit $\frac{1}{3}$. tertii 75.quod hic numerus cum reſiduo ſecundi faciat 700.Quare tertius ſecum attulit in ludum 225.Poſtquam autem perdiderit $\frac{1}{3}$.ſupererunt ei 150.Et quia hoc reſiduum cum $\frac{1}{4}$.primi, h.e.cum 25.facit 175 Debebat autẽ facere 700.defecimus,ꝓpterea à veritate numero 525.Qui defectus hinc etiã cognoſcitur,ꝙ tres numeri poſiti 100.1250.225.faciunt 1575. qui numerus à 2100. quẽ numerum oẽs tres conficere debent, deficit hoc numero 525.

Pone deinde, primum attuliſſe in ludum 200.aur.Depoſita $\frac{1}{4}$.nempe 50.ſuperſunt ei 150.aur.qui cum $\frac{1}{2}$.ſecundi facere debent 700.Erit ergo $\frac{1}{2}$.ſecundi 550.aur. Attulit ergo ſecum 1100.Perdita autem $\frac{1}{2}$.ſuperſunt ei 550. aur.qui cum $\frac{1}{3}$.tertii facere debent 700.Erit ergo $\frac{1}{3}$.tertii 150.ac proinde in initio ludi habuit 450.Amiſſa autem $\frac{1}{3}$.remanent ei 300.aur.qui cum $\frac{1}{4}$.primi, hoc eſt, cum 50.faciunt 350. Debebant a.facere 700. Defecimus ergo etiam nunc à veritate numero 350.Qui defectus hinc quoq; elici poteſt, quod tres numeri poſiti 200.1100.450. faciunt 1750.qui numerus à 2100.deficit hoc numero 350.Operare per regulam,inueniesq; primum luſorẽ attuliſſe 400.aur ſecundum 800.& tertium 900 Numeros porro hos ſecundi & tertii inuenies vel ex regula falſi, multiplicando errores per ſecundi ac tertii poſitiones,&c. vel ex primo inuento, quemadmodum paulo ante ex 100.&200 quos numeros poſuimus primum habere, numeros ſecundi, ac tertii inueſtigauimus. Nam ſi primus habet 400.habebit(depoſita $\frac{1}{4}$.nimirum 100.quam perdidit)300 & quia cum $\frac{1}{2}$.ſecundi debet habere 700.erit $\frac{1}{2}$.ſecundi 400.ac proinde ſecundus attulit 800. Amiſſa autem $\frac{1}{2}$.ſupererunt ei 400. Quoniam vero hæc $\frac{1}{2}$.cum $\frac{1}{3}$.tertii facere debet 700.erit $\frac{1}{3}$.tertii 300.proptereaq; tertius attulit 900. Amiſſa enim $\frac{1}{3}$.remanebunt ei 600. quibus ſi addatur $\frac{1}{4}$.primi, hoc eſt, 100 aur.habebit 700.vt quæſtio vult.

Quæſt. 22. 22. Tres mercatores lucrati ſunt 400.aur.quos, habita ratione pecuniæ, quam quiſq; poſuit, ita diſtribuerunt, vt ſecundi portio ſuperaret portionem primi numero 12. tertii vero portio excederet portionem ſecundi numero 16. Quanta ergo fuit portio cuiuſq;? Finge, primũ accepiſſe 1.aur. (volo enim quæſtionem hanc ſoluere per minimos numeros, nempe per poſitionem 1.& 2. vt clarius appareat generalitas huius regulæ falſi.) ac proinde ſecundum 13.& tertium 29.qui omnes numeri conficiunt 43.Debebant autem conficere 400. Defecimus ergo à veritate numero 357. Finge rurſus, primum accepiſſe 2.aur. atq, adeo ſecundum 14.& tertium 30.qui omnes numeri conficiunt 46. Debebant a. conficere 400 Defecimus ergo etiã nunc à veritate numero 354.Operare per regulã, inueniesq; primi portionẽ eſſe 120.aur. ſecundi 132.& tertii 148. qui tres numeri conficiunt ſummã 400. aur. vt in quæſtione proponitur.

1.			2.
13.			14.
29.	M	X M	30.
43.			46.
357.			354.
	3.		
	Diuiſor.		

Quæſt. 23. 23. Imperatoris exercitus contra Turcas continet 40000.Germanorum peditum, tot vero Italos,& Hungaros, vt numerus Italorum ſit $\frac{1}{2}$.Germanorum, atq; Hungarorum: numerus vero Hungarorum ſit $\frac{1}{3}$.Germanorum atq; Italorum. Quantus ergo eſt Italorum,& quantus Hungarorum numerus atq; adeo quantus totus exercitus? Finge, Italos eſſe 30000. Et quoniam hic numerus debet eſſe $\frac{1}{2}$ Germanorum, atq; Hungarorum, eruntGermani, atq; Hungari 60000. Cum ergo Germani ſint 40000, erunt Hungari 20000.qui debent conficere $\frac{1}{3}$. Germanorum, atq; Italorum, nempe numeri 70000. Conficiunt autem $\frac{1}{3}$.numeri 60000. Exceſſimus ergo veritatem numero 10000.Finge ſecundo, Italos eſſe 24000. Et quoniam hic numerus debet eſſe $\frac{1}{2}$.Germanorum, atq; Hungarorum, erunt Germani, atq; Hungari 48000.Cum ergoGermani ſint 40000. erunt Hungari 8000.qui debent conficere $\frac{1}{2}$. Germanorum, atq; Italorum, nempe numeri 64000. Conficiunt autem $\frac{1}{3}$.numeri 24000. Exceſſimus ergo rurſus veritatem numero 40000.Operare per regulam, inueniesq; Italos eſſe 32000.Hungaros vero 24000.ac proinde totum exercitum 96000.Nam hac ratione Itali conficiunt $\frac{1}{2}$. Germanorum, atq; Hungarorum, Hungari vero $\frac{1}{3}$. Germanorum, atq; Italorum, vt patet.

30000.		24000.
20000.		8000.
P	X	P
10000.		40000.
	30000.	
	diuiſor.	

Quæſt. 24. 24. Viſum eſt hic apponere artificium illud Archimedis, quo teſte Vitruuio lib.9.cap 3.deprehendit furtum aurificis cuiuſdam in corona aurea, hoc eſt, quantum argenti fuerit commiſtum, nõ diſſoluta corona. Cum enim Hiero rex ſtatuiſſet Diis ſuis votiuam offerre coronam ex puro auro, aurifex, ſublata auri portione, argenti tantundem commiſcuit: Indignatus vero Hiero ſe contemptum, (vt verbis Vitruuii vtar) neq; inueniens, qua ratione id furtum deprehenderet, rogauit Archimedem, vti in ſe ſumeret ſibi de eo cogitationem. Tunc is, cum haberet eius rei curam, caſu venit in balneum, ibiq; cum in ſolium deſcenderet, animaduertit, quantũ corporis ſui in eo inſideret, tantum aquæ extra ſolium effluere. Itaq; cum eius rei rationem explicationis offendiſſet, non eſt moratus, ſed exiliuit gaudio motus de ſolio,& nudus vadens domũ verſus ſignificabat clara voce, inueniſſe, ꝙ quæreret. Nã currens identidem græce clamabat εὕρηκα, εὕρηκα. Tũ vero ex eo inuentionis cõgreſſu duas dicitur feciſſe maſſas æquo pondere, quo etiã fuerat corona, vnam ex auro, alterã ex argento. Cum ita feciſſet, vas amplũ ad ſumma labra impleuit aqua, in quo demiſit argenteam maſſam, cuius quanta magnitudo in vaſe depreſſa eſt, tantũ aquæ effluxit: ita exempta maſſa, quãto minus factum fuerat, refudit, ſextario menſus, vt eodẽ modo, quo prius fuerat ad labra æquaretur. Ita ex eo inuenit, quantũ ad certũ pondus argenti certa aquæ menſura reſpõderet. Cũ id expertus eſſet, tum aureã maſſam ſimiliter pleno vaſe demiſit,& ea exempta eadem ratione, menſura addita, inuenit ex aqua nõ tantum defluxiſſe, ſed tantum minus, quantũ minus magno corpore eodem pondere auri maſſa eſſet, q̃ argenti. Poſtea vero repleto vaſe in eadem aqua ipſa corona demiſſa, inuenit plus aquæ defluxiſſe in coronam, quam in auream eodem pondere maſſam,& ita ex eo, quod plus defluxerat aquæ in corona, q̃ in maſſa, ratiocinatus, deprehendit argenti in auro mixtionem. Hactenus Vitruuius. Explicemus a.nos, quo pacto per regulam falſi furtum dictum deprehendi poſſit, ſi adhibeatur artificium illud Archimedis.

Ponatur exempli cauſa, coronam illam fuiſſe 100.lib.eaq; impoſita in vaſe effluxiſſe 65 lib.aquæ, impoſita vero maſſa puri auri 100. lib. effluxiſſe 60. lib. aquæ; impoſita tandem maſſa pura argenti 100. lib. effluxiſſe 90. lib.aquæ. Finge ergo, aurificem abſtuliſſe 40.lib.aur.totidemq; libras argenti ſubſtituiſſe, ita vt in corona fuerint 60.lib.auri,& 40.lib.argenti. Vide iam, an corona ita confecta eijciat 65.lib aquæ, quod ita ſcies. Dic Si 100.lib.aur.eijciũt 60.lib.aquæ, quantum aquæ eijcient 60.lib.auri? Itẽ ſi 100.lib.argenti expellunt 90 lib.aquæ, quantum aquæ expellent 40.lib.argenti? inueniesq; in vtraq; operatione 36.lib.aquæ, ita vt corona eijciat 72.lib.aquæ Debebat autem eijcere tantum 65.lib. Exceſſimus ergo veritatem numero 7. Finge ſecundo, aurificem ſurripuiſſe 30.lib.auri, ac proinde in corona fuiſſe 70. lib. auri, & 30. lib. argenti. Dic ergo. Si 100. lib. auri expellunt 60 lib. aquæ, quantum aqoæ expellent 70. lib. auri? Item, ſi 100.lib. argenti eijciunt 90.lib. aquæ, quantum

60.		70.
40.		30.
P	X	P
7.		4.
	3.	
	diuiſor.	

aquæ eiicient 30. lib. argenti? inuenieſque in priori operatione 42. lib. aquæ, in poſteriori vero 27. quæ efficiunt 69. lib. aquæ. Debebant autem eſſe tantum 65. lib. Rurſus ergo exceſſimus veritatem numero 4. Operare per regulam, inuenieſq; aurificem accepiſſe $16\frac{2}{3}$. lib. auri, atq; adeo, coronam illam mixtam fuiſſe ex $83\frac{1}{3}$. lib. auri, & ex $16\frac{2}{3}$. lib. argenti. Quod vt probes, dic. Si 100. lib. auri eiiciunt 60. lib. aquæ, quantum aquæ eiicient $83\frac{1}{3}$. lib. auri? Item, ſi 100 lib. argenti eiiciunt 90. lib. aquæ, quantum aquæ eiicient $16\frac{2}{3}$. lib. argenti? inuenieſque in priori operatione 50. lib. aquæ, in poſteriori vero 15. lib. aquæ, quæ omnes conficiunt 65. libras aquæ, quas poſuimus coronam eiicere.

Eodem modo deprehenſum fuiſſet furtum, etiamſi maſſæ auri, & argenti non fuiſſent 100. lib. quot libras habebat corona, ſed quotcunque librarum, nempe auri 10. lib v. g. & argenti 20. dummodo diligenter exploretur, quantum aquæ ſingulæ maſſæ eijciant. Nos ponamus 10. lib auri eiicere 6. lib. aquæ. at 20. lib. argenti eiicere 18. lib. aquæ. Vnde in priori poſitione dices. Si 10. lib. aur. eiiciunt 6. lib. aquæ, quantum aquæ eiicient 60. lib. auri? &c.

Si ponatur corona 300 lib. & maſſæ auri, argentique totidem lib. hac conditione, vt corona eiiciat 218. lib. aquæ, aurum vero 206. lib. aquæ, & argentum 230. lib. aquæ; inueniemus in corona fuiſſe 150. lib. auri, totidemq; argenti. Vt patet in hiſce duabus poſitionibus, in quarum priore ſtatuuntur 100. lib. auri, & 200. lib. argenti: in poſteriore autem 101. lib. aur. & 199. argenti, &c.

100.		101.
200.		199.
—— P	X	P ——
4.		$3\frac{21}{25}$.
	$\frac{4}{25}$. Diuiſor.	

Hoc ergo artificio deprehendetur in quacunque maſſa ex auro, argentoque commixta. quantum auri, quantumque argenti permixtum ſit.

PROGRESSIONES ARITHMETICÆ.

CAPVT XXIV.

PROGRESSIO Arithmetica eſt ſeries plurium numerorum ſe æqualiter ſuperantium, vt hic. *Progreſſio Arithmetica quid.*

Progreſſio naturalis numerorum incipiens ab 1.

1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.13.14.&c.

Progreſſio numerorum imparium incipiens ab 1.

1.3.5.7.9.11.13.15.17.19.21.23.25.27.&c.

Pregreſſio numerorum parium incipiens à 2.

2.4.6.8.10.12.14.16.18.20.22.24.26.28 &c.

Prima enim harum trium progreſſionum dicitur progreſſio naturalis numerorum, incipitque ab 1. in qua omnes numeri ſe ordine ſuperant vnitate. Secunda vero dicitur progreſſio numerorum imparium, incipitque ab 1. in qua omnes numeri ſe ordine ſuperant binario. Tertia denique appellatur progreſſio numerorum parium, incipitque à 2. qui eſt primus numerus par, quemadmodum & 1 eſt primus numerus impar, atque adeo primus omnium numerorum, licet impropriè. In hac autem progreſſione numerorum parium omnes numeri ſe ordine ſuperant etiam binario, quemadmodum & in progreſſione numerorum imparium. Eodem modo hic. *Progreſſio naturalis numerorũ, & numerorum imparium parium, quid.*

Aliæ progreſſiones.

2.5.8.11.14.17.20.23.26.29. &c.

4.8.12.16.20.24.28.32.36.40. &c.

Prior namque harum progreſſionum incipit à 2. progrediturque per 3. cum omnes numeri in ea ſe ordine ſuperent ternario: poſterior vero incipit à 4. progrediturque per eundem numerum 4. cum in ea omnes numeri ſe ordine ſuperent quaternario.

Continuatur quælibet progreſſio Arithmetica, ſi differentia, exceſſuſue numero illi addatur, poſt quem progreſſio extendenda eſt. Vt ſi progreſſio hæc, 4.9.14.19.24. continuanda ſit, addemus differentiam, ſiue exceſſum progreſſionis, nempe 5. (quam quidem differentiam, exceſſumue inueniemus, ſi primum progreſſionis numerum à ſecundo, vel quemuis alium à proxime maiore in eadem progreſſione ſubtrahamus.) vltimo numero 24. efficiemuſque 29. Huic iterum numero adiiciemus 5. componemuſque 34 & ita deinceps in infinitum. Sic etiam, ſi quis progreſſionem incipere velit à 7. & progredi per differentiam, exceſſumue 6. addenda erunt 6 ad 7 vt fiant 13. pro ſecundo numero progreſſionis: Item 6. ad 13. vt fiant 19. pro tertio numero. &c. *Arithmetica progreſſio quo pacto continuetur.*

Pari ratione progreſſio Arithmetica continuatur retrocedendo, ſi differentia progreſſionis à minori extremo ſubducatur. Vt ſi progreſſio hæc 30.37.44.51.58. continuanda ſit verſus minores numeros, auferemus differentiam 7. ex minori extremo 30. vt relinquantur 23. Ex his rurſus ſubducemus 7. vt remaneant 16. Ex his rurſus ſubducemus 7. vt ſuperſint 9. à quibus rurſus auferemus 7. vt ſuperſint 2. à quibus amplius auferri nequeunt 7. ac propterea dicta progreſſio amplius non poteſt decreſcere. Sic etiam, ſi quis progreſſionem inchoare velit à 40. & progredi per 4. verſus vnitatem, auferenda erunt 4. ex 40. vt relinquantur 36. Item 4. ex 36. vt remaneant 32. Rurſus 4. ex 32. vt ſuperſint 28. Item 4. ex 28. vt relinquantur 24 &c. *Differentia progreſſionis Arithmeticæ quo modo minuatur* *Progreſſio Arithmetica decreſcere non poteſt in infinitum.*

Proprium eſt progreſſionis Arithmeticæ trium numerorum, vt aggregatum extremorum æquale ſit duplo medii numeri, vt hic apparet, 7.18.29. demonſtraturque à Iordano lib. 1. propoſ. 2. *Proprietas progreſſionis Arithmeticæ triũ numerorũ.*

Pregreſſionis vero Arithmeticæ quatuor numerorum proprium eſt, vt aggregatum extremorum æquale ſit aggregato mediorum; veluti hic apparet, 4.12.20.28 demonſtraturque à Iordano lib. 1. propoſ. 3. Atque hoc non ſolum verum eſt in quatuor numeris ſeſe continue eodem numero ſuperantibus, quales ſunt numeri in dato exemplo; ſed etiam in quatuor, quæ non continue ſe ſuperant eodem numero, dummodo eadem ſit differentia inter primum ac ſecundum, quæ inter tertium, ac quartum; vt hic vides 4.12.30.38. *Proprietas progreſſionis Arithmeticæ quatuor numerorum.*

Ex his proprietatibus colligitur, in omni progreſſione Arithmetica, cuius numerus terminorum eſt impar, aggregatum extremorum æquale eſſe cuilibet aggregato duorum numerorum quorumlibet ab extremis æqualiter diſtantium, nec non duplo medii numeri. Vt hic apparet.

 3.7.11.

Proprietas progreſſionis Arithmeticæ quotcunq; terminorum, ſi numerus terminorum fuerit impar.

3.7.11.15.19.23.27.31.35.39.43.

Cum enim quatuor hi numeri 3.7.39.43.habeant eandem differentiam,licet non continuatam (Nam eadem eſt differentia inter 3.&7.quæ inter 39.& 43.)erit, ex iis,quæ proxime diximus,aggregatum extremorum 3. & 43. æquale aggregato mediorum 7.& 39. Eadem ratione aggregatum ex 7.& 39. æquale erit aggregato ex 11. & 35. quod hi quatuor numeri 7.11.35.39. habeant eandem differentiam, licet non continuatam & ita de reliquis,donec ad tres medios numeros 19.23.27 perueniamus ; qui cum habeant eandem differentiam,erit,per ea, quæ paulo ante docuimus,aggregatum extremorum 19.& 27.æquale duplo medii numeri 23.Eadem eſt ratio de omnibus aliis huius generis progreſſionibus Arithmeticis.

Proprietas progreſſionis Arithmeticæ quotcunq; terminorũ, ſi numerus terminorũ fuerit par.

Ex poſteriore quoque proprietate efficitur, in omni progreſſione Arithmetica, cuius numerus terminorum eſt par,aggregatum extremorum æquale eſſe cuilibet aggregato duorum numerorum quorumlibet ab extremis æqualiter diſtantium. Vt hic manifeſtum eſt.

3.7.11.15.19.23.27.31.35.39.

Quod probabimus , vt prius , hoc dempto quod poſtremo loco ſumendi ſunt quatuor numeri medii 15. 19.23.27.non autem tres tantum.vt prius ; quia hic non eſt vnicus numerus medius,ſed duo. Nunc ſequuntur regulæ ad Arithmeticas progreſſiones ſpectantes.

REGVLA I.

Summa cuiuſcunq; progreſſionis Arithmeticæ quo pacto inueniatur.

SI in quauis progreſſione Arithmetica notus fuerit numerus terminorum vna cum minore,& maiore extremo,perueniemus in cognitionem ſummæ omnium terminorum , hac ratione. Addatur primus terminus vltimo, & aggregatum per numerum terminorum multiplicetur. Dimidium enim numeri producti erit ſumma omnium terminorum. Vt in hac progreſſione.

4.7.10.13.16.19.22.25.28.31.34.37.

Ex 4.&37.fiunt 41.quæ multiplicata per numerum terminorum,hoc eſt,per 12.(Sunt enim 12.numeri in ea progreſſione) faciunt 492. Huius numeri dimidium 246.eſt ſumma omnium numerorum datæ progreſſionis. Eademq; ratio eſt de cæteris.

Summa cuiuſcunq; progreſſionis Arithmeticæ quo pacto aliter inueniatur.

Hæc regula à nonnullis diuiditur in duo membra , hoc modo . Quando numerus terminorum eſt par, multiplicant aggregatum ex primo , & vltimo termino per dimidium numeri terminorum. Si vero numerus terminorum eſt impar,multiplicant dimidium aggregati ex primo , & vltimo termino (quando enim numerus terminorum eſt impar,ſemper illud aggregatum eſt par)per numerum terminorum. Hac enim ratione ſemper producitur ſumma omnium numerorũ progreſſionis. Vel hoc modo.Quando aggregatum ex primo &vltimo termino eſt par,multiplicant eius dimidium per numerum terminorum, ſiue is par ſit,ſiue impar. Si vero aggregatum illud eſt impar,multiplicant illud per dimidium numeri terminorum , qui numerus tunc ſemper par eſt. Vt in ſuperiori exemplo.quia numerus terminorum eſt par nempe 12.vel quia aggregatum ex primo termino & vltimo eſt impar,videlicet 41 multiplicant illud per 6 dimidium numeri terminorum,efficiuntque ſummam omnium numerorum 246. vt prius. In his autem duabus progreſſionibus , in quarum priore numerus terminorum eſt par,nempe 10. & in poſteriori impar , nempe 11.quoniam aggregatum ex primo termino,& vl-

3.7.11.15.19.23.27.31.35.39.

4.7.10.13.16.19.22.25.28.31.34.

timo eſt par , nimirum 42.in priore, & 38.in poſteriore,multiplicant tam dimidium illius , nimirum 21.per 10. numerum terminorum , quam dimidium huius , quod eſt 19. per 11.numerum terminorum,vt in priori efficiant ſummam 210. & in poſteriori 209.

Ratio harum regularum hæc eſt. Quoniam ſupra diximus,quando numerus terminorum eſt par,aggregatum extremorum æquale eſſe cuilibet aggregato duorum quorumlibet numerorum ab extremis æqualiter diſtantium,fit,vt omnia aggregata ſimul ſint tot, quot vnitates ſunt in dimidio numeri terminorum. Quare ſi vnum aggregatum, nempe extremorum multiplicetur per dimidium numeri terminorum,producetur ſumma omnium aggregatorum. Rurſus quia docuimus,quando numerus terminorum eſt impar,aggregatum extremorum eſſe æquale cuilibet aggregato duorum quorumlibet numerorum ab extremis æqualiter diſtantium, necnon duplo medii numeri,fit,vt medius numerus ſit dimidium cuiuslibet aggregati. Ergo omnia aggregata ſimul,vna cum medio numero,continebunt tot dimidia vnius aggregati,quot ſunt termini.Si igitur dimidium vnius aggregati, nempe extremorum , multiplicetur per numerum terminorum, producetur ſumma omnium terminorum.

Itaque , vt vides, ſatis eſt, vt cognoſcatur primus terminus,& vltimus,vna cum numero terminorum , ad eliciendam ſummam totius progreſſionis , etiamſi intermedii termini ignorentur. Quo pacto autem ex primo numero cognito , vna cum numero terminorum , & differentia progreſſionis, vltimus terminus inueſtigetur,ſequenti regula explicabimus.

Particularis inuentio ſummæ progreſſionis naturalis numerorum. Numerus terminorũ progreſſionis naturalis numerorum eſt vltimus terminus.

In progreſſione autem naturali numerorum , quæ ab 1. incipit , inuenietur breuiſſime ſumma omnium terminorum,hoc modo.Multiplicetur vltimus numerus (qui ſemper indicat numerum terminorum.) per numerum proxime maiorem.Huius enim numeri producti dimidium eſt ſumma omnium terminorum. Vt hic.

1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.

Ex multiplicatione vltimi numeri 11.per 12. numerum proxime maiorem producitur numerus 132.cuius dimidium 66.eſt ſumma totius progreſſionis. Sic etiam in hac progreſſione.

1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.

Ex multiplicatione vltimi numeri 10.per 11. numerum proxime maiorem fit numerus 110.cuius dimidium 55. eſt totius progreſſionis ſummæ.

Itaque ſi quis velit ſummam progreſſionis naturalis,quæ terminetur in quouis numero dato, vt in 100. in qua nimirum ſint 100.termini, multiplicandus erit vltimus numerus datus,in quo progreſſio dicitur terminari.

vt hic

vt hic numerus 100 per numerum proxime maiorem, vt hic per 101. Nam producti numeri (qui hic eſt 10100.) dimidium, nempe 5050. in dato exemplo, erit ſumma dictæ progreſſionis. Eademq; ratio eſt in aliis.

Alii hanc etiam regulam diſtrahunt in duo membra, hoc modo Si vltimus numerus eſt par, multiplicant numerum proxime maiorem in dimidium vltimi numeri: Si vero eſt impar, multiplicant eum in dimidium numeri proxime maioris. Hac enim ratione ſemper producitur ſumma omnium numerorum progreſſionis Vt in poſteriori progreſſione naturali, multiplicant 11. numerum proxime maiorem vltimo numero per 5. dimidium vltimi numeri, faciuntq; 55. ſummam totius progreſſionis, vt prius. In priori autem progreſſione naturali, multiplicant 11. vltimum numerum per 6. dimidium numeri proxime maioris vltimo numero, efficiuntq; 66. ſummam totius progreſſionis, vt prius.

Alia inuētio ſumma progreſſionis naturalis numerorum.

In progreſſione quoq; numerorum imparium, quæ ab 1. incipit, inuenietur facillimo negotio ſumma omnium terminorum, ſi numerus terminorum in ſeipſum multiplicetur, vt hic.

1.3.5.7.9.11.13.15.17.19,

Ex multiplicatione numeri terminorum, qui eſt 10. in ſeipſum procreatur numerus 100. qui eſt ſumma totius progreſſionis.

Particularis inuētio ſumma numerorum imparium.

Habetur autem numerus terminorum, ſi vltimo numero adiiciatur 1 & compoſiti numeri dimidium ſumatur, vt in dato exemplo, ſi addatur 1. ad 19. fit numerus 20. cuius dimidium 10 indicat numerum terminorum.

Itaq; ſi quis velit ſummam progreſſionis numerorum imparium, quæ terminetur in quovis dato numero, vt in 67. addenda erit vnitas ad vltimum numerum, in quo progreſſio terminari dicitur, vt hic ad 67. Nam compoſiti numeri (qui hic eſt 68.) dimidiū, nempe 34. in dato exemplo, dabit numerum terminorum: qui in ſe multiplicatus producet ſummam illius progreſſionis. Vt in propoſito exemplo, in quo ponuntur 34. termini, ſi multiplicetur numerus 34 in ſe, procreabitur ſumma illius progreſſionis 1156. Atq; ita de cæteris.

Numerus terminorū in progreſſione numerorum imparium quo pacto reperiatur.

In progreſſione denique numerorum parium, quæ à 2. incipit, nullo etiam labore reperietur ſumma, ſi dimidium vltimi numeri, quod ſemper indicat numerum terminorum progreſſionis, (ſemper enim tot ſunt termini progreſſionis eiuſmodi numerorum parium, quot ſunt vnitates in dimidio vltimi termini.) multiplicetur per numerum proxime maiorem illo dimidio. Vt hic.

Particularis inuētio ſumma numerorum parium.

2.4.6.8.10.12.14.16.18.20.22.24.

Ex multiplicatione 12. (qui numerus eſt dimidium vltimi termini, vel numerus terminorum) per 13 numerum proxime maiorem illo dimidio, fit numerus 156 hoc eſt, ſumma omnium illorum numerorum parium.

Itaq; ſi quis velit ſummam progreſſionis numerorum parium, quæ terminetur in quolibet dato numero vt in 100. multiplicandus erit numerus, qui dimidium conficie numeri vltimi dati, in quo dicitur terminari progreſſio, vt numerus 50. in dato exemplo, (hic enim dimidium eſt vltimi numeri dati 100) per numerum proxime maiorem illo dimidio, vt hic per 51. Productus enim numerus vt 2550. in dato exemplo, erit ſumma illius progreſſionis; & numerus terminorum erit 50. in eodem exemplo, quot nimirum vnitates ſunt in dimidio vltimi numeri. Et ſic de aliis.

Numerus terminorū in progreſſione numerorum pariū qua ratione inueniatur.

REGVLA II.

SI in quauis progreſſione Arithmetica notus fuerit numerus terminorū; vnà cum primo termino, & differētia progreſſionis, inueniemus vltimum terminum, etiamſi intermedios terminos non habeamus. hoc modo. Ex numero terminorum abjiciatur 1. reliquus vero numerus per differentiam multiplicetur, ac tandem huic producto primus terminus adjiciatur. Numerus n. cōpoſitus erit vltimus terminus. Vt ſi primus terminus alicuius progreſſionis ſit 3. numerus autem terminorū ſit 10. & differentia 8. cognoſcemus decimum terminum, hoc eſt, vltimum huius progreſſionis ſine intermedijs, hac ratione. Ex 10. numero terminorum auferemus 1. & reliquum numerum 9 multiplicabimus per 8. differentiam progreſſionis, producto tandem numero 72. adjiciemus 3. primum terminum. Compoſitus enim numerus 75. eſt decimus terminus progreſſionis, cuius primus terminus eſt 3. & differentia 8. Veluti hic apparet, vbi omnes termini ponuntur.

Vltimus terminus cuiuſcunq; progreſſionis Arithmetica quo pacto eliciatur ex numero terminorum vna cum primo termino, & differentia progreſſionis.

3.11.19.27.35.43.51.59.67 75.

Itaque ſi quis hanc quæſtionem proponat. Augias Herculi de numero boum, quos habebat, interroganti reſpondit, boues ſuos omnes per loca 40. ita eſſe diſpoſitos, vt quoties in primo loco continentur tres boues, toties in ſecundo contineantur 5. in tertio toties 7. in 4. toties 9. &c. Acceſſit Hercules ad primum locum, & reperit boues 30. Quot igitur boues habuit Augias, & quot boues in vltimo loco fuerunt? ſoluenda erit hoc modo. Quoniam in primo loco ſunt decies 3 boues, erunt in ſecundo loco decies 5. nimirum 50. & in tertio decies 7. nempe 70. & ſic deinceps, vt ſit progreſſio quædam Arithmetica, cuius primus terminus ſit 30. differentia vero 20. & numerus terminorum 40. Eliciendus ergo eſt primùm vltimus terminus per regulam, hoc modo. Ex 40. numero terminorum abjiciatur 1. & reliquus numerus 39. per 20. differentiam multiplicetur, productoque numero 780. primus terminus 30. adijciatur. Fiet enim vltimus terminus, ſiue quadrageſimus, 810. atque tot boues fuerunt in vltimo loco.

Quæſtio de bobus Augiæ.

Deinde vero ex hoc vltimo termino inuento & ex primo dato, vnà cum numero terminorū eruenda per primam regulam ſumma totius progreſſionis, etiamſi non habeamus intermedios omnes terminos, hoc modo. Primus terminus 30. vltimo termino 810. adijciatur compoſitusque numerus 840. per 20. hoc eſt, per dimidium numeri terminorum, multiplicetur. Productus namque numerus 16800. eſt ſumma totius progreſſionis, atque adeo numerus boum Augiæ. Vt autem videas, quot boues in ſingulis locis fuerint, atque adeo in vltimo loco fuiſſe 810. appoſuimus hic totam progreſſionem.

30. 50. 70. 90 110.130.150.170.190 210 230 250 270.290 310 330 350 370.390 410.
430.450 470.490.510 530.550.570.590.610.630 650.670 690.710 730 750 770 790 810.

Similis erit quæſtio, ſi quis ita dicat. Imperator ſtrenuis ducibus numero 20. diſtribuit pecuniam in direptione vrbis inuentam, hac lege, vt ei, qui vltimus murum hoſtilem tranſcēderat, daret 100. aur. penultimo 130. antepenultimo 160. & ita deinceps eodē modo progrediēdo. Quanta ergo fuit ea ſumma pecuniæ, & quantum,

Quæſtio de ducibus militia.

Digitized by Google

qui primus murum tranſcendit, accepit? Si namque ex 20. numero terminorum (tot enim ſunt termini in illa progreſſione, quot ſunt duces.) auferas 1. & reliquum numerum 19. multiplices per 30. differentiã progreſſionis, productoque numero 570. adiicias primum numerum, nempe 100. efficies 670. pro vltimo progreſſionis termino: atque tot aureos habuit primus dux. Inuento autem vltimo termino, ſi ei addatur primus, nimirum 100. vt fiant 770. atque hic numerus per 10. dimidium numeri terminorum multiplicetur, fiet ſumma omnium terminorum 7700. Tanta ergo fuit ſumma pecuniæ diſtributæ. Tota vero progreſſio ita ſe habet.

100. 130. 160. 190. 220. 250. 280. 310. 340. 370. 400. 430. 460. 490. 520. 550. 580 610. 640. 670.

PROGRESSIONES GEOMETRICÆ.

CAPVT XXV.

Progreſſio Geometrica quid.

PROGRESSIO Geometrica eſt ſeries plurium numerorum ſe in eadem proportione ſuperantium, vt hic apparet.

1 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. 256. 512. 1024. 2048. &c.
1 3. 9 27. 81. 243. 729. 2187. 6561. 19683 &c.
3 6. 12. 24. 48. 96. 192. 384 768. 1536. &c.

Prima enim harum progreſſionum progreditur per proportionem duplam, ita vt quilibet numerus ſit duplo maior eo numero, qui eum proxime præcedit; Secunda vero per triplam, ita vt quilibet numerus ſit triplo maior eo, qui proxime eum antecedit; atque vtraque harum progreſſionum ab 1. incipit; tertia deniq; per duplam etiam proportionem progreditur. non tamen ab 1. ſed à 3 initium ſumit.

Geometrica progreſſio quo pacto continuetur. Denominator proportionis in progreſſione Geometrica quomodo inueniatur.

Continuatur quælibet progreſſio Geometrica; ſi per denominatorem proportionis numerus ille, poſt quem progreſſio extendenda eſt, multiplicetur. Vt ſi progreſſio hæc proportionis triplæ, 4. 12. 36, continuanda ſit, multiplicabimus vltimum numerum 36. per 3 denominatorem proportionis, (quem quidem denominatorem inueniemus, ſi ſecundum numerum per primum diuidamus, vel quemuis alium per proxime minorem in eadem progreſſione.) efficiemuſque 108. Hunc iterum numerum per 3. multiplicabimus, producemuſque 324. & ita deinceps in infinitum. Sic etiam, ſi quis progreſſionem incipere velit à 7. & progredi per proportionem quincuplam, cuius denominator eſt 5. multiplicanda erunt 7. per 5. vt fiant 35. pro ſecundo numero progreſſionis. Item 35. per 5. vt fiant 175. pro tertio numero, &c.

Pari ratione progreſſio Geometrica continuatur retrocedendo, ſi minus extremum per denominatorem diuidatur. Vt ſi progreſſio hæc 64. 128. 256. 512. continuanda ſit verſus minores numeros, cum denominator proportionis ſit 2 diuidemus 64. per 2. faciemuſque 32. quæ rurſum partiemur per 2. inueniemuſq; 16. & ſic deinceps in infinitum. Vt in hoc exemplo apparet.

Progreſſio Geometrica decreſcit in infinitum.

512. 256 128. 64. 32. 16. 8 4. 2. 1 $\frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{1}{8}\frac{1}{16}$. &c.

Et nunquam erit finis huius decrementi in progreſſione Geometrica. Sic quoque, ſi quis progreſſionem inchoare velit à 100. & progredi verſus vnitatem per proportionem ſeſquialteram, cuius denominator eſt $1\frac{1}{2}$. diuidemus 100. per $1\frac{1}{2}$. vt habeamus $66\frac{2}{3}$. Item $66\frac{2}{3}$. per $1\frac{1}{2}$. vt habeamus $44\frac{4}{9}$. &c.

Proprietas progreſſionis Geometricæ trium terminorũ.

Proprium eſt progreſſionis Geometricæ trium numerorũ, vt numerus qui ex primo numero in tertium producitur, æqualis ſit numero, qui ex medio fit in ſeipſum multiplicato. Vt hic apparet, 3 9 27. demonſtraturque ab Euclide lib. 7. propoſ. 20.

Proprietas progreſſionis Geometricæ quatuor terminorum.

Progreſſionis vero Geometricæ quatuor numerorum proprium eſt, vt numerus qui ex multiplicatione primi numeri in quartũ fit æqualis ſit numero, qui ex ſecundo in tertium procreatur. Vt hic vides, 2. 6 18 54. demonſtraturque ab Euclide lib. 7. propoſ. 19. Atque hoc non ſolum eſt in quatuor numeris continue proportionalibus, quales ſunt quatuor numeri in dato exemplo, ſed etiam in quatuor, qui non ſunt continue proportionales, dummodo eadem ſit proportio ſecundi ad primum, quæ quarti ad tertium. Vt hic cernis, 3 6 10. 20.

Proprietas progreſſionis Geometricæ quotcunq; terminorum, ſi numerus terminorũ ſit impar.

Ex his proprietatibus colligitur, in omni progreſſione Geometrica, cuius numerus terminorum eſt impar, numerum, qui fit ex multiplicatione extremorum inter ſe, æqualem eſſe numero, qui ex multiplicatione duorum numerorum quorumlibet ab extremis æqualiter diſtantium producitur, necnon numero, qui ex medio in ſeipſum fit. Veluti hic apparet.

3. 6 12. 24 48 96. 192. 384. 768.

Cum enim quatuor hi numeri 3 6. 384 768. habeant eandem proportionem, licet non continuam, erit, ex iis, quæ proxime diximus, numerus, qui fit ex 3. in 768. æqualis ei, qui fit ex 6. in 384. Eadem ratione numerus, qui fit ex 6. in 384. æqualis erit ei, qui ex 12. in 192. producitur, quod hi quatuor numeri 6. 12. 192. 384. eandem habeant proportionem, licet non continuatam; & ita de reliquis, ſi plures ſint, donec ad tres medios 24 48. 96. perueniamus; qui cum eandem habeant proportionem, erit, per ea, quæ paulo ante docuimus, numerus productus ex primo in tertium æqualis numero, qui ex medio in ſeipſum gignitur. Eademque ratio eſt de omnibus aliis huiuſmodi progreſſionibus Geometricis.

Proprietas progreſſionis Geometricæ quotcunq; terminorum, ſi numerus terminorũ ſit par.

Ex poſteriore quoq; proprietate efficitur, in omni progreſſione Geometrica, cuius numerus terminorum eſt par, numerum ex multiplicatione extremorum productum æqualem eſſe numero, qui ex multiplicatione duorum quorumlibet numerorum ab extremis æqualiter diſtantium producitur. Vt hic manifeſtum eſt.

3. 6. 12. 24. 48. 96. 192. 384.

Quod probabimus, vt prius, hoc dempto, quod poſtremo loco ſumendi ſunt quatuor numeri medii 12. 24 48. 96, non autem tres tantum, vt prius; quia hic non eſt vnicus numerus medius, ſed duo. Sequuntur iam regulæ ad progreſſiones Geometricas ſpectantes.

REGVLA I.

Summa cuiuſcunq; progreſſionis Geometricæ quo pacto inueniatur.

SI in quauis progreſſione Geometrica notus fuerit denominator proportionis, vna cum minore, & maiore extremo, perueniemus in cognitionem ſummæ omnium terminorum, hac ratione. Detrahatur primus terminus ab vltimo, & reliquus numerus per numerum, qui vna vnitate minor ſit, quam denominator, diuidatur. Si enim Quotienti vltimus terminus, ſiue maius extremum adiiciatur, componetur ſumma omnium terminorum. Vt in hac progreſſione.

312.

3.12.48.192.768.3072.12288.49152.

Demptis 3. ex 49152. remanent 49149. Et quoniam denominator proportionis quadruplæ, quam habent numeri datæ progreſſionis, eſt 4. diuidemus 49149. per 3. & Quotienti 16383. vltimum terminum, ſiue maius extremum 49152. adijciemus, conficiemuſque ſummam totius progreſſionis 65535. Item hic.

4.6.9.$13\frac{1}{2}$.$20\frac{1}{4}$.$30\frac{3}{8}$.$45\frac{9}{16}$.

Subtractis 4. ex $45\frac{9}{16}$ relinquuntur $41\frac{9}{16}$ quæ ſi diuidantur per $\frac{1}{2}$. (Eſt enim $1\frac{1}{2}$. denominator proportionis ſeſquialteræ, quam habent numeri huius progreſſionis, ablata autem 1. remanet $\frac{1}{2}$.) fiet Quotiens $83\frac{1}{8}$. cui ſi addatur vltimus numerus, ſiue maius extremũ $45\frac{9}{16}$. fiet ſumma totius progreſſionis $128\frac{11}{16}$. atque eodem modo ſummam cuiuſcunque progreſſionis Geometricæ inueniemus.

Itaque, vt vides, ſatis eſt, vt cognoſcatur primus terminus, & vltimus, vnà cum denominatore proportionis, ad inueniendam ſummam totius progreſſionis, etiamſi intermedij termini ignorentur. Quo pacto autem in cognitionem vltimi termini peruenire poſſimus, licet non continuetur tota progreſſio, ſequenti regula explicabimus.

In progreſſione autem Geometrica duplæ proportionis, cuius initium eſt 1. facillimo negotio ſumma totius progreſſionis quotcũque terminorum reperietur, ſi vltimus terminus duplicetur, & à duplo abijciatur 1. Vt hic.

1.2.4.8.16.32.64.128.256.512.

Si vltimus terminus 512. duplicetur, & à duplo 1024 reijciatur 1. habebitur ſumma totius progreſſionis 1023.

Ex quo fit, quemlibet numerum, in huiuſmodi progreſſione, abiecta prius vnitate, eſſe ſummam omnium numerorum antecedentium, cum quilibet numerus ſit proxime præcedentis numeri duplus.

REGVLA II.

IN omni progreſſione Geometrica, quæ ab 1. incipit, quiuis numerus ſeipſum multiplicans gignit numerum, qui ab eo abeſt tanto interuallo, quanto ipſe ab vnitate diſtat: quiuis autem numerus alium maiorem multiplicans producit numerum, qui à maiore tanto interuallo diſtat, quanto ipſe minor ab vnitate abeſt. Hæc regula clariſſimè ex propoſ. 11. lib. 8. Euclidis colligitur, vt in ſcholio eiuſdem propoſ. declarauimus. Exempli gratia

1.2.4.8.16.32.64.128.256.512.1024.

In hac progreſſione duplę proportionis, quæ ſequitur, ſi numerus 16. qui quintũ locũ ab vnitate occupat, in ſeipſum multiplicetur, producetur numerus 256. qui quintum etiam locum à numero 16. occupat, nempe nonũ. Sic quoque ſi numerus 32. ſextum locum ab vnitate occupans ſeipſum multiplicet, procreabitur numerus 1024. qui ſextum etiam locum à numero 32. occupat, nimirum vndecimum. Ita etiam numerus 8. quarti loci multiplicans numerum 64. producit numerum 512. quarto loco à numero 64. reponendum.

Itaq; hanc licebit regulam colligere. Si in progreſſione Geometrica cuius initium eſt 1. numerus aliquis quẽcunque locum occupans ſeipſum multiplicet, procreabitur numerus in duplo maiore loco minus vna vnitate, quàm ſit locus numeri multiplicantis, ponendus. Vt ſi numerus ſeipſum multiplicãs occupet tertium locum, gignetur numerus in quinto loco reponendus: ſi occupet ſeptimum locum, producetur numerus in terriodecimo loco ponẽdus &c. Id quod aperte oſtenſum eſt in progreſſione ſuperiori proportionis duplæ, idemq; clariſſime in hac altera progreſſione proportionis quadruplæ apparet.

1.4.16.64.256.1024.4096.16384.65536.

Nam ſi numerus 64. in quarto loco poſitus, ſeipſum multiplicet, gignetur numerus 4096. in ſeptimo loco ponendus. Ita quoque numerus 256. quintum occupans locum ſeipſum multiplicãs producit numerum 65536. in nono loco reponendum.

Vt autem facilius ſciatur, quo in loco quilibet numerus productus ſit collocandus, ſubſcribenda eſt progreſſioni Geometricæ progreſſio naturalis numerorum hoc ordine. Sub 1. hoc eſt, ſub primo numero, ſcribatur 0. ſub ſecundo numero ponatur 1. ſub tertio 2. ſub quarto 3. & ita deinceps, vt in hac progreſſione proportionis duplæ factum eſt.

1.2.4.8.16.32.64.128.256.512.1024.2048.
0.1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.

Nam quilibet numerus grogreſſionis Geometricæ ſeipſum multiplicans producit numerum ſupra illum numerum progreſſionis naturalis numerorum collocandum, qui duplus eſt illius, qui ſubſcribitur numero ſeipſum multiplicanti: quilibet vero numerus alium multiplicans procreat numerum ſupra illum numerũ progreſſionis naturalis numerorum reponendum, qui componitur ex duobus numeris, qui numeris multiplicantibus ſubſcribuntur. Vt ſi numerus 32. in ſe multiplicetur, procreabitur numerus 1024. ſupra 10. collocandus, quòd numerus 10. duplus ſit numeri 5. qui numero 32. ſubſcribitur. Item ex multiplicatione 8. in 256. producetur numerus 2048. ſupra 11. reponendus, ꝙ numerus 11. cõponatur ex 3. & 8. qui numeri ſub 8. & 256. ſcripti ſunt.

Et quoniam, quot vnitates ſunt in quolibet numero progreſſionis naturalis numerorum, talem locum vno amplius occupat in progreſſione Geometrica numerus illi ſuprapoſitus, vt in ſuperiore exemplo perſpicue apparet; facile inueniemus numerũ cuiuſq; loci in progreſſione Geometrica, etiamſi non ſcribamus oẽs numeros intermedios. Sit enim inueniẽdus, verbi gratia, numerus in vigeſimo loco ſupradictę progreſſionis collocãdus. Primũ ſcribo quatuor, aut quinq;, vel plures numeros progreſſionis, vnà cũ progreſſione naturali, vt hic vides.

1.2.4.8.16.32.64.
0.1.2.3.4.5.6.

Deinde multiplico v.g. 8. in ſe, facioq; 64. numerum ſeptimi loci, ſub quo nimirum poſitus eſt numerus 6. vna vnitate minor numero locorum; quòd numerus 3. ſub 8. duplicatus faciat 6. Quòd ſi multiplicemus 8. in 64. faciemus 512. numerum decimi loci, ſub quo nimirũ ſcriberetur numerus 9. vna vnitate minor numero locorũ, quòd numeri 3. & 6. ſub quarto & ſeptimo loco faciant 9. Rurſus ſi 512. numerum decimi loci, ſub quo ponitur numerus 9. multiplicemus in ſe, producemus numerũ 262144. in loco decimonono ſcribẽdum, ſub quo nimirum poneretur numerus 18. vna vnitate minor numero locorum, propterea quòd numerus 9. ſub decimo loco duplicatus facit 18. Iã vero quia ex 18. qui numerus ſub decimonono loco ſcribitur, & ex 1. ſub ſecundo loco po- ſita

Particularis inuẽtio ſumma progreſſionis proportionis duplæ, cuius initium eſt 1.

In progreſſione proportionis duplæ incipiente ab 1. quilibet numerus, abiecta prius vnitate, eſt ſumma omnium antecedentium numerorũ.

Si in progreſſione Geometrica incipiente ab 1. numerus aliquis ſeipſum, vel alium numerũ multiplicet, quem locũ numerus productus occupet.

Quilibet numerus in progreſſione Geometrica incipiente ab 1. ſeipſum multiplicans producit numerũ in duplo maiore loco minus vnitate, & numerus multiplicans, ponendum.

Progreſſio naturalis numerorũ quo pacto indicet, quo in loco quilibet numerus productus collocandus ſit in progreſſione Geometrica incipiente ab 1.

Quo pacto numerus cuiuſcunque loci in progreſſione Geometrica incipiente ab 1. inueſtigetur ſine intermedijs.

REGVLA FALSI DVPLICIS POSITIONIS.

CAPVT XXIII.

Regula falſi duplicis poſitionis quomodo fiat.

PROPOSITA quæſtione quacunque per regulam falſi duplicis poſitionis explicanda, ponatur quiuis numerus ſiue paruus, ſiue magnus, qui iuxta tenorem quæſtionis examinetur. Nam ſi is quæſito reſpondeat, ſoluta erit quæſtio; ſin minus; notandus erit exceſſus, vel defectus, quo à veritate aberratum eſt vna cum litera P. vel M. quarum illa plus; hæc vero minus ſignificat, prout videlicet error veritatem exceſſerit, aut ab ea defecerit. Deinde ponatur rurſus aliquis alius numerus ſiue maior priore, ſiue minor, qui eodem modo examinetur, &c. Nam ex duplici hac poſitione, & duplici errore veritas elicietur hoc modo.

Quando vtraq; poſitio veritatem excedit, fit ſubtractio.

Si in vtraque poſitione à veritate aberratũ eſt per exceſſum, vel defectum ſubtrahatur minor error ex maiore, & numerus relictus pro diuiſore ſeruetur. Deinde numerus primo poſitus per ſecundũ errorẽ, & numerus ſecundo poſitus per primum errorem multiplicetur, minorque numerus productus ex maiore detrahatur. Nam ſi numerus hic reſiduus per diuiſorem iam inuentum nimirum per differentiam errorum, diuidatur, dabit quotiens numerum quæſitum, qui quæſtioni propoſitæ ſatisfaciet.

Quando vna poſitio veritatem excedit & altera deficit, fit additio.

Si vero in alterutra poſitione à veritate aberratum eſt per exceſſum, & in altera per defectum, colligendi erunt duo errores in vnam ſummam, vt habeatur diuiſor. Similiter duo illi numeri, qui ex multiplicatione numerorum poſitorum per errores, vt dictum eſt, producuntur, in vnam ſummam ſunt colligendi, vt habeatur numerus diuidendus, &c. Id quod ex quæſtionibus fiet perſpicuum.

Quæſt. 1.

1. Quæratur numerus, à cuius dimidio ſubtracta $\frac{1}{3}$. & $\frac{1}{4}$. relinquãtur 300. Ponatur numerus 24. qui nimirũ habeat partem $\frac{1}{2}$. in quæſtione expreſſam, & eius $\frac{1}{2}$. alias partes expreſſas, nempe $\frac{1}{3}$. & $\frac{1}{4}$. contineat vt fractiones quoad fieri poteſt, vitentur: qui quidem numerus facile inuenietur, ſi numerus ſumatur habens poſteriores fractiones, & is poſtea duplicetur. Solet autem numerus hic primo acceptus poni ad ſiniſtrã in ſuperiori parte crucis, & error in parte inferiori ad ſiniſtrã quoque, litera denique P. vel M. prout veritatem exceſſerit error ille, vel ab ea defecerit, in medio crucis ad eandem ſiniſtrã: Secundus vero numerus acceptus cum errore, & litera P. vel M. eodẽ ordine collocari ſolet ad dextrã eiuſdem crucis, vt in noſtro exẽplo factum eſſe vides. Hic numerus 24. poſitus ita iuxta pronunciationem quæſtionis examinabitur. Eius $\frac{1}{2}$ eſt 12. à quo numero detrahenda eſt $\frac{1}{3}$. & $\frac{1}{4}$. Eſt autem $\frac{1}{3}$. numeri 12. numerus 4. & $\frac{1}{4}$. numerus 3. qui numeri detracti ex 12. relinquunt 5. Debebantt autem relinqui 300. Aberratum eſt ergo à veritate per defectum 295. vnitatum; ac proinde error hic notandus eſt cum litera M.

24 96
M X M
295. 280.
15.
diuiſor.

Ponatur ſecundo numerus 96. qui ita iuxta quæſtionem examinabitur. Eius $\frac{1}{2}$. eſt 48. at $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{4}$. huius numeri 48. ſunt 16. & 12. qui ex 48. ablati relinquunt 20. Debebant autem relinqui 300. Defecimus ergo rurſus à veritate 280. vnitatibus, ac proinde error hic notandus eſt etiam cum litera M.

Iam vero quia in vtraq; poſitione defecimus à vero, ſubtrahendus erit minor error ex maiore, vt habeatur diuiſor 15. in inferiori parte crucis collocandus. Deinde multiplicandus numerus 24. primo poſitus per 280. ſecundum errorem, & numerus 96. ſecundo poſitus per 295. primum errorem, minorque numerus productus 6720. ex maiore 28320. ſubtrahendus, vt relinquatur numerus diuidendus 21600. Hic enim numerus diuiſus per diuiſorẽ inuentum 15. dabit quotientem 1440. qui eſt numerus quæſitus. Eius enim $\frac{1}{2}$. eſt 720. & huius $\frac{1}{3}$. & $\frac{1}{4}$. ſunt 240. & 180. qui numeri ex 720. detracti relinquunt 300. vt in quæſtione proponebatur.

Sed ſoluamus eandem quæſtionem per alios duos numeros, qui veritatem excedãt, deinde per alios, quorum vnus veritatem excedat, & alter ab eadem deficiat. Ponatur ergo primũ numerus 4800. Huius $\frac{1}{2}$. eſt 2400. cuius $\frac{1}{3}$. & $\frac{1}{4}$. ſunt. 800. &. 600. qui numeri ex 2400. ablati relinquunt 1000. Debebant autem relinqui 300. exceſſimus ergo veritatem 700. vnitatibus atque adeo error hic ſcribendus eſt cum littera P. ponatur deinde numerus 2400. Huius $\frac{1}{2}$. eſt 1200. cuius $\frac{1}{3}$. & $\frac{1}{4}$. ſunt 400. & 300. quibus numeris ex 1200. ablatis remanent 500. Debebant autem relinqui 300. Exceſſimus ergo rurſus veritatem 200. vnitatibus. Iam vero, ſubtracto minore errore de maiore, relinquetur diuiſor 500. facta autem multiplicatione numerorum poſitorum per errores in crucem, vt dictum eſt, ſubtractoque minore numero producto 960000. de maiore 1680000. relinquetur numerus diuidendus 720000. qui per 500. diuiſus dabit Quotientem 1440. vt prius.

4800. 2400
P X P
700. 200.
500.
diuiſor.

Rurſus ponamus primo numerum 2400, quo examinato iuxta quæſtionem propoſitam, inueniemus exceſſum 200. qui error ſcribendus eſt cum litera P. Deinde ponamus numerum 96. quo eadẽ ratione examinato, deprehendemus defectũ 280. qui ſcribendus eſt cum litera M. Quoniam vero in vna poſitione exceſſimus veritatem, & in altera defecimus à vero, facienda erit additio errorum vt componatur diuiſor 480. Item duo numeri producti ex multiplicatione numerorum poſitorum per errores in crucem, nempe 672000. & 19200. in vnam ſummam colligendi, vt fiat diuidendus numerus 691200. Diuiſo enim hoc numero 691200. per 480 fiet Quotiens 1440. veluti prius.

2400. 96.
200. P X M 280.
480.
diuiſor.

2. Quæſt.

2. Alexander Magnus in familiari colloquio, quod cum Caliſthene Philoſopho quodam die habuit in ætatum mentionem forte fortuna, vt accidere ſolet, incidit, hoc modo eum alloquens. Ego Epheſtionem duobus ſupero annis, Clytus vero noſtram amborum ætatem complectitur, & inſuper quatuor annos. Ex quo, fit, vt omnes tres compleamus annos 96. quot nimirum pater tuus vixiſſe dicitur. Quot ergo annos habuit tunc Alexander, Epheſtion, & Clytus? Vides hic numerum 96. diſtribuendum eſſe in tres partes, ita vt primã ſuperet ſecundã binario, tertia vero duas primas ſimul ſumptas quaternario excedat. Vel inueniẽdos eſſe 3. numeros, quorũ primus ſecundũ ſuperet binario, & tertius primos duos ſimul ſumptos quaternario excedat, omnes vero tres conſtituant 96. Pone ergo Alexandrum habuiſſe annos 20. ac proinde Epheſtionem 18. & Clytum

tum 42. Ita enim ætas Alexandri ſuperat Epheſtionis ætatem annis 2. Clytus autem amborum ætatem annorum 38. comprehendit, & inſuper 4. annos, vt in quæſtione proponitur. Quoniam vero hi numeri 20.18.42. conſtituunt tantum 80. qui 96. deberent conficere, fit vt à vero defecerimus 16. vnitatibus. pone ergo rurſus Alexandri annos fuiſſe 30. ac propterea Epheſtionem habuiſſe annos 28. & Clytum 62. qui omnes efficiunt 120. Deberent autem efficere tantum 96. Exceſſimus ergo veritatem 24. vnitatibus. Facta iam additione errorum inter ſe, quod vnus defecerit à veritate, & alter eandem exceſſerit, fient 40. pro diuiſore. Facta item multiplicatione 20. per 24. & 30. per 16. productiſque 480. 480. inter ſe additis, fient 960. quibus diuiſis per 40 fiet Quotiens 24. atque tot annos tunc Alexander Magnus habuit, ac proinde, iuxta quæſtionis tenorem, Epheſtio 22. Clytus 50. q omnes conſtituunt 96. annos.

20.		30.
18.		28.
42.		62.
—M	X	P—
80.		120.
16.		24.
	40.	
	Diuiſor.	

3. Tres habent ſummam quandam pecuniæ, nempe 44. aureos. Secundus habet duplo plus quam primus, & præterea 4 aureos. Tertius autem tantum habet quantum primus & ſecundus, & præterea 6. aur. Quantum ergo quiſque habet? Hic vides numerum 44. diſtribuendum eſſe in tres partes vt ſecunda dupla ſit primæ, contineatque præterea 4. tertia vero æqualis ſit primæ, ac ſecundæ, contineatque præterea 6. Vel quærendos eſſe tres numeros, quorum ſecundus contineat primum bis, & inſuper 4. tertius vero contineat primum, & ſecundum ſemel, & præterea 6. ipſi vero tres numeri conficiant 44. Pone ergo primum habere 10. quo poſito, habebit ſecundus 24. nempe duplo plus quam primus, & inſuper 4. tertius autem habebit 40. tantum videlicet quantum primus & ſecundus, ac præterea 6. qui tres numeri conficiunt 74. Deberent autem conficere ſolum 44. Exceſſimus ergo veritatem 30. vnitatibus. Pone deinde primum habere 6. Habebit ergo ſecundus 16. & tertius 28. qui tres numeri conficiunt 50. Deberent autẽ conficere ſolum 44. Exceſſimus ergo rurſum veritatem 6. vnitatibus, facta iam ſubtractione minoris erroris de maiore, quia vterque error exceſſit veritatem, reliquus erit diuiſor 24. Facta item multiplicatione 10. per 6. & 6. per 30. ſubtractoque illo producto 60. ex hoc 180. remanebit diuidendus numerus 120. quo diuiſo per 24. fiet Quotiens 5. Tantum ergo habet primus; ſecundus vero 14. & tertius 25. qui tres numeri in vnam ſummam collecti efficiunt 44. *Quæſt. 3.*

10.		6.
24.		16.
40.		28.
—P	X	P—
74.		50.
30.		6.
	24.	
	Diuiſor.	

Si multiplicarentur numeri, quos poſuimus ſecundum ac tertium habere per eoſdem errores, &c. inuenirentur numeri, quos ſecundus ac tertius habent. Vt ex 24. per 6. fiunt 144. & ex 16. per 30. fiunt 480. Subtracto autem illo numero ex hoc, remanent 336. quo numero diuiſo per 24. diuiſorem inuentum, fiet Quotiens 14. pro numero ſecundi. Item ex 40. per 6 fiunt 240. & ex 28. per 30. fiunt 840. ſubtracto autem illo numero ex hoc, reliquus erit numerus 600. quo diuiſo per 24. fiet Quotiens 25. pro numero tertii. Sed ſatius eſt, inuento numero primi, inueſtigare reliquos, iuxta pronunciationem quæſtionis, nempe eo modo, quo vterque numerus falſo poſitus eſt examinatus. Aliquando tamen commodius erit inquirere alios numeros ea ratione, qua primus quæſitus eſt; vt in quæſtione, 6. manifeſtum erit.

4. Quærantur tres numeri, qui faciant 60. ſecundus autem contineat primum bis. & inſuper 4. tertius vero contineat primum ac ſecundum, & præterea 6. Hæc quæſtio ſimilis eſt antecedenti. Pone primum numerum eſſe 6. ac proinde ſecundum 16. & tertiũ 28. qui tres numeri faciunt 50. Deberent autem facere 60. Factus eſt ergo error per defectum 10. Pone rurſus primum numerum eſſe 8. ac proinde ſecundum 20. & tertium 34. qui tres numeri faciunt 62. Deberent a. facere 60. Exceſſimus ergo verum 2. vnitatibus. Operare, vt regula præcipit, inueniesque primum numerum eſſe $7\frac{2}{3}$. ac proinde ſecundum $19\frac{1}{3}$. & tertium 33. qui tres numeri efficiunt 60. *Quæſt. 4.*

6.		8.
16.		20.
28.		34
—M	X	P—
50.		62.
10.		2.
	12.	
	diuiſor.	

5. Diuidatur numerus 30. in duas partes, quarum prior cum 60 numerum faciat triplum numeri ex poſteriori parte, & 20. compoſiti. Pone priorem partem eſſe 20. ac proinde poſteriorem 10. Prior cum 60. facit 80. & poſterior cum 20. facit 30. Deberet autem numerus 80. triplus eſſe numeri 30. iuxta pronunciationem exempli, Cum ergo numerus 90. triplus ſit numeri 30. defecimus 10 vnitatibus à vero. Pone rurſus priorem partem eſſe 24. ac proprea poſteriorem 6. Prior cum 60 facit 84. & poſterior cum 20. facit 26. Deberet autem numerus 84. iuxta tenorem quæſtionis triplus eſſe numeri 26. Cum ergo numerus 78. triplus ſit numeri 26. exceſſimus veritatem 6. vnitatib. Operare, vt regula præcipit, inueniesque priorem partem eſſe $22\frac{1}{2}$. atque adeo poſteriorem $7\frac{1}{2}$. Prior enim cum 60. facit $82\frac{1}{2}$. & poſterior cum 20. facit $27\frac{1}{2}$. cuius numeri ille triplus eſt. *Quæſt. 5.*

20.		24.
10.		6.
—M	X	P—
10.		6.
	16.	
	Diuiſor.	

Alio modo inſtitui poteſt ſolutio huius quæſtionis. Poſtquam enim in prima poſitione deprehendimus priorem partem 20. cum 60. facere 80. & poſteriorem partem 10. cum 20. facere 30. cuius numeri ille deberet eſſe triplus; videndum eſt, cuius numeri triplus ſit numerus 80. Eſt autem triplus numeri $26\frac{2}{3}$. quem numerus 30. ſuperat numero $3\frac{1}{3}$. Exceſſimus ergo veritatem hoc numero $3\frac{1}{3}$. Rurſus poſtquam in ſecunda poſitione inuentum eſt priorem partem 24. cum 60 facere 84. & poſteriorem partem 6. cum 20. facere 26. cuius numeri ille deberet eſſe triplus; videndum eſt, cuius numeri triplus ſit numerus 84. Eſt autem triplus numeri 28. à quo numerus 26. deficit 2. vnitatibus. Defecimus ergo à veritate binario. Operare iam ſecundum regulæ præcepta, inueniesque priorem partem eſſe $22\frac{1}{2}$. & poſteriorem $7\frac{1}{2}$. vt prius. Sed prior ratio commodior videtur, cum facilius per eam vitentur fractiones.

20.		24.
10.		6.
P	X	M—
$3\frac{1}{3}$.		2.
	$5\frac{1}{3}$.	
	Diuiſor.	

6. Quæ

Quæſt. 6. 6. Quærantur tres numeri, quorum primus additus ad 73. faciat duplum reliquorum duorum; ſecundus vero cum 73. faciat triplum duorum reliquorum; tertius denique cum 73. faciat quadruplum reliquorum duorum. Pone primum numerum eſſe 1. vel alium quemuis numerum imparem, vt additus ad 73. faciat numerum parem, qui poſſit habere dimidium, quandoquidem primus cum 73. debet facere numerum duplum reliquorum duorum. Quoniam igitur 1. cum 73. facit 74. qui numerus duplus debet eſſe iuxta pronunciationem exempli reliquorum duorum, neceſſe eſt, reliquos duos ſimul eſſe 37. Et quia ſecundus cum 73. debet facere numerum triplum primi, (qui eſt 1.) & tertii, diuidendus erit per antecedentem quæſtionem, numerus 37. in duas partes, quarum prior cum 73. faciat triplum numeri, qui ex poſteriore parte, & 1. componitur, atque ita, antequam propoſita quæſtio ſoluatur, neceſſe eſt, aliam prius ſoluere, quæ in ipſa operatione occurrit.

1.				3.
10$\frac{1}{4}$.				12$\frac{1}{2}$.
26$\frac{3}{4}$.	P	X	P	25$\frac{1}{2}$.
54$\frac{3}{4}$.				36$\frac{1}{2}$.
		18$\frac{1}{4}$. diuiſor.		

Pone ergo priorem partem eſſe 2. atque adeo poſteriorem 35. Facit autem prior cum 73. numerum 75. poſterior vero cum 1. facit 36. cuius triplus non eſt numerus 75. ſed numerus 108. Defecimus ergo à veritate 33. vnitatib. cum tot vnitatibus minor ſit noſter numerus 75. quam 108. Pone rurſus, priorem partem eſſe 5. atque adeo poſteriorem 32. Prior autem cum 73. facit 78. & poſterior cum 1. facit 33. cuius numeri triplus non eſt numerus 78. ſed numerus 99. Defecimus ergo rurſus 21. vnitatibus. Operare iam ſecundum præcepta regulæ falſi, inueniesque priorem partem eſſe 10$\frac{1}{4}$. ac proinde poſteriorem 26$\frac{3}{4}$.

2.				5.
35.				32.
—	M	X	M	—
33.				21.
		12. diuiſor.		

Itaque ſi primus numerus propoſitæ quæſtionis eſt 1. erit ſecundus 10$\frac{1}{4}$. tertius 26$\frac{3}{4}$. Ita enim primus cum 73. facit duplum reliquorum duorum, & ſecundus cum 73. facit triplum duorum reliquorum. Si ergo tertius cum 73. faciat quadruplum reliquorum duorum, ſatisfactum erit quæſtioni. Facit autẽ tertius cum 73. numerum 99$\frac{3}{4}$. qui quadruplus non eſt numeri 11$\frac{1}{4}$. qui ex primo, & ſecundo conflatur, ſed numerus 45. quadruplus eſt numeri 11$\frac{1}{4}$. Exceſſimus ergo veritatem hoc numero 54$\frac{3}{4}$.

Pone iam primum numerum eſſe 3. qui cum 73. facit 76. qui numerus duplus eſſe debet reliquorum duorum. Duo ergo reliqui efficient 38. Et quia ſecundus cum 73. debet facere triplum primi, (qui eſt 3.) & tertii diuidendus erit per antecedentem quæſtionem numerus 38. in duas partes, quarum prior cum 73. faciat triplum eius numeri, qui ex poſteriore parte, & 3. componitur. Pone ergo priorem partem eſſe 2. atque adeo poſteriorem 36. Facit autem prior cum 73. numerum 75. at poſterior cum 3. facit 39. cuius triplus non eſt numerus 75. ſed numerus 117. Defecimus ergo à veritate numero 42. Pone rurſus priorem partem eſſe 23. ac proinde poſteriorem 15. Prior autem cum 73. facit 96. at poſterior cum 3. facit 18. cuius numeri triplus non eſt numerus 96. Sed numerus 54. Exceſſimus ergo verum numero 42. Operare ſecundum regulam falſi, inueniesque priorem partem eſſe 12.$\frac{1}{2}$. ac proinde poſteriorem 25$\frac{1}{2}$.

2.				23.
36.				15.
	M	X	P	—
42.				42.
		84. Diuiſor.		

Itaq; ſi numerus primus quæſtionis propoſitæ eſt 3. ſecundus erit 12$\frac{1}{2}$. & tertius 25$\frac{1}{2}$. Ita enim primus cum 73. facit duplum reliquorum duorum, & ſecundus cum 73. facit triplum reliquorum duorum. Si igitur tertius cum 73. faciat quadruplum reliquorum duorum, ſoluta erit quæſtio. Facit autem tertius cum 73. numerum 98$\frac{1}{2}$. qui quadruplus non eſt numeri 15$\frac{1}{2}$. ſed numerus 62. Exceſſimus ergo verum numero hoc 36$\frac{1}{2}$.

Iam vero ſi multiplices primos numeros per errores in crucem, item ſecundos, & tertios, (commodius .n. inuenientur ſecundus & tertius hoc modo, quam ſi ex primo inuento illos elicere vellemus, propterea quod opus eſſet quæſtione præcedenti hic vti) & facta ſubtractione, reſiduos numeros diuidas per diuiſorem inuentum 18.$\frac{1}{4}$. nempe per differentiam errorum, quod in vtraque poſitione factus eſt ſemper exceſſus, inuenies primum numerum eſſe 7. ſecundum 17. & tertium 23. Nam primus cum 73. facit 80. qui numerus duplus eſt reliquorum duorum; at ſecundus cum 73. facit 90. qui numerus triplus eſt duorum reliquorum. Tertius denique cum 73. facit 96. qui numerus reliquorum duorum quadruplus eſt.

Quæſt. 7. 7. Quæratur numerus, quo multiplicato per 3. & producto additis 10. Et ſumma hac multiplicata per 4. productoque additis 20. Sũma vero hac multiplicata per 5. & producto additis 30. Summa denique hac muliplicata per 6. productoque additis 40. numerus producatur 6700. Finge numerum eum eſſe 2. qui multiplicatur per 3. facit 6. additis autem 10. fiunt 16. Hac autem ſumma multiplicata per 4. fiunt 64. & additis 20. fiunt 84. Rurſus hac ſumma multiplicata per 5. fiunt 420. additiſque 30. fiunt 450. Hac denique ſumma multipicata per 6. fiunt 2700. additiſque 40. fiunt 2740. Debebat autem vltima hæc ſumma eſſe 6700. Defecimus ergo à veritate hoc numero 3960. Finge denide eundem numerum eſſe 3. qui multiplicatus per 3. facit 9. additiſque 10. fiunt 19. Hæc autem ſumma multiplicata per 4. facit 76. additiſque 20. fiunt 96. Hæc rurſum ſumma per 5. muliplicata facit 480. additiſque 30. fiũt 510. Deniq; hæc ſumma multiplicata per 6. facit 3060. additiſque 40. fiunt 3100. Debebant autem effici 6700. Defecimus ergo iterum à veritate numero hoc 3600. Operare ſecundum regulam, inuenieſque numerum quæſitum eſſe 13. Hic .n. numerus multiplicatus per 3. facit 39. additiſque 10. fiũt 49 Hęc ſumma multiplicata per 4. facit 196. additis vero 20. fiunt 216. quæ ſumma multiplicata per 5. facit 1080. additis autem 30. fiunt 1110. quæ denique ſumma multiplicata per 6. facit 6660. additiſque 40. fiunt 6700.

	2.	X	3.	
3960.	P		M	3600.
		360. diuiſor		

Quæſt. 8. 8. Ludimagiſter quidam tot habet diſcipulos, vt ſinguli perſoluant 5 aur. deſint illi 30. aur. ad emendam domum, in qua habitat; ſi vero ſinguli dent 6. aur. ſuperſint 40. aurei vltra pretium domus. Quot ergo habet diſcipulos, & quantum eſt pretium domus? Hic nihil aliud quæritur, quam numerus, qui multiplicatus per 5. talem procreet numerum, vt additis 30. eadem ſumma fiat, quæ relinquitur, ſi idem numerus per 6. multiplicetur,

tur,

tur, & à producto detrahantur 40. Pone ergo numerum diſcipulorum eſſe 30. qui multiplicatus per 5. facit 150. addiſque 30 fiunt 180. Tanti ergo conſtabit domus, ſi 30. diſcipulos habeat, quorum ſinguli perſoluant 5. aureos. Videamus iam, an ſuperſint vltra hoc pretium aur. 40. ſi ſinguli ſoluant 6. aur. Multiplicatus autem idem numerus diſcipulorum 30. per 6. facit 180. nihilq; ſupereſt vltra pretium domus 180. aureorum: debebant autem ſupereſſe 40. aurei. Defecimus ergo à veritate hoc numero 40. Finge rurſus, numerum diſcipulorum eſſe 100. qui multiplicatus per 5. facit 500. additiſq; 30. fiunt 530. Tanti ergo conſtabit domus, ſi 100. habeat diſcipulos, quorum ſinguli perſoluant 5 aureos. Videamus iam, an ſuperſint 40. aurei vltra hoc pretium, ſi ſinguli dent 6. aureos. Multiplicatus autem idem numerus diſcipulorum 100. per 6. facit 600. ſuperſuntq; 70 aurei vltra pretium domus 530. aureorum: debebant autem ſupereſſe tantum 40. Exceſſimus ergo veritatem hoc numero 30. Operare per regulam falſi. inueniesq; numerum diſcipulorum 70. Hic enim numerus multiplicatus per 5 facit 350. additiſq; 30. fiunt 380. Tantum ergo eſt pretium domus. Idem numerus diſcipulorum 70. multiplicatus per 6 facit 420 qui numerus ſuperat pretium domus 380. aur. hoc numero 40.

30. 100.
P X P
40. 30.
70.
Diuiſor.

9. Duo inter ſe partiri debebant æqualiter 60 aureos. Orta autem rixa inter eos, quilibet rapuit, quantum potuit. Inita poſtea pace, primus depoſuit $\frac{1}{4}$. ſuæ pecuniæ, ſecundus vero $\frac{1}{3}$. factumq; eſt tunc, vt tam primus accipiens $\frac{1}{3}$. ſecundi, quam ſecundus accipiens $\frac{1}{4}$ primi habuerit 30. aur. Quantum ergo quiſque primo rapuit? Pone primum rapuiſſe 36. aur. atque adeo ſecundum reliquos 24. Si igitur primus deponat $\frac{1}{4}$. nempe 9. aur. relinquentur ei aur. 27. quibus ſi addamus $\frac{1}{3}$. ſecundi, quam dicitur depoſuiſſe, nempe 8. aur. faciemus 35. aur. pro primo. Debebat autem ſolum habere 30. Exceſſimus ergo verum numero 5. Pone iam primum ſurripuiſſe 12. ac propterea ſecundū reliquos 48. Si igitur primus deponat $\frac{1}{4}$. hoc eſt, 3. aur. remanebunt ei 9. aur. quibus ſi addamus $\frac{1}{3}$. ſecundi, puta 16. aur. efficiemus 25. aur. pro primo. Debebat autem habere 30. Defecimus ergo 5. vnitatibus à vero. Operare ſecundum regulam, inueniesq; primum rapuiſſe 24. & ſecundum propterea 36. Nam ſi primus deponat $\frac{1}{4}$. nimirum 6. aur. & reliquis 18. addat $\frac{1}{3}$. ſecundi, nempe 12. habebit 30. aur. Sic etiam ſi ſecundus, depoſita $\frac{1}{3}$. nempe 12. aur. reliquis 24. addat $\frac{1}{4}$. primi, id eſt, 6. aur. habebit 30. aur. Queſt. 9.

36. 12.
24. 48.
5. P X M 5.
10.
diuiſor.

Porro ex poſitione ſecundi eodem modo verum eliciemus. Nam in priori poſitione, ſi ſecundus deponat $\frac{1}{3}$. nempe 8. aureos & reliquis 16 adiungat $\frac{1}{4}$. primi hoc eſt, 9. aur habebit 25. aur. qui deberent eſſe 30. Defecimus ergo à veritate 5. vnitatibus. In poſteriori vero poſitione, ſi ſecundus deponat $\frac{1}{3}$. nempe 16. aur. & reliquis 32 adijciat $\frac{1}{4}$. primi, nimirum 3. aur. efficiet 35. aur. qui deberent eſſe tantum 30. Exceſſimus ergo verum rurſus 5 vnitatibus. Operare per regulam, multiplicando errores per poſitiones ſecundi, &c. reperieſque ſecundum ſurripuiſſe 36. aur. & primum 24.

36. 12.
2. 48.
5. M X P 5.
10.
Diuiſor.

10. Duo partiri debebant inter ſe 100. aur. æqualiter: orta autem inter eos rixa, quilibet quantū potuit arripuit. Cōpoſita deinde pace inter eos, depoſuit primus $\frac{1}{3}$. ſuæ pecuniæ, ſecundus vero depoſuit $\frac{1}{5}$. primus autem accepit hanc $\frac{1}{5}$. & ſecundus illam $\frac{1}{3}$ quo facto vterque habuit 50. Quantum ergo quiſq; primo rapuit? Finge, primum rapuiſſe 30. aur. ac proinde ſecundum 70. Primi $\frac{1}{3}$. eſt 10. quam ſi deponat, relinquuntur illi 20. Secund. $\frac{1}{5}$ eſt 14. quæ ſi detur primo, habebit primus 34. aureos. Debebat autem habere 50. Defecimus ergo à veritate numero hoc 16. Finge rurſus, primum ſurripuiſſe 60. ac propterea ſecundum 40. Primi $\frac{1}{3}$. eſt 20. quam ſi deponat, ſupererunt ei aur. 40. Secundi $\frac{1}{5}$. eſt 8. quam ſi demus primo, habebit primus 48. Debebat a. habere 50. Defecimus ergo in hac etiam poſitione à veritate numero 2. Operare per regulam. reperieſq; primum ſurripuiſſe $64\frac{2}{7}$. atq; adeo ſecundum $35\frac{5}{7}$. Primi enim $\frac{1}{3}$. eſt $21\frac{3}{7}$. quam ſi deponat, remanebunt ei $42\frac{6}{7}$. Secundi $\frac{1}{5}$. eſt $7\frac{1}{7}$. quam ſi deponat, ſupererunt ei $28\frac{4}{7}$. Iam vero ſi $\frac{1}{5}$. ſecundi, nempe $7\frac{1}{7}$. detur reſiduo primi, quod fuit $42\frac{6}{7}$. habebit primus 50. Item ſi $\frac{1}{3}$. primi, nimirum $21\frac{3}{7}$. detur reſiduo ſecundi, quod fuit $28\frac{4}{7}$. habebit quoque ſecundus 50. vt in quæſtione proponebatur. Queſt. 10.

30. 60.
70. 40.
M X M
16. 2.
14.
Diuiſor.

11. Duo inter ſe ita diſtribuunt 100. aur. vt ſi primus deponat $\frac{1}{3}$. & ſecundus $\frac{1}{4}$. atque aggregatum harum partium bifariam ſecetur, deturque $\frac{1}{2}$. vtriq; numero relicto, numeri fiant æquales, nempe 50. & 50. Quantæ ergo ſunt amborum partes? Finge primi partem eſſe 60. ac proinde ſecundi 40. Si primus deponat $\frac{1}{3}$. nempe 20. remanent ei 40. Si vero $\frac{1}{4}$. ſecundi, nempe 10. adijciatur ad $\frac{1}{3}$. primi, hoc eſt, ad 20. fient 30. atq; huius aggregati $\frac{1}{2}$. nimirum 15. demus reſiduo primi, quod fuit 40. faciemus 55. Debebamus autem facere tantummodo 50. Exceſſimus ergo veritatem hoc numero 5. Finge deinde, primum habere 24. ac proinde ſecundum 76. (Poſui autem hoſce numeros, quod prior habeat $\frac{1}{3}$. & poſterior $\frac{1}{4}$. ſine fractionibus.) Si primus deponat $\frac{1}{3}$. nempe 8. ſuperſunt ei 16. Si vero $\frac{1}{4}$ ſecundi videlicet 19. adijciatur ad $\frac{1}{3}$. primi, nempe ad 8. vt fiant 27. atq; huius aggregati $\frac{1}{2}$. hoc eſt, $13\frac{1}{2}$. demus reſiduo primi, quod fuit 16. habebit primus $29\frac{1}{2}$. Debebat autem habere 50. Defecimus ergo à veritate $20\frac{1}{2}$. Operare iam per regulam, inueniesq. partem primi eſſe $52\frac{16}{17}$. ac proinde ſecundi $47\frac{1}{17}$. Nam primi $\frac{1}{3}$. eſt $17\frac{11}{17}$ quam ſi deponat remanent ei $35\frac{5}{17}$. Secundi $\frac{1}{4}$ eſt $11\frac{13}{17}$ quam ſi deponat, ſuperſunt ei $35\frac{5}{17}$. Aggregatum autem ex $\frac{1}{3}$. primi, & ex $\frac{1}{4}$. ſecundi, id eſt, ex $17\frac{11}{17}$. & $11\frac{13}{17}$. eſt $29\frac{7}{17}$ cuius $\frac{1}{2}$. videlicet $14\frac{12}{17}$. adiecta ad reſiduum primi, hoc eſt, ad $35\frac{5}{17}$. & ad reſiduum ſecundi, id eſt, ad $35\frac{5}{17}$. facit 50 & 50. Queſt. 11.

60. 24.
40. 76.
P X M
5. $20\frac{1}{2}$.
$25\frac{1}{2}$.
Diuiſor.

12. Diuidatur numerus 1000. in duas partes, quarum maior ſuperet minorem numero hoc 49. Finge, maiorem partem eſſe 600. ac proinde minorem 400. Superat autem illa hanc numero 200. & nos volebamus, exceſſum eſſe 49. Exceſſimus ergo veritatem numero 151. Finge deinde, maiorem partem eſſe 550. ac proinde minorem 450. Superat autem illa hanc numero 100. & nos volebamus, exceſſum eſſe 49. Exceſſimus ergo rurſus veritatem numero 51. Operare ſecundum regulam, inueniesq; maiorem partem eſſe 524 $\frac{1}{2}$ ac propterea minorem 475 $\frac{1}{2}$. Illa enim hanc ſuperat numero dato 49.

600.	550.
400.	450.
P X P	
151.	51.
100.	
Diuiſor.	

Quæſt. 13. 13. Quidam habet duo pocula aurea, & vnum cooperculum 150. aureorum, quod additum priori poculo facit eius pretium triplũ pretii poſterioris poculi, additum vero poſteriori poculo facit illud eiuſdem pretij cum priori. Quanti ergo conſtant duo illa pocula? Hic quæruntur duo numeri, quorum primus cum 150. triplus ſit ſecundi, ſecundus vero cum 150. æqualis ſit primo. Pone, prius poculum conſtare 30. aur. (Pono autem hunc numerum, quia additis 150. fit numerus, qui habet ſubtriplum ſine fractione.) Addito cooperculo 150. aureorum, conſtabit 180. aur. & quoniam pretium hoc triplum eſſe debet pretii poſterioris poculi, conſtabit poſterius poculum 60 aur. Addito cooperculo, conſtabit 210. Debebat autem conſtare tantum 30. vt eius pretium æquale eſſet pretio prioris. Exceſſimus ergo veritatem numero 180. Pone deinde, prius poculum conſtare 90. aur. Addito cooperculo 150. aureorum, conſtabit 240. aur. ac proinde poſterius poculum conſtabit 80 aur. cum ille numerus huius ſit triplus. Addito cooperculo, conſtabit 230. Debebat autem conſtare tantum 90. vt eius pretium prioris pretio eſſet æquale. Exceſſimus ergo etiam hic veritatem numero 140. Operare per regulam, inueniesq; pretium prioris poculi 300. aur. Addito enim cooperculo 150. aur. fiet pretium 450. aur. atq; adeo pretium poſterioris poculi erit 150. aur. ſubtriplum videlicet illius; additoq; cooperculo fiet pretium 300. aur. æquale pretio prioris.

30.	90.
150.	150.
M X P	
180.	240.
180.	140.
40.	
Diuiſor.	

Quæſt. 14. 14. Quidam habet duo pocula aurea, & vnum cooperculum 100. aureorum, quod additum priori poculo facit eius pretium triplum pretii poſterioris: additum vero poſteriori facit eius pretium duplum pretii prioris. Quanti ergo æſtimantur duo illa pocula? Finge, prius valere 50 aur. addito cooperculo 100. aur. valebit 150. aur. ac proinde poſterius valebit etiam 50. aur. cum ille numerus huius triplus ſit. Addito cooperculo, valebit 150. aur. qui numerus duplus non eſt pretii prioris, ſed numerus 100. duplus eſt illius pretii. Exceſſimus ergo veritatem numero 50. Pone rurſus, prius valere 110. aur. Addito cooperculo, valebit 210. aur. ac propterea poſterius valebit 70. aur. cum ille numerus huius ſit triplus. Addito cooperculo valebit 170. aur. qui numerus duplus non eſt pretii prioris, ſed numerus 220. eius duplus eſt. Defecimus ergo à veritate numero 50. Operare per regulam, inueniesq; pretiũ prioris poculi 80. aur. Addito n. cooperculo 100. aureorum, fiet pretium 180. aur. ac proinde pretium poſterioris poculi erit 60 aur. ſubtriplum videlicet illius: additoq; cooperculo, fiet pretium 160. aur. duplum pretii prioris, quod erat 80. aur.

50.	110.
100.	100.
P X M	
150.	210.
50.	50.
100.	
Diuiſor.	

Quæſt. 15. 15. Quidam emit tot perdices, vt ſi emiſſet $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. & $\frac{1}{4}$. illarum, & præterea 22. haberet 100. Quot ergo emit? Hic quæritur numerus, cuius $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. & $\frac{1}{4}$. cum 22. faciãt 100. Pone eum emiſſe 12. Huius numeri $\frac{1}{2}$. eſt 6 & $\frac{1}{3}$. 4. & $\frac{1}{4}$. 3. quæ partes faciunt 13. additiſq; 22. fiunt 35. Debebant autem fieri 100. Defecimus ergo numero 65. Pone ſecundo, cũ emiſſe 60. Huius numeri $\frac{1}{2}$. eſt 30. & $\frac{1}{3}$. 20. & $\frac{1}{4}$. 15. q̃ partes faciunt 65. additiſq; 22. fiunt 87. Debebãt a. fieri 100. Defecimus ergo iterũ numero 13. Operare per regulam, inueniesq; eum emiſſe 72. perdices. Huius namq; numeri $\frac{1}{2}$. eſt 36 & $\frac{1}{3}$. 24. & $\frac{1}{4}$. 18. quæ partes conficiunt 78. additis a. 22. fiunt 100. quemadmodum propoſitum eſt.

12.	60.
M X M	
65.	13.
52.	
Diuiſor.	

Quæſt. 16. 16. Duo habent ſummam quandam aureorum; ſi ſecundus primo det 12. habebit primus ſextuplo plus, quam ſecundus: ſi vero primus det 15 ſecundo, habebit ſecundus decuplo plus, quam primus. Quot ergo quiſq; aureos habet? Hic quæruntur duo numeri, quorum primus cum 12. vnitatibus ſecundi ſextuplus ſit reſidui ſecundi, ſecundus vero cum 15. vnitatibus primi decuplus reſidui primi. Vt hanc, & ſimiles quæſtiones facilius ſine fractionibus ſoluas, incipiendum erit à numero ſecundo. Finge ergo, ſecundum habere 20. ex quo ſi dentur 12. vnitates primo, habebit primus iuxta quæſtionis pronunciationẽ, ſextuplum reſidui ſecundi, quod eſt 8. Habebit tunc ergo primus 48. atq; adeo antequam 12. accepit à ſecundo, habuit 36. Iam vero ſi ex hoc numero 36. primi dentur 15. vnitates ſecundo, habebit ſecundus 35. qui numerus decuplus eſſe debet, iuxta quæſtionis tenorẽ, reſidui primi, quod eſt 21. Conſtat autem, numerum 35. non eſſe decuplum numeri 21 ſed numerum 210. Defecimus ergo à veritate numero 175. Pone rurſus ſecundum habere 100. ex quo ſi dẽtur 12. primo, habebit primus, vt vult quæſtio, ſextuplum reſidui ſecundi, quod eſt 88. Habebit ergo tunc primus 528. atq; adeo, antequam 12. accepit à ſecundo habuit 516. Iam vero ſi ex hoc numero 516. primi dentur 15 vnitates ſecundo, habebit ſecundus 115. qui numerus decuplus eſſe debet, vt quæſtio vult, reſidui primi, quod eſt 501. conſtat autem, numerum 115. non eſſe decuplum numeri 501. ſed numerum 5010. Defecimus ergo rurſus à veritate numero 4895 Operare per regulam, inueniesq; ſecundum habere 17 $\frac{2}{59}$. ex quo ſi dentur 12. vnitates primo, habebit primus ſextuplum reſidui ſecundi, quod eſt 5 $\frac{2}{59}$. Habebit ergo tunc primus 30 $\frac{12}{59}$. ac proinde, antequam à ſecundo accepit 12. habuit 18 $\frac{12}{59}$. Si enim ex hoc numero dentur ſecundo 15. vnitates, habebit ſecundus 32 $\frac{2}{59}$. qui numerus decuplus eſt reſidui primi, quod eſt 3 $\frac{12}{59}$. vt quæſtio proponit.

20.	100.
M X M	
175.	4895.
4720.	
Diuiſor.	

Quæſt. 17. 17. Duo habent ſummã quandam aureorũ: Si ſecundus det 6 primo, habet primus duplum reſidui ſecundi; ſi vero primus ſecundo det 3. habebit ſecundus numerum æqualem reſiduo primi. Quot ergo aureos quiſq; habuit? Hic etiam quæruntur duo numeri, quorum primus cum 6 vnitatibus ſecundi duplus ſit reſidui ſecundi, ſecundus vero cum 3. vnitatibus primi æqualis reſiduo primi. Pone ſecundum habere 15. ex quo ſi dentur 6 vnitates primo, habebit primus 18. duplum videlicet reſidui ſecundi, quod eſt 9. atque adeo, priuſquam acci-

ret 6.à ſecundo, habuit 12. Iam vero ſi ex hoc numero dentur 3. vnitates ſecundo, habebit ſecundus 18. qui numerus æqualis non eſt reſiduo primi, quod eſt 9. ſed maior. Exceſſimus ergo veritatem numero 9. Pone deinde, ſecundum habere 20. ex quo ſi dentur 6. vnitates primo, habebit primus 28. duplum videlicet reſidui ſecundi, quod eſt 14. Antequam ergo acciperet 6.à ſecundo, habuit 22 Iam vero ſi primus det ſecundo 3. vnitates, habebit ſecundus 23. qui numerus non eſt æqualis reſiduo primi, quod eſt 19. ſed maior. Exceſſimus ergo rurſus veritatem numero 4. Operare per regulam, inueniesque, ſecundum habere 24. ex quo ſi dentur 6. vnitates primo, habebit primus 36. nempe duplum reſidui ſecundi, quod eſt 18. Prius ergo habuit 30. atque adeo ſi det 3. vnitates ſecundo, habebit ſecundus 27. qui numerus æqualis eſt reſiduo primi, quod etiam eſt 27.

15. 20.
P X P
9. 4.
5.
Diuiſor.

18. Eſt ciſterna habens in fundo tres fiſtulas inæquales: per maximam reſeratam effluit tota aqua in 2. horis, per mediam in 3. & per minimam in 6. Si ergo aqua ſemper æquabiliter effluat, quanto tempore effluet, ſi omnes tres fiſtulæ ſimul reſerentur? Finge in 4. horis, & dic. Si maior fiſtula in 2. horis euacuat 1. ciſternam, quid euacuabit in 4. horis? inuenieſq; 2. ciſternas. Item, Si media fiſtula in 3. horis euacuat 1. ciſternam, quantum exhauriet in 4. horis? inuenieſq; $1\frac{1}{3}$. ciſtern. Item, Si minima fiſtula in 6. horis exhaurit 1. ciſternam, quantum euacuabit in 4. horis? inuenieſq; $\frac{2}{3}$. ciſtern. atq; ita omnes tres fiſtulæ in 4. horis euacuarent 4. ciſternas. Nos autem volumus tantum 1 ciſternam. Exceſſimus ergo veritatem numero 3. Pone ſecundo in 10. horis, & dic. Si maxima fiſtula in 2. horis exhaurit 1. ciſternam, quantum exhauriet in 10. horis? inuenieſq; 5. ciſternas. Item ſi media fiſtula 1. ciſternam euacuat in 3. horis, quantum euacuabit in 10. horis? reperieſq; $3\frac{1}{3}$. ciſtern. Item ſi minima fiſtula in 6. horis euacuat 1. ciſternam, quid exhauriet in 10. horis? inuenieſq; $1\frac{2}{3}$. ciſtern. atq; ita omnes tres fiſtulæ euacuarent in 10. horis 10. ciſtern. Nos autem volumus 1. ciſtern. Exceſſimus ergo veritatem numero 9 Operare per regulam, inuenieſq; in 1. hora euacuari ciſternam. Nam maxima fiſtula in vna hora exhauriet $\frac{1}{2}$. & media $\frac{1}{3}$. & minima $\frac{1}{6}$. quæ omnes partes conficiunt 1. ciſternam.

4. 10.
P X P
3. 9.
6.
Diuiſor.

Hæc quæſtio etiam ita proponi poteſt. Eſt ciſterna habens in orificio tres canales inæquales. Per maximum impletur ciſterna in 2. horis, per medium in 3. & per minimum in 6 &c.

19. Eſt ciſterna habens fiſtulam in orificio, per quam impletur in 12. horis: in imo vero fundo habet aliam fiſtulam, per quam euacuatur in 18. horis. Si igitur per ſuperiorem continue influat aqua, & per inferiorem ſemper effluat, quanto tempore replebitur tota ciſterna? Pone in 20. horis, & dic. Si in 18. horis euacuatur 1. ciſtern. quid euacuabitur in 20. horis? inuenieſq; $1\frac{1}{9}$. ciſtern. Neceſſe eſt ergo in 20. horis impleri $2\frac{1}{9}$. ciſtern. vt eodem tempore euacuata $1\frac{1}{9}$. ciſterna maneat 1. ciſterna repleta. Dic ergo: ſi in 12. horis impletur 1. ciſterna, quid implebitur in 20. horis? inuenieſq; $1\frac{2}{3}$. ciſtern. Nos autem volumus $2\frac{1}{9}$. ciſter. Defecimus ergo à veritate numero hoc $\frac{4}{9}$. Pone ſecundo in 30. horis, & dic. Si in 18. horis euacuatur vna ciſterna, quid euacuabitur in 30. horis? inuenieſq; $1\frac{2}{3}$. ciſtern. Neceſſe eſt ergo in 30. horis impleri $2\frac{2}{3}$. ciſtern. vt eodem tempore euacuata $1\frac{2}{3}$. ciſtern. relinquatur 1. ciſterna plena. Dic ergo. Si in 12. horis impletur in 1. ciſterna, quid implebitur in 30. horis? Inuenieſque $2\frac{1}{2}$. ciſtern. Nos autem volumus $2\frac{2}{3}$. ciſtern Iterum ergo à veritate defecimus hoc numero $\frac{1}{6}$. Operare per regulam, inuenieſq; in 36. horis ciſternam impleri. Nam in 36. horis ſuperior fiſtula implebit 3. ciſternas; inferior autem exhauriet 2. ciſternas; atq; ita remanebit vna plena.

20. 30.
M X M
$\frac{4}{9}$. $\frac{1}{6}$.
$\frac{5}{18}$.
diuiſor.

Quæſt. 18. Quæſt. 19.

20. Artifex quidam abſoluit opus quoddam in 30. diebus; at ſi accedat alius, abſoluent ambo idem opus in 18. diebus. Quanto ergo tempore ſecundus hic ſolus idem opus perficiet? Dic primo. Si primus artifex in 30. diebus abſoluit opus, quantum abſoluet in 18. diebus? inuenieſq; $\frac{3}{5}$. operis. Eodem ergo tempore ſecundus abſoluet $\frac{2}{5}$. vt ambo totum opus perficiant. Pone ergo primo ſecundum abſoluere totum opus in 40. diebus, & dic. Si ſecundus in 18. diebus abſoluit $\frac{2}{5}$. operis, quantum abſoluet in 40. diebus? inuenieſq; $\frac{8}{9}$. operis. Nos autem poſuimus eum abſoluere totum opus. Defecimus ergo à veritate hoc numero $\frac{1}{9}$. Pone deinde ſecundum abſoluere opus in 60. diebus, & dic. Si ſecundus in 18. diebus abſoluit $\frac{2}{5}$. operis, quantum abſoluet in 60. diebus? inuenieſq; $1\frac{1}{3}$. Nos autem poſuimus eum abſoluere 1. opus. Exceſſimus ergo veritatem hoc numero $\frac{1}{3}$. Operare per regulam, inuenieſq; ſecundum abſoluere opus totum in 45. diebus. Nam ſi in 18. diebus abſoluit $\frac{2}{5}$. operis, abſoluet in 45. diebus 1. opus.

40. 60.
M X P
$\frac{1}{9}$. $\frac{1}{3}$.
$\frac{4}{9}$.
Diuiſor.

Quæſt. 20.

Facilius tamen ſine regula falſi hæc quæſtio ſoluetur, hoc modo. Poſtquam inueniſti, ſecundum in 18. diebus abſoluere $\frac{2}{5}$. operis, ita vt ſuperſint $\frac{3}{5}$. Dic. Si $\frac{2}{5}$. requirunt 18. dies, $\frac{3}{5}$. quot dies requirent? inuenieſq; 27. dies, qui additi ad 18. faciunt 45. dies, quibus totum opus perficiet, vt prius. Vel certe dic. Si $\frac{2}{5}$. requirunt 18. dies, quot dies requiret 1. opus integrum? Inuenies namq; rurſum 45. dies, vt prius.

Alia ſolutio huius quæſtionis.

Quæſt. 21.

21. Tres inter ſe ita luſerunt, vt ſtatim primus lucratus ſit $\frac{1}{2}$ pecuniæ ſecundi: poſtea vero ſecundus $\frac{1}{3}$. pecuniæ tertii: tertius deniq; $\frac{1}{4}$. pecuniæ eius, quam primus in ludum attulit. Finito autem ludo, quiſq; ipſorum 700. aur. habuit: quantum ergo pecuniæ quiſque in ludum attulit? Hic aliud nihil quæritur, quam vt datus numerus 2100. (Si enim ſinguli habent 700 habebunt omnes tres 2100.) in tres partes diſtribuatur, ita vt, ſi prima det $\frac{1}{4}$. tertiæ, accipiat vero $\frac{1}{2}$. ſecundæ: ſecunda autem accipiat $\frac{1}{3}$. tertiæ, fiant tres numeri æquales, nempe 700. 700.700. Vel certe quærantur tres numeri, quorum primus depoſita $\frac{1}{4}$. ſi accipiat $\frac{1}{2}$. ſecundi, faciat 700. ſimiliter ſecundus, depoſita $\frac{1}{2}$. cum $\frac{1}{3}$. tertii faciat 700. eodemq; modo tertius, depoſita $\frac{1}{3}$. cum $\frac{1}{4}$ primi faciat 700. Pone primum luſorem attuliſſe 100. aur. depoſita $\frac{1}{4}$. nempe 25. ſuperſunt ei 75. Et quia hoc reſiduum cum $\frac{1}{2}$. ſecundi debet facere 700. erit $\frac{1}{2}$. ſecundi 625.

100. 200.
1250. 1100.
225. 450.
M X M
525. 350.
175.
diuiſor.

quod hic numerus cum reſiduo primi, nempe cum 75. faciat 700. Attulit ergo ſecundus 1250. Poſtquam autem perdiderit $\frac{1}{2}$. remanebunt ei 625. Quoniam vero reſiduum hoc cum $\frac{1}{3}$. tertii debet facere 700. erit $\frac{1}{3}$. tertii 75. quod hic numerus cum reſiduo ſecundi faciat 700. Quare tertius ſecum attulit in ludum 225. Poſtquam autem perdiderit $\frac{1}{3}$. ſupererunt ei 150. Et quia hoc reſiduum cum $\frac{1}{4}$. primi, h.e. cum 25. facit 175 Debebat autẽ facere 700. defecimus, ꝓpterea à veritate numero 525. Qui defectus hinc etiã cognoſcitur, ꝙ tres numeri poſiti 100. 1250. 225. faciunt 1575. qui numerus à 2100. quẽ numerum oẽs tres conficere debent, deficit hoc numero 525.

Pone deinde, primum attuliſſe in ludum 200. aur. Depoſita $\frac{1}{4}$. nempe 50. ſuperſunt ei 150. aur. qui cum $\frac{1}{2}$. ſecundi facere debent 700. Erit ergo $\frac{1}{2}$. ſecundi 550. aur. Attulit ergo ſecum 1100. Perdita autem $\frac{1}{2}$. ſuperſunt ei 550. aur. qui cum $\frac{1}{3}$. tertii facere debent 700. Erit ergo $\frac{1}{3}$. tertii 150. ac proinde in initio ludi habuit 450. Amiſſa autem $\frac{1}{3}$. remanent ei 300. aur: qui cum $\frac{1}{4}$. primi, hoc eſt, cum 50. faciunt 350. Debebant a. facere 700. Defecimus ergo etiam nunc à veritate numero 350. Qui defectus hinc quoq; elici poteſt, quod tres numeri poſiti 200. 1100. 450. faciunt 1750, qui numerus à 2100. deficit hoc numero 350. Operare per regulam, inuenieſq; primum luſorẽ attuliſſe 400. aur ſecundum 800. & tertium 900 Numeros porro hos ſecundi & tertii inuenies vel ex regula falſi, multiplicando errores per ſecundi ac tertii poſitiones, &c. vel ex primo inuento, quemadmodum paulo ante ex 100. & 200 quos numeros poſuimus primum habere, numeros ſecundi, ac tertii inueſtigauimus. Nam ſi primus habet 400. habebit (depoſita $\frac{1}{4}$. nimirum 100. quam perdidit) 300. & quia cum $\frac{1}{2}$. ſecundi debet habere 700. erit $\frac{1}{2}$. ſecundi 400. ac proinde ſecundus attulit 800. Amiſſa autem $\frac{1}{2}$. ſupererunt ei 400. Quoniam vero hæc $\frac{1}{2}$. cum $\frac{1}{3}$. tertii facere debet 700. erit $\frac{1}{3}$. tertii 300. propterea q; tertius attulit 900. Amiſſa enim $\frac{1}{3}$. remanebunt ei 600. quibus ſi addatur $\frac{1}{4}$. primi, hoc eſt, 100 aur. habebit 700. vt quęſtio vult.

Quæſt. 22. 22. Tres mercatores lucrati ſunt 400. aur. quos, habita ratione pecuniæ, quam quiſq; poſuit, ita diſtribuerunt, vt ſecundi portio ſuperaret portionem primi numero 12. tertii vero portio excederet portionem ſecundi numero 16. Quanta ergo fuit portio cuiuſq;? Finge, primũ accepiſſe 1. aur. (volo enim quæſtionem hanc ſoluere per minimos numeros, nempe per poſitionem 1. & 2. vt clarius appareat generalitas huius regulæ falſi.) ac proinde ſecundum 13. & tertium 29. qui omnes numeri conficiunt 43. Debebant autem conficere 400. Defecimus ergo à veritate numero 357. Finge rurſus, primum accepiſſe 2. aur. atq; adeo ſecundum 14. & tertium 30. qui omnes numeri conficiunt 46. Debebant a. conficere 400 Defecimus ergo etiã nunc à veritate numero 354. Operare per regulã, inuenieſq; primi portionẽ eſſe 120. aur. ſecundi 132. & tertii 148. qui tres numeri conficiunt ſummã 400. aur. vt in quæſtione proponitur.

1. 2.
13. 14.
29. M X M 30.
43. 46.
357. 354.
3.
Diuiſor.

Quæſt 23. 23. Imperatoris exercitus contra Turcas continet 40000. Germanorum peditum, tot vero Italos, & Hungaros, vt numerus Italorum ſit $\frac{1}{2}$. Germanorum, atq; Hungarorum: numerus vero Hungarorum ſit $\frac{1}{3}$. Germanorum atq; Italorum. Quantus ergo eſt Italorum, & quantus Hungarorum numerus atq; adeo quantus totus exercitus? Finge, Italos eſſe 30000. Et quoniam hic numerus debet eſſe $\frac{1}{2}$. Germanorum, atq; Hungarorum, erunt Germani, atq; Hungari 60000. Cum ergo Germani ſint 40000, erunt Hungari 20000. qui debent conficere $\frac{1}{3}$. Germanorum, atq; Italorum, nempe numeri 70000. Conficiunt autem $\frac{1}{3}$. numeri 60000. Exceſſimus ergo veritatem numero 10000. Finge ſecundo, Italos eſſe 24000. Et quoniam hic numerus debet eſſe $\frac{1}{2}$. Germanorum, atq; Hungarorum, erunt Germani, atq; Hungari 48000. Cum ergo Germani ſint 40000. erunt Hungari 8000. qui debent conficere $\frac{1}{3}$. Germanorum, atq; Italorum, nempe numeri 64000. Conficiunt autem $\frac{1}{3}$. numeri 24000. Exceſſimus ergo rurſus veritatem numero 40000. Operare per regulam, inuenieſq; Italos eſſe 32000. Hungaros vero 24000. ac proinde totum exercitum 96000. Nam hac ratione Itali conficiunt $\frac{1}{2}$. Germanorum, atq; Hungarorum, Hungari vero $\frac{1}{3}$. Germanorum, atq; Italorum, vt patet.

30000. 24000.
20000. 8000.
P X P
10000. 40000.
30000.
diuiſor.

Quæſt. 24. 24. Viſum eſt hic apponere artificium illud Archimedis, quo teſte Vitruuio lib. 9. cap. 3. deprehendit furtum aurificis cuiuſdam in corona aurea, hoc eſt, quantum argenti fuerit commiſtum, nõ diſſoluta corona. Cum enim Hiero rex ſtatuiſſet Dijs ſuis votiuam offerre coronam ex puro auro, aurifex, ſublata auri portione, argenti tantundem commiſcuit: Indignatus vero Hiero ſe contemptum, (vt verbis Vitruuij vtar) neq; inueniens, qua ratione id furtum deprehenderet, rogauit Archimedem, vti in ſe ſumeret ſibi de eo cogitationem. Tunc is, cum haberet eius rei curam, caſu venit in balneum, ibiq; cum in ſolium deſcenderet, animaduertit, quantũ corporis ſui in eo inſideret, tantum aquæ extra ſolium effluere. Itaq; cum eius rei rationem explicationis offendiſſet, non eſt moratus, ſed exiliuit gaudio motus de ſolio, & nudus vadens domũ verſus ſignificabat clara voce, inueniſſe, ꝙ quæreret. Nã currens identidem græce clamabat ἕυρηκα, ἕυρηκα. Tũ vero ex eo inuentionis cõgreſſu duas dicitur feciſſe maſſas æquo pondere, quo etiã fuerat corona, vnam ex auro, alterã ex argento. Cum ita feciſſet, vas amplũ ad ſumma labra impleuit aqua, in quo demiſit argenteam maſſam, cuius quanta magnitudo in vaſe depreſſa eſt, tantũ aquæ effluxit: ita exempta maſſa, quãto minus factum fuerat, refudit, ſextario menſus, vt eodẽ modo. quo prius fuerat ad labra æquaretur. Ita ex eo inuenit, quantũ ad certũ pondus argenti certa aquæ menſura reſpõderet. Cũ id expertus eſſet, tum aureã maſſam ſimiliter pleno vaſe demiſit, & ea exempta eadem ratione, menſura addita, inuenit ex aqua nõ tantum defluxiſſe, ſed tantum minus, quantũ minus magno corpore eodem pondere auri maſſa eſſet, q̃ argenti. Poſtea vero repleto vaſe in eadem aqua ipſa corona demiſſa, inuenit plus aquæ defluxiſſe in coronam, quam in auream eodem pondere maſſam, & ita ex eo, quod plus defluxerat aquæ in corona, q̃ in maſſa, ratiocinatus, deprehendit argenti in auro mixtionem. Hactenus Vitruuius. Explicemus a. nos, quo pacto per regulam falſi furtum dictum deprehendi poſſit, ſi adhibeatur artificium illud Archimedis.

Ponatur exempli cauſa, coronam illam fuiſſe 100. lib. eaq; impoſita in vaſe effluxiſſe 65 lib. aquæ, impoſita vero maſſa puri auri 100. lib. effluxiſſe 60. lib. aquæ; impoſita tandem maſſa pura argenti 100. lib. effluxiſſe 90. lib. aquæ. Finge ergo, aurificem abſtuliſſe 40. lib. aur. totidemq; libras argenti ſubſtituiſſe, ita vt in corona fuerint 60. lib. auri, & 40. lib. argenti. Video iam, an corona ita confecta eijciat 65. lib. aquæ, quod ita ſcies. Dic Si 100. lib. aur. eijciũt 60. lib. aquæ, quantum aquæ eijcient 60. lib. auri? Itẽ ſi 100 lib. argenti expellunt 90. lib. aquæ, quantum aquæ expellent 40. lib. argenti? inuenieſq; in vtraq; operatione 36. lib. aquæ, ita vt corona eijciat 72. lib. aquæ Debebat autem eijcere tantum 65. lib. Exceſſimus ergo veritatem numero 7. Finge ſecundo, aurificem ſurripuiſſe 30. lib. auri, ac proinde in corona fuiſſe 70. lib. auri, & 30. lib. argenti. Dic ergo. Si 100. lib. auri expellunt 60 lib. aquæ, quantum aquæ expellent 70. lib. auri? Item, ſi 100. lib. argenti eijciunt 90. lib. aquæ, quantum

60. 70.
40. 30.
P X P
7. 4.
3.
diuiſor.

aquæ eiicient 30.lib.argenti? inuenieſque in priori operatione 42.lib. aquæ, in poſteriori vero 27. quæ efficiunt 69.lib.aquæ. Debebant autem eſſe tantum 65.lib. Rurſus ergo exceſſimus veritatem numero 4. Operare per regulam, inuenieſq;, aurificem accepiſſe 16 $\frac{2}{3}$.lib.auri, atq; adeo, coronam illam mixtam fuiſſe ex 83 $\frac{1}{3}$. lib.auri, & ex 16 $\frac{2}{3}$.lib.argenti. Quod vt probes, dic. Si 100.lib.auri eiiciunt 60.lib.aquæ, quantum aquæ eiicient 83 $\frac{1}{3}$.lib.auri? Item, ſi 100 lib.argenti eiiciunt 90.lib.aquæ, quantum aquæ eiicient 16 $\frac{2}{3}$.lib.argenti? inuenieſque in priori operatione 50.lib.aquæ, in poſteriori vero 15. lib.aquæ, quæ omnes conficiunt 65.libras aquæ, quas poſuimus coronam eiicere.

Eodem modo deprehenſum fuiſſet furtum, etiamſi maſſæ auri, & argenti non fuiſſent 100.lib. quot libras habebat corona, ſed quotcunque librarum, nempe auri 10.lib v.g. & argenti 20. dummodo diligenter exploretur, quantum aquæ ſingulæ maſſæ eijciant. Nos ponamus 10.lib auri eiicere 6.lib.aquæ. at 20.lib.argenti eiicere 18.lib.aquæ. Vnde in priori poſitione dices. Si 10.lib.aur.eiiciunt 6.lib.aquæ, quantum aquæ eiicient 60.lib.auri? &c.

Si ponatur corona 300 lib. & maſſæ auri, argentique totidem lib. hac conditione, vt corona eiiciat 218.lib.aquæ, aurum vero 206.lib.aquæ, & argentum 230.lib.aquæ; inueniemus in corona fuiſſe 150.lib.auri, totidemq; argenti. Vt patet in hiſce duabus poſitionibus, in quarum priore ſtatuuntur 100.lib.auri, & 200.lib.argenti: in poſteriore autem 101.lib.aur. & 199.argenti, &c.

100.		101.
200.		199.
— P	X	P —
4.		3 $\frac{25}{27}$.
	$\frac{2}{27}$. Diuiſor.	

Hoc ergo artificio deprehendetur in quacunque maſſa ex auro, argentoque commixta. quantum auri, quantumque argenti permixtum ſit.

PROGRESSIONES ARITHMETICÆ.

CAPVT XXIV.

PROGRESSIO Arithmetica eſt ſeries plurium numerorum ſe æqualiter ſuperantium, vt hic. *Progreſſio Arithmetica quid.*

Progreſſio naturalis numerorum incipiens ab 1.

1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.13.14.&c.

Progreſſio numerorum imparium incipiens ab 1.

1.3.5.7.9.11.13.15.17.19.21.23.25.27.&c.

Pregreſſio numerorum parium incipiens à 2.

2.4.6.8.10.12.14.16.18.20.22.24.26.28 &c.

Prima enim harum trium progreſſionum dicitur progreſſio naturalis numerorum, incipitque ab 1. in qua omnes numeri ſe ordine ſuperant vnitate. Secunda vero dicitur progreſſio numerorum imparium, incipitque ab 1. in qua omnes numeri ſe ordine ſuperant binario. Tertia denique appellatur progreſſio numerorum parium, incipitque à 2. qui eſt primus numerus par, quemadmodum & 1 eſt primus numerus impar, atque adeo primus omnium numerorum, licet impropriè. In hac autem progreſſione numerorum parium omnes numeri ſe ordine ſuperant etiam binario, quemadmodum & in progreſſione numerorum imparium. Eodem modo hic. *Progreſſio naturalis numerorũ, & numerorum imparium parium q; quid.*

Aliæ progreſſiones.

2.5.8.11.14.17.20.23.26.29. &c.

4.8.12.16.20.24.28.32.36.40. &c.

Prior namque harum progreſſionum incipit à 2. progrediturque per 3. cum omnes numeri in ea ſe ordine ſuperent ternario: poſterior vero incipit à 4. progrediturque per eundem numerum 4. cum in ea omnes numeri ſe ordine ſuperent quaternario.

Continuatur quælibet progreſſio Arithmetica, ſi differentia, exceſſuſue numero illi addatur, poſt quem progreſſio extendenda eſt. Vt ſi progreſſio hæc, 4.9.14.19.24. continuanda ſit, addemus differentiam, ſiue exceſſum progreſſionis, nempe 5. (quam quidem differentiam, exceſſumue inueniemus, ſi primum progreſſionis numerum à ſecundo, vel quemuis alium à proxime maiore in eadem progreſſione ſubtrahamus.) vltimo numero 24. efficiemuſque 29. Huic iterum numero adiiciemus 5. componemuſque 34. & ita deinceps in infinitum. Sic etiam, ſi quis progreſſionem incipere velit à 7. & progredi per differentiam, exceſſumue 6. addenda erunt 6 ad 7 vt fiant 13. pro ſecundo numero progreſſionis: Item 6. ad 13. vt fiant 19. pro tertio numero, &c. *Arithmetica progreſſio quo pacto continuetur.*

Pari ratione progreſſio Arithmetica continuatur retrocedendo, ſi differentia progreſſionis à minori extremo ſubducatur. Vt ſi progreſſio hæc 30.37.44.51.58. continuanda ſit verſus minores numeros, auferemus differentiam 7. ex minori extremo 30. vt relinquantur 23. Ex his rurſus ſubducemus 7. vt remaneant 16. Ex his rurſus ſubducemus 7. vt ſuperſint 9. à quibus rurſus auferemus 7. vt ſuperſint 2. à quibus amplius auferri nequeunt 7. ac propterea dicta progreſſio amplius non poteſt decreſcere. Sic etiam, ſi quis progreſſionem inchoare velit à 40. & progredi per 4. verſus vnitatem, auferenda erunt 4. ex 40. vt relinquantur 36. Item 4. ex 36. vt remaneant 32. Rurſus 4. ex 32. vt ſuperſint 28. Item 4 ex 28. vt relinquantur 24 &c. *Differentia progreſſionis Arithmeticæ quo modo inueniatur. Progreſſio Arithmetica decreſcere non poteſt in infinitum.*

Proprium eſt progreſſionis Arithmeticæ trium numerorum, vt aggregatum extremorum æquale ſit duplo medii numeri, vt hic apparet, 7.18.29. demonſtraturque à Iordano lib. 1. propoſ. 2. *Proprietas progreſſionis Arithmeticæ triũ numerorũ.*

Pregreſſionis vero Arithmeticæ quatuor numerorum proprium eſt, vt aggregatum extremorum æquale ſit aggregato mediorum; veluti hic apparet, 4.12.20.28 demonſtraturque à Iordano lib. 1. propoſ. 3. Atque hoc non ſolum verum eſt in quatuor numeris ſeſe continue eodem numero ſuperantibus, quales ſunt numeri in dato exemplo; ſed etiam in quatuor, quæ non continue ſe ſuperant eodem numero, dummodo eadem ſit differentia inter primum ac ſecundum, quæ inter tertium, ac quartum; vt hic vides 4.12.30.38. *Proprietas progreſſionis Arithmeticæ quatuor numerorum.*

Ex his proprietatibus colligitur, in omni progreſſione Arithmetica, cuius numerus terminorum eſt impar, aggregatum extremorum æquale eſſe cuilibet aggregato duorum numerorum quorumlibet ab extremis æqualiter diſtantium, nec non duplo medii numeri. Vt hic apparet.

Proprietas progreſſionis Arithmeticæ quotcunq; terminorum, ſi numerus terminorum fuerit impar.

3.7.11.15.19.23.27.31.35 39.43.

Cum enim quatuor hi numeri 3.7.39 43. habeant eandem differentiam, licet non continuatam (Nam eadem eſt differentia inter 3.&7. quæ inter 39.& 43.) erit, ex iis, quæ proxime diximus, aggregatum extremorum 3. & 43. æquale aggregato mediorum 7.& 39. Eadem ratione aggregatum ex 7.& 39. æquale erit aggregato ex 11. & 35. quod hi quatuor numeri 7.11.35.39. habeant eandem differentiam, licet non continuatam & ita de reliquis, donec ad tres medios numeros 19.23.27 perueniamus; qui cum habeant eandem differentiam, erit, per ea, quæ paulo ante docuimus, aggregatum extremorum 19.& 27. æquale duplo medii numeri 23. Eadem eſt ratio de omnibus aliis huius generis progreſſionibus Arithmeticis.

Proprietas progreſſionis Arithmeticæ quotcunq; terminorũ, ſi numerus terminorũ fuerit par.

Ex poſteriore quoque proprietate efficitur, in omni progreſſione Arithmetica, cuius numerus terminorum eſt par, aggregatum extremorum æquale eſſe cuilibet aggregato duorum numerorum quorumlibet ab extremis æqualiter diſtantium. Vt hic manifeſtum eſt.

3.7.11.15.19.23.27.31.35 39.

Quod probabimus, vt prius, hoc dempto quod poſtremo loco ſumendi ſunt quatuor numeri medii 15. 19.23.27. non autem tres tantum, vt prius; quia hic non eſt vnicus numerus medius, ſed duo. Nunc ſequuntur regulæ ad Arithmeticas progreſſiones ſpectantes.

REGVLA I.

Summa cuiuſcunq; progreſſionis Arithmeticæ quo pacto inueniatur.

SI in quauis progreſſione Arithmetica notus fuerit numerus terminorum vna cum minore, & maiore extremo, perueniemus in cognitionem ſummæ omnium terminorum, hac ratione. Addatur primus terminus vltimo, & aggregatum per numerum terminorum multiplicetur. Dimidium enim numeri producti erit ſumma omnium terminorum. Vt in hac progreſſione.

4.7.10.13.16.19.22.25 28 31.34 37.

Ex 4.& 37. fiunt 41. quæ multiplicata per numerum terminorum, hoc eſt, per 12. (Sunt enim 12. numeri in ea progreſſione) faciunt 492. Huius numeri dimidium 246. eſt ſumma omnium numerorum datæ progreſſionis. Eademq; ratio eſt de cæteris.

Summa cuiuſcunq; progreſſionis Arithmeticæ quo pacto aliter inueniatur.

Hæc regula à nonnullis diuiditur in duo membra, hoc modo. Quando numerus terminorum eſt par, multiplicant aggregatum ex primo, & vltimo termino per dimidium numeri terminorum. Si vero numerus terminorum eſt impar, multiplicant dimidium aggregati ex primo, & vltimo termino (quando enim numerus terminorum eſt impar, ſemper illud aggregatum eſt par) per numerum terminorum. Hac enim ratione ſemper producitur ſumma omnium numerorũ progreſſionis. Vel hoc modo. Quando aggregatum ex primo & vltimo termino eſt par, multiplicant eius dimidium per numerum terminorum, ſiue is par ſit, ſiue impar. Si vero aggregatum illud eſt impar, multiplicant illud per dimidium numeri terminorum, qui numerus tunc ſemper par eſt. Vt in ſuperiori exemplo, quia numerus terminorum eſt par nempe 12. vel quia aggregatum ex primo termino & vltimo eſt impar, videlicet 41 multiplicant illud per 6 dimidium numeri terminorum, efficiuntque ſummam omnium numerorum 246. vt prius. In his autem duabus progreſſionibus, in quarum priore numerus terminorum eſt par, nempe 10. & in poſteriori impar, nempe 11. quoniam aggregatum ex primo termino, & vl-

3.7.11.15.19.23.27 31.35 39.

4.7.10 13.16.19 22 25 28.31.34.

timo eſt par, nimirum 42. in priore, & 38. in poſteriore, multiplicant tam dimidium illius, nimirum 21. per 10. numerum terminorum, quam dimidium huius, quod eſt 19. per 11. numerum terminorum, vt in priori efficiant ſummam 210. & in poſteriori 209.

Ratio harum regularum hæc eſt. Quoniam ſupra diximus, quando numerus terminorum eſt par, aggregatum extremorum æquale eſſe cuilibet aggregato duorum quorumlibet numerorum ab extremis æqualiter diſtantium, fit, vt omnia aggregata ſimul ſint tot, quot vnitates ſunt in dimidio numeri terminorum. Quare ſi vnum aggregatum, nempe extremorum multiplicetur per dimidium numeri terminorum, producetur ſumma omnium aggregatorum. Rurſus quia docuimus, quando numerus terminorum eſt impar, aggregatum extremorum eſſe æquale cuilibet aggregato duorum quorumlibet numerorum ab extremis æqualiter diſtantium, necnon duplo medii numeri, fit, vt medius numerus ſit dimidium cuiuslibet aggregati. Ergo omnia aggregata ſimul, vna cum medio numero, continebunt tot dimidia vnius aggregati, quot ſunt termini. Si igitur dimidium vnius aggregati, nempe extremorum, multiplicetur per numerum terminorum, producetur ſumma omnium terminorum.

Itaque, vt vides, ſatis eſt, vt cognoſcatur primus terminus, & vltimus, vna cum numero terminorum, ad eliciendam ſummam totius progreſſionis, etiamſi intermedii termini ignorentur. Quo pacto autem ex primo numero cognito, vna cum numero terminorum, & differentia progreſſionis, vltimus terminus inueſtigetur, ſequenti regula explicabimus.

Particularis inuentio ſummæ progreſſionis naturalis numerorum.

In progreſſione autem naturali numerorum, quæ ab 1. incipit, inuenietur breuiſſime ſumma omnium terminorum, hoc modo. Multiplicetur vltimus numerus (qui ſemper indicat numerum terminorum) per numerum proxime maiorem. Huius enim numeri producti dimidium eſt ſumma omnium terminorum. Vt hic.

1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.

Numerus terminorũ progreſſionis naturalis numerorum eſt vltimus terminus.

Ex multiplicatione vltimi numeri 11. per 12. numerum proxime maiorem producitur numerus 132. cuius dimidium 66. eſt ſumma totius progreſſionis. Sic etiam in hac progreſſione.

1.2.3.4.5.6.7.8.9 10.

Ex multiplicatione vltimi numeri 10. per 11 numerum proxime maiorem fit numerus 110. cuius dimidium 55. eſt totius progreſſionis ſummæ.

Itaque ſi quis velit ſummam progreſſionis naturalis, quæ terminetur in quouis numero dato, vt in 100. in qua nimirum ſint 100. termini, multiplicandus erit vltimus numerus datus, in quo progreſſio dicitur terminari,

vt hic

Digitized by Google

vt hic numerus 100 per numerum proxime maiorem, vt hic per 101. Nam producti numeri (qui hic eſt 10100.) dimidium, nempe 5050. in dato exemplo, erit ſumma dictæ progreſſionis. Eademq; ratio eſt in aliis.

Alia inuentio ſumma progreſſionis naturalis numerorum.

Alii hanc etiam regulam diſtrahunt in duo membra, hoc modo. Si vltimus numerus eſt par, multiplicant numerum proxime maiorem in dimidium vltimi numeri: Si vero eſt impar, multiplicant eum in dimidium numeri proxime maioris. Hac enim ratione ſemper producitur ſumma omnium numerorum progreſſionis. Vt in poſteriori progreſſione naturali, multiplicant 11 numerum proxime maiorem vltimo numero per 5. dimidium vltimi numeri, faciuntq; 55. ſummam totius progreſſionis, vt prius. In priori autem progreſſione naturali, multiplicant 11. vltimum numerum per 6. dimidium numeri proxime maioris vltimo numero, efficiuntq; 66. ſummam totius progreſſionis, vt prius.

Particularis inuentio ſumma numerorum imparium.

In progreſſione quoq; numerorum imparium, quæ ab 1. incipit, inuenietur facillimo negotio ſumma omnium terminorum, ſi numerus terminorum in ſeipſum multiplicetur, vt hic.

1.3.5.7.9.11.13.15.17.19,

Ex multiplicatione numeri terminorum, qui eſt 10. in ſeipſum procreatur numerus 100. qui eſt ſumma totius progreſſionis.

Numerus terminorũ in progreſſione numerorum impariũ quo pacto reperiatur.

Habetur autem numerus terminorum, ſi vltimo numero adiiciatur 1 & compoſiti numeri dimidium ſumatur. vt in dato exemplo, ſi addatur 1. ad 19. fit numerus 20. cuius dimidium 10 indicat numerum terminorum.

Itaq; ſi quis velit ſummam progreſſionis numerorum imparium, quæ terminetur in quovis dato nũmero, vt in 67. addenda erit vnitas ad vltimum numerum, in quo progreſſio terminari dicitur, vt hic ad 67. Nam compoſiti numeri (qui hic eſt 68.) dimidiũ, nempe 34. in dato exemplo, dabit numerum terminorum: qui in ſe multiplicatus producet ſummam illius progreſſionis. Vt in propoſito exemplo in quo ponuntur 34. termini, ſi multiplicetur numerus 34. in ſe. procreabitur ſumma illius progreſſionis 1156. Atq; ita de cæteris.

Particularis inuentio ſumma numerorum parium.

In progreſſione denique numerorum parium, quæ à 2. incipit, nullo etiam labore reperietur ſumma. ſi dimidium vltimi numeri, quod ſemper indicat numerum terminorum progreſſionis, (ſemper enim tot ſunt termini progreſſionis eiuſmodi numerorum parium, quot ſunt vnitates in dimidio vltimi termini.) multiplicetur per numerum proxime maiorem illo dimidio. Vt hic.

Numerus terminorũ in progreſſione numerorum pariũ qua ratione inuenitur.

2.4.6.8.10.12.14.16.18.20.22.24.

Ex multiplicatione 12. (qui numerus eſt dimidium vltimi termini, vel numerus terminorum) per 13 numerum proxime maiorem illo dimidio, fit numerus 156 hoc eſt, ſumma omnium illorum numerorum parium.

Itaq; ſi quis velit ſummam progreſſionis numerorum parium, quæ terminetur in quolibet dato numero vt in 100. multiplicandus erit numerus, qui dimidium conficit numeri vltimi dati, in quo dicitur terminari progreſſio, vt numerus 50. in dato exemplo, (hic enim dimidium eſt vltimi numeri dati 100) per numerum proxime maiorem illo dimidio, vt hic per 51. Productus enim numerus vt 2550. in dato exemplo, erit ſumma illius progreſſionis; & numerus terminorum erit 50. in eodem exemplo, quot nimirum vnitates ſunt in dimidio vltimi numeri. Et ſic de aliis.

REGVLA II.

Vltimus terminus cuiuſcunq; progreſſionis Arithmeticæ quo pacto eliciatur ex numero terminorum vna cum primo termino, & differentia progreſſionis.

SI in quauis progreſſione Arithmetica notus fuerit numerus terminorũ; vnà cum primo termino, & differẽtia progreſſionis, inueniemus vltimum terminum, etiamſi intermedios terminos non habeamus, hoc modo. Ex numero terminorum abjiciatur 1. reliquus vero numerus per differentiam multiplicetur, ac tandem huic producto primus terminus adjiciatur. Numerus n. cõpoſitus erit vltimus terminus. Vt ſi primus terminus alicuius progreſſionis ſit 3. numerus autem terminorũ ſit 10. & differentia 8. cognoſcemus decimum terminum, hoc eſt, vltimum huius progreſſionis ſine intermedijs, hac ratione. Ex 10. numero terminorum auferemus 1. & reliquum numerum 9 multiplicabimus per 8. differentiam progreſſionis, producto tandem numero 72. adjiciemus 3. primum terminum. Compoſitus enim numerus 75. eſt decimus terminus progreſſionis, cuius primus terminus eſt 3 & differentia 8. Veluti hic apparet, vbi omnes termini ponuntur.

3.11.19.27.35.43.51.59.67 75.

Quæſtio de bobus Augiæ.

Itaque ſi quis hanc quæſtionem proponat. Augias Herculi de numero boum quos habebat, interroganti reſpondit, boues ſuos omnes per loca 40. ita eſſe diſpoſitos, vt quoties in primo loco continentur tres boues, toties in ſecundo contineantur 5. in tertio toties 7. in 4. toties 9. &c. Acceſſit Hercules ad primum locum, & reperit boues 30. Quot igitur boues habuit Augias, & quot boues in vltimo loco fuerunt? ſoluenda erit hoc modo. Quoniam in primo loco ſunt decies 3 boues, erunt in ſecundo loco decies 5. nimirum 50. & in tertio decies 7. nempe 70. & ſic deinceps, vt ſit progreſſio quædam Arithmetica, cuius primus terminus ſit 30. differentia vero 20. & numerus terminorum 40. Eliciendus ergo eſt primùm vltimus terminus per regulam, hoc modo. Ex 40. numero terminorum abijciatur 1. & reliquus numerus 39. per 20. differentiam multiplicetur, productoque numero 780. primus terminus 30. adijciatur. Fiet enim vltimus terminus, ſiue quadrageſimus, 810. atque tot boues fuerunt in vltimo loco.

Deinde vero ex hoc vltimo termino inuento & ex primo dato, vnà cum numero terminorũ eruenda per primam regulam ſumma totius progreſſionis, etiamſi non habeamus intermedios omnes terminos, hoc modo. Primus terminus 30. vltimo termino 810. adijciatur compoſitusque numerus 840. per 20. hoc eſt, per dimidium numeri terminorum, multiplicetur. Productus namque numerus 16800. eſt ſumma totius progreſſionis, atque adeo numerus boum Augiæ. Vt autem videas, quot boues in ſingulis locis fuerint, atque adeo in vltimo loco fuiſſe 810. appoſuimus hic totam progreſſionem.

30. 50. 70. 90 110.130.150.170.190 210 230 250 270.290 310 330 350 370.390 410.
430.450 470.490.510.530.550.570.590.610.630 650 670 690.710 730 750 770.790 810.

Quæſtio de ducibus militia.

Similis erit quæſtio, ſi quis ita dicat. Imperator ſtrenuis ducibus numero 20. diſtribuit pecuniam in direptione vrbis inuentam, hac lege, vt ei, qui vltimus murum hoſtilem tranſcẽderat, daret 100. aur. penultimo 130. antepenultimo 160. & ita deinceps codẽ modo progrediẽdo. Quanta ergo fuit ea ſumma pecuniæ, & quantum,

Digitized by Google

qui primus murum tranſcendit,accepit ? Si namque ex 20.numero terminorum(tot enim ſunt termini in illa progreſſione, quot ſunt duces.) auferas 1.& reliquum numerum 19.multiplices per 30.differentiã progreſſionis,productoque nnmero 570.adiicias primum numerum, nempe 100.efficies 670. pro vltimo progreſſionis termino: atque tot aureos habuit primus dux. Inuento autem vltimo termino,ſi ei addatur primus, nimirum 100.vt fiant 770.atque hic numerus per 10.dimidium numeri terminorum multiplicetur,fiet ſumma omnium terminorum 7700. Tanta ergo fuit ſumma pecuniæ diſtributæ. Tota vero progreſſio ita ſe habet.

100.130.160.190.220.250.280.310.340.370. 400.430.460.490.520.550.580 610.640.670.

PROGRESSIONES GEOMETRICÆ.

CAPVT XXV.

Progreſſio Geometrica quid.

PROGRESSIO Geometrica eſt ſeries plurium nnmerorum ſe in eadem proportione ſuperantium, vt hic apparet.

1 2.4.8.16 32.64.128.256.512.1024.2048.&c.
1 3 9 27.81.243.729.2187.6561.19683 &c.
3 6.12.24 48.96.192.384.768.1536.&c.

Prima enim harum progreſſionum progreditur per proportionem duplam, ita vt qnilibet numerus ſit dnplo maior eo numero, qui eum proxime præcedit; Secunda vero per triplam, ita vt quilibet numerus ſit triplo maior eo, qui proxime eum antecedit; atque vtraque harum progreſſionum ab 1.incipit; tertia deniq; per duplam etiam proportionem progreditur. non tamen ab 1.ſed à 3.initium ſumit.

Geometrica progreſſio quo pacto continuetur. Denominator proportionis in progreſſione Geometrica quomodo inueniatur.

Continuatur quælibet progreſſio Geometrica; ſi per denominatorem proportionis numerus ille, poſt quem progreſſio extendenda eſt,multiplicetur. Vt ſit progreſſio hæc proportionis triplæ,4.12.36,continuanda ſit,multiplicabimus vltimum numerum 36.per 3 denominatorem proportionis, (quem quidem denominatorem inueniemus; ſi ſecundum numerum per primum diuidamus, vel quemuis alium per proxime minorem in eadem progreſſione.)efficiemuſque 108.Hunc iterum numerum per 3.multiplicabimus,producemuſque 324.& ita deinceps in infinitum.Sic etiam, ſi quis progreſſionem incipere velit à 7.& progredi per proportionem qnincuplam, cuius denominator eſt 5. multiplicanda erunt 7. per 5. vt fiant 35 pro ſecundo numero progreſſionis. Item 55.per 5.vt fiant 175.pro tertio numero,&c.

Pari ratione progreſſio Geometrica continuatur retrocedendo,ſi minus extremum per denominatorem diuidatur. Vt ſi progreſſio hæc 64.128.256 512. continuanda ſit verſus minores numeros,cum denominator proportionis ſit 2 diuidemus 64. per 2. faciemuſque 32. quæ rurſum partiemur per 2. inneniemuſq; 16.& ſic deinceps in infinitum. Vt in hoc exemplo apparet.

Progreſſio Geometrica decreſcit in infinitum.

512.256 128.64.32.16.8 4 2.1 .$\frac{1}{2}$.$\frac{1}{4}$.$\frac{1}{8}$.$\frac{1}{16}$.&c.

Et nunquam erit finis huius decrementi in progreſſione Geometrica. Sic quoque, ſi quis progreſſionem inchoare velit à 100. & progredi verſus vnitatem per proportionem ſeſquialteram, cnius denominator eſt $1\frac{1}{2}$. diuidemus 100.per $1\frac{1}{2}$ vt habeamus $66\frac{2}{3}$. Item $66\frac{2}{3}$.per $1\frac{1}{2}$.vt habeamus $44\frac{4}{9}$.&c.

Proprietas progreſſionis Geometricæ trium terminorũ.

Proprium eſt progreſſionis Geometricæ trium numerorũ, vt numerus qui ex primo numero in tertium producitur,æqualis ſit numero,qui ex medio fit in ſeipſum multiplicato. Vt hic apparet, 3 9 27.demonſtraturque ab Euclide lib.7.propoſ 20.

Proprietas progreſſionis Geometricæ quatuor terminorum.

Progreſſionis vero Geometricæ quatuor numerorum proprium eſt, vt nnmerus qui ex multiplicatione primi numeri in quartũm fit æqualis ſit numero,qui ex ſecundo in tertium procreatur. Vt hic vides, 2. 6. 18 54. demonſtraturque ab Euclide lib.7.propoſ.19. Atque hoc non ſolum eſt in quatuor numeris continue proportionalibus .quales ſunt quatuor numeri in dato exemplo, ſed etiam in quatuor,qui non ſunt continue proportionales,dummodo eadem ſit proportio ſecundi ad primum, quæ quarti ad tertium. Vt hic cernis, 3 6 10.20.

Proprietas progreſſionis Geometricæ quotcunq; terminorum, ſi numerus terminorũ ſit impar.

Ex his proprietatibus colligitur, in omni progreſſione Geometrica, cuius numerus terminorum eſt impar,numerum, qui fit ex multiplicatione extremorum inter ſe, æqualem eſſe numero, qui ex multiplicatione duorum numerorum quorumlibet ab extremis æqualiter diſtantium producitur, necnon numero, qui ex medio in ſeipſum fit. Veluti hic apparet.

3.6 12.24 48 96.192.384 768.

Cum enim quatuor hi nnmeri 3 6.384 768 habeant eandem proportionem, licet non continnam,erit, ex iis,quæ proxime diximus,numerus,qui fit ex 3.in 768. æqualis ei,qui fit ex 6.in 384. Eadem ratione numerus, qui fit ex 6. in 384. æqualis erit ei, qui ex 12.in 192. producitur, quod hi quatuor numeri 6.12.192.384. eandem habeant proportionem, licet non continuatam; & ita de reliquis, ſi plures ſint, donec ad tres medios 24 48. 96. perueniamus; qui cum eandem habeant proportionem, erit, per ea,quæ paulo ante docuimus, numerus productus ex primo in tertium æqualis numero, qui ex medio in ſeipſum giguitur. Eademque ratio eſt de omnibus aliis huiuſmodi progreſſionibus Geometricis.

Proprietas progreſſionis Geometricæ quotcunq; terminorum, ſi numerus terminorũ ſit par.

Ex poſteriore quoq; proprietate efficitur, in omni progreſſione Geometrica, cuius nnmerus terminorum eſt par,numerum ex multiplicatione extremorum productum æqualem eſſe numero.qui ex multiplicatione duorum quorumlibet numerorum ab extremis æqualiter diſtantium producitur. Vt hic manifeſtum eſt.

3.6.12.24.48.96.192.384.

Quod probabimus,vt prius, hoc dempto, quod poſtremo loco ſumendi ſunt quatuor numeri medii 12. 24.48.96,non autem tres tantum, vt prius; quia hic non eſt vnicus numerus medius,ſed duo. Sequuntur iam regulæ ad progreſſiones Geometricas ſpectantes.

REGVLA I.

Summa cuiuſcunq; progreſſionis Geometricæ quo pacto inueniatur.

SI in quauis progreſſione Geometrica notus fuerit denominator proportionis, vna cum minore, & maiore extremo, perueniemus in cognitionem ſummæ omnium terminorum, hac ratione. Detrahatur primus terminus ab vltimo,& reliquus numerus per numerum,qui vna vnitate minor ſit,quam denominator,diuidatur. Si enim Quotienti vltimus terminus, ſiue maius extremum adiiciatur,componetur ſumma omnium terminorum. Vt in hac progreſſione.

3.12.

Digitized by Google

3.12.48.192.768.3072.12288. 49152.

Demptis 3. ex 49152. remanent 49149. Et quoniam denominator proportionis quadruplæ, quam habent numeri datæ progreſſionis, eſt 4. diuidemus 49149. per 3. & Quotienti 16383. vltimum terminum, ſiue maius extremum 49152. adijciemus, conficiemuſque ſummam totius progreſſionis 65535. Item hic.

4.6.9.13$\frac{1}{2}$.20$\frac{1}{4}$.30$\frac{3}{8}$.45$\frac{9}{16}$.

Subtractis 4. ex 45$\frac{9}{16}$. relinquuntur 41$\frac{9}{16}$ quæ ſi diuidantur per $\frac{1}{2}$. (Eſt enim 1$\frac{1}{2}$. denominator proportionis ſeſquialteræ, quam habent numeri huius progreſſionis, ablata autem 1. remanet $\frac{1}{2}$.) fiet Quotiens 83$\frac{1}{8}$. cui ſi addatur vltimus numerus, ſiue maius extremũ 45$\frac{9}{16}$. fiet ſumma totius progreſſionis 128$\frac{11}{16}$. atque eodem modo ſummam cuiuſcunque progreſſionis Geometricæ inueniemus.

Itaque, vt vides, ſatis eſt, vt cognoſcatur primus terminus, & vltimus, vnà cum denominatore proportionis, ad inueniendam ſummam totius progreſſionis, etiamſi intermedij termini ignorentur. Quo pacto autem in cognitionem vltimi termini peruenire poſſimus, licet non continuetur tota progreſſio, ſequenti regula explicabimus.

In progreſſione autem Geometrica duplæ proportionis, cuius initium eſt 1. facillimo negotio ſumma totius progreſſionis quotcũque terminorum reperietur, ſi vltimus terminus duplicetur, & à duplo abijciatur 1. Vt hic.

Particularis inuẽtio ſumma progreſſionis proportionis duplæ, cuius initium eſt 1.

1.2.4.8.16.32.64.128 256 512.

Si vltimus terminus 512. duplicetur, & à duplo 1024 reijciatur 1 habebitur ſumma totius progreſſionis 1023.

Ex quo fit, quemlibet numerum, in huiuſmodi progreſſione, abiecta prius vnitate, eſſe ſummam omnium numerorum antecedentium, cum quilibet numerus ſit proxime præcedentis numeri duplus.

In progreſſione proportionis duplæ incipiente ab 1. quilibet numerus, abiecta prius vnitate, eſt ſumma omnium antecedentium numerorũ.

REGVLA II.

IN omni progreſſione Geometrica, quæ ab 1. incipit, quiuis numerus ſeipſum multiplicans gignit numerum, qui ab eo abeſt tanto interuallo, quanto ipſe ab vnitate diſtat: quiuis autem numerus alium maiorem multiplicans producit numerum, qui à maiore tanto interuallo diſtat, quanto ipſe minor ab vnitate abeſt. Hæc regula clariſſimè ex propoſ. 11. lib. 8. Euclidis colligitur, vt in ſcholio eiuſdem propoſ. declarauimus. Exempli gratia

1.2.4 8.16.32.64.128.256 512.1024

In hac progreſſione duplę proportionis, quæ ſequitur, ſi numerus 16. qui quintũ locũ ab vnitate occupat, in ſeipſum multiplicetur, producetur numerus 256. qui quintum etiam locum à numero 16. occupat, nempe nonũ. Sic quoque ſi numerus 32. ſextum locum ab vnitate occupans ſeipſum multiplicet, procreabitur numerus 1024. qui ſextum etiam locum à numero 32. occupat, nimirum vndecimum. Ita etiam numerus 8. quarti loci multiplicans numerum 64. producit numerum 512. quarto loco à numero 64. reponendum.

Itaq; hanc licebit regulam colligere. Si in progreſſione Geometrica cuius initium eſt 1. numerus aliquis quẽcunque locum occupans ſeipſum multiplicet, procreabitur numerus in duplo maiore loco minus vna vnitate, quàm ſit locus numeri multiplicantis, ponendus. Vt ſi numerus ſeipſum multiplicans occupet tertium locum, gignetur numerus in quinto loco reponendus: ſi occupet ſeptimum locum, producetur numerus in tertiodecimo loco ponẽdus &c. Id quod aperte oſtenſum eſt in progreſſione ſuperiori proportionis duplæ, idemq; clariſſime in hac altera progreſſione proportionis quadruplæ apparet.

Si in progreſſione Geometrica incipiente ab 1. numerus aliquis ſeipſum, vel alium numerũ multiplicet, quem locũ numerus productus occupet.

1.4.16.64.256.1024.4096.16384.65536.

Nam ſi numerus 64. in quarto loco poſitus, ſeipſum multiplicet, gignetur numerus 4096. in ſeptimo loco ponendus. Ita quoque numerus 256. quintum occupans locum ſeipſum multiplicãs producit numerum 65536. in nono loco reponendum.

Vt autem facilius ſciatur, quo in loco quilibet numerus productus ſit collocandus, ſubſcribenda eſt progreſſioni Geometricæ progreſſio naturalis numerorum hoc ordine. Sub 1. hoc eſt, ſub primo numero, ſcribatur 0. ſub ſecundo numero ponatur 1. ſub tertio 2. ſub quarto 3. & ita deinceps, vt in hac progreſſione proportionis duplæ factum eſt.

1.2.4.8.16.32.64.128.256.512.1024.2048.
0.1.2.3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11.

Nam quilibet numerus grogreſſionis Geometricæ ſeipſum multiplicans producit numerum ſupra illum numerum progreſſionis naturalis numerorum collocandum, qui duplus eſt illius. qui ſubſcribitur numero ſeipſum multiplicanti: quilibet vero numerus alium multiplicans procreat numerum ſupra illum numerũ progreſſionis naturalis numerorum reponendum, qui componitur ex duobus numeris, qui numeris multiplicantibus ſubſcribuntur. Vt ſi numerus 32. in ſe multiplicetur, procreabitur numerus 1024. ſupra 10. collocandus, quòd numerus 10. duplus ſit numeri 5. qui numero 32. ſubſcribitur. Item ex multiplicatione 8. in 256. producetur numerus 2048. ſupra 11. reponendus, ꝙ numerus 11. cõponatur ex 3. & 8. qui numeri ſub 8. & 256. ſcripti ſunt.

Quilibet numerus in progreſſione Geometrica incipiente ab 1. ſeipſum multiplicans produ cit numerũ in duplo maiore loco minus vnitate, & numerus multiplicans, ponendum.

Et quoniam, quot vnitates ſunt in quolibet numero progreſſionis naturalis numerorum, talem locum vno amplius occupat in progreſſione Geometrica numerus illi ſuprapoſitus, vt in ſuperiore exemplo perſpicue apparet; facile inueniemus nnmerũ cuiuſq; loci in progreſſione Geometrica, etiamſi non ſcribamus oẽs numeros intermedios. Sit enim inueniẽdus, verbi gratia, numerus in vigeſimo loco ſupradictę progreſſionis collocãdus. Primũ ſcribo quatuor, aut quinq;, vel plures numeros progreſſionis, vnà cũ progreſſione naturali, vt hic vides.

Progreſſio naturalis numerorũ quo pacto indicet, quo in loco quilibet numerus productus collocandus ſit in progreſſione Geometrica incipiente ab 1.

1.2.4.8.16.32.64.
0.1.2 3. 4. 5. 6.

Deinde multiplico v.g. 8. in ſe, facioq; 64. numerum ſeptimi loci, ſub quo nimirum poſitus eſt numerus 6. vna vnitate minor numero locorum; quòd numerus 3. ſub 8. duplicatus faciat 6. Quòd ſi multiplicemus 8. in 64. faciemus 512. numerum decimi loci, ſub quo nimirũ ſcriberetur numerus 9. vna vnitate minor numero locorũ, quòd numeri 3. & 6. ſub quarto & ſeptimo loco faciant 9. Rurſus ſi 512. numerum decimi loci, ſub quo ponitur numerus 9 multiplicemus in ſe, producemus numerũ 262144. in loco decimonono ſcribẽdum, ſub quo nimirum poneretur numerus 18. vna vnitate minor numero locorum, propterea quòd numerus 9. ſub decimo loco duplicatus facit 18. Iã vero quia ex 18. qui numerus ſub decimonono loco ſcribitur, & ex 1. ſub ſecundo loco poſita

Quo pacto numerus cuiuſcunque loci in progreſſione Geometrica incipiente ab 1. inueſtigetur ſine intermedijs.

ſita fiunt 19. ſi multiplicemus numerum 2.ſupra 1.poſitum per numerum 262144.ſupra 18. poſitum, conficiemus numerum 524288.in viceſimo loco,ſub quo videlicet numerus 19.ponitur ſcribendum.

Rurſus, ſi quis velit in eadem progreſſione numerũ in decimooctauo loco reponendum, multiplicabimus numerum 32.ſub quo ponuntur 5.in ſeipſum,producemuſque numerum 1024.in vndecimo loco ſcribendum, ſub quo numero ponitur numerus 10.qui duplus eſt numeri 5. Et quoniam ex 10. qui numerus ſub vndecimo loco ponitur, & ex 6. qui numerus ponitur ſub ſeptimo loco, fiunt 16. qui numerus ſub loco decimo ſeptimo ſcribitur,ſi numerum 64.ſeptimi loci per numerum 1024. vndecimi loci multiplicemus, procreabimus numerum 65536.loci decimiſeptimi. Tandem quia ex 16. qui numerus ſub decimoſeptimo loco ponitur, & ex 1. quæ ſub ſecundo loco ponitur, fit numerus 17.qui ſub decimooctauo loco ſcribitur;ſi multiplicemus numerum inuentum 65536.decimiſeptimi loci, per numerum 2.ſecundi loci, gignemus numerum 131072. in loco octauo-decimo ſcribendum,ſub quo videlicet ponitur numerus 17.

Quæ dicta ſunt in hac regula de progreſſione Geometrica incipiente ab 1. vera etiã eſſe de progreſſione Geometrica incipiẽte non ab 1. ſed ab alio numero.

Hæc omnia quadrant etiam in progreſſionem quamcunque Geometricam nõ ab 1. ſed à quouis alio numero incipientem,dummodo quemlibet numerum ex multiplicatione productum diuidamus per primum numerũ progreſſionis. Quotiens enim erit numerus quæſitus. Vt in hac progreſſione proportionis duplę apparet.

5. 10. 20. 40. 80. 160. 320. 640. 1280. 2560. 5120.
0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10.

Nam ſi numerus 80.quintũ locum à primo numero occupans in ſeipſum multiplicetur, procreabitur numerus 6400.quo diuiſo per primum numerũ, vtpote per 5.fiet Quotiens 1280.in quinto loco à numero 80.collocandus, nempe in nono loco,ſub quo ponitur numerus 8. qui duplus eſt numeri 4.ſub numero 80. multiplicante poſiti. Vbi vides, numerum 80. quinti loci,cum ſeipſum multiplicat, producere numerum, quo diuiſo per primum numerum progreſſionis,fit Quotiens 1280. in duplo maiore loco, minus vnitate, quàm ſit locus numeri multiplicantis, reponendus Sic etiam, ſi numerus 40. quarti loci multiplicet numerum 640. & productus numerus 25600. per primum numerum 5. diuidatur, fiet Quotiens 5120. quarto loco à numero 640. ſcribendus, nempe loco vndecimo, ſub quo ponitur numerus 10. conflatus ex 3. ſub 40. & ex 7. ſub 640. Quod ſi numerum 1280.multiplicemus per 5120. procreabimus numerum 6553600. quo diuiſo per primum numerum 5. reperiemus Quotientem 131720.reponendum in loco decimonono, qui nimirum vnitate ſuperat numerum 18. conflatum ex numeris 8. & 10. poſitis ſub numeris multiplicantibus.

Ita quoque (vt in alia progreſſione exemplum etiam ponamus.) in hac progreſſione proportionis ſeptuplæ

2. 14. 98. 686. 4802. 33614. 235298. 1647086. 11529602. 80707214.
0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.

Quo pacto numerum cuiuſcunq; loci in progreſſione Geometrica, incipiente à quouis numero inueſtiget ſine inter medijs numeris.

ſi numerus 4802. quintum locum à primo numero occupans ſeipſum multiplicet, procreabitur numerus 23059204. quo diuiſo per primum numerum , nempe per 2. fiet Quotiens 11529602.in quinto loco à numero 4802.locandus,in nouo videlicet loco ſub quo numerus 8.ponitur. Sic etiam, ſi numerus 98.tertii loci multiplicet numerum 1647086.& productus numerus 161414428. per primum numerum 2. diuidatur, fiet Quotiens 80707214.tertio loco à numero 1647086. ſcribendus, nimirum loco decimo,ſub quo ponitur numerus 9. conflatus ex 2.ſub 98.& ex 7.ſub 1647086.&c.

Ex his facile inueniemus numerum cuiuſq; loci. Si namq; in priori progreſſione inueniendus ſit numerus triceſimo loco ponendus, multiplicabimus numerum 5120.in ſe, producemuſq; numerum 26214400.quo diuiſo per 5. fiet Quotiens 5242880. ponendus loco viceſimo primo, qui videlicet vnitate ſuperat numerum 20.qui duplus eſt numeri 10.ſub 5120 poſiti, poniturq; ſub viceſimo primo loco. Et quoniam 20. & 9. faciunt 29.ſi numerum 5242880.viceſimi primi loci,ſub quo numerus 20.ponitur, multiplicemus per 2560. ſub quo numerus 9.ſcribitur,efficiemus numerum,quo diuiſo per 5.fiet Quotiens 2684354560.locandus in loco triceſimo.qui nimirum vnitate ſuperat conflatum illum numerum 29.

Vides igitur, nos reperire poſſe extremum numerum cuiuslibet progreſſionis Geometricæ, etiam ſi nõ ſcribantur omnes numeri intermedij illius progreſſionis: pluribus tamen operationibus, quàm ſupra in ſecunda regula progreſſionum Arithmeticarum adhibuimus.

Summa quotcunq; terminorũ progreſſionis Geometricæ proportionis duplæ ab 1. incipientis, addita prius vnitate, ſeipsã multiplicãs producit numerũ, qui, abiecta prius vnitate, ſumma eſt duplo plurium terminorum.

Quoniam vero in prima regula diximus, numerum quemcunq; in progreſſione Geometrica proportionis duplæ incipiente ab 1. abiecta prius vnitate, ſummam eſſe omnium antecedentium numerorum ; in hac autem ſecunda regula docuimus, quemlibet numerum progreſſionis Geometricæ ab 1.incipientis, ſi ſeipſum multiplicet, gignere numerum in duplo maiore loco, minus vnitate, quam ſit locus numeri ſe multiplicantis, ponendum : fit ; vt ſi ſummæ quotcunq; numerorum progreſſionis Geometricæ proportionis duplæ ab 1.incipientis addatur 1. & aggregatum in ſeipſum multiplicetur, producatur ſumma, abiecta prius vnitate, duplo plurium numerorum eiuſdem progreſſionis: quia prior ſumma, addita vnitate, conſtituit proxime ſequentem numerum in eadem progreſſione, qui numerus ſeipſum multiplicans producit numerum in duplo maiore loco, minus vnitate, quam ſit locus numeri multiplicantis, reponendum ; ac proinde, abiecta vnitate, idem numerus ſumma erit omnium antecedentium numerorum, qui quidem duplo plures ſunt, quam priores, quorum ſumma accepta fuit. Exempli gratia, ſumma ſeptem terminorum, addita vnitate, conſtituit octauum terminum, qui multiplicatus in ſe producit terminum decimumquintum, nempe numerum in duplo maiore loco, quam ſit octauus, minus vnitate, ponendum ; qui quidem, abiecta vnitate, ſumma erit quatuordecim antecedentium terminorum, nimirum duplo plurium, quam ſeptem, quorum ſumma accepta fuit. Eademq; ratio eſt de cæteris.

Quo pacto facile inueniatur ſumma 64. locorum progreſſionis Geometricæ duplæ proportionis ab 1. incipientis.

Itaq; ſi quis breuiter cupiat inuenire ſummam 64.terminorum progreſſionis Geometricæ proportionis duplæ ab 1.incipientis, quot nimirum loca ſunt in ludo latrunculorum, quem ſcacchiorum ludum vocãt, accipienda erit primum ſumma horum quatuor terminorum 1.2.4.8.nempe 15. Deinde, addita vnitate, multiplicandum aggregatum 16.in ſe. Si enim ex numero producto 256. abijciatur 1.erit ſumma octo terminorum 255. Rurſus, addita 1. multiplicandum aggregatum 256. in ſe, vt fiant 65536. ac proinde ſumma 16. terminorum 65535. Quod ſi rurſus, addita 1.aggregatum 65536.in ſe multiplicetur. procreabitur numerus 4294967296.qui,

abiecta

abiecta prius vnitate, dabit ſummam 32. terminorũ. Poſtremo ſi 4294967296. in ſe multiplicentur, fiet numerus 18446744073709551616. qui, abiecta prius vnitate, dabit ſummam 64. terminorum. Atque tot quatrini requiruntur, vt quis replere poſſit omnia 64. loca dicti ludi latrunculorum, ponendo 1. quatrinum in primo loco; 2. quatr. in ſecundo; 4. in tertio, 8. in quarto, & ſic deinceps progrediendo per duplam proportionem: qui efficiunt aureos (tribuendo ſingulis aureis 400. quatrinos) 46116860184273879$\frac{3}{25}$. quanta pecunia vix in toto vno regno, vel etiam pluribus, aut toto mundo, reperitur; quod multis incredibile videtur.

Quanta pecunia requiratur, vt impleãtur 64. loca ludi latrunculorum, ita vt in primo loco ponatur 1. quatr. in ſecundo 2. in tertio 4. & ita deinceps progrediendo per proportionẽ duplam.

Immo vix tot grana frumenti in vniuerſo orbe terrarum exiſtunt, quot in dictis 64 locis continerentur, ſi in primo ponitur 1. granum, in ſecundo 2. in tertio 4. &c. quod ita perſpicuum faciemus, licet multis omnino incredibile videatur. Secundum Medicos, & pharmacopolas, grana 60. efficiunt 1. drachmam, id eſt $\frac{1}{8}$. vnius vnciæ; ac proinde 480. grana 1. vnciam & 5760. grana 1. libram. Cum ergo 600. libræ communiter conſtituant 1. menſuram, quam Romani Rubium dicunt, & quę parum ab illa menſura differt, quam Nautæ in Italia Salmam appellant; conſtabit 1. Rubius granis 3456000. Quare ſi grana 18446744073709551615. quæ in dictis 64. locis continentur, per grana 3456000. vnum Rubiũ conſtituentia diuidantur, prodibunt Rubij 5337599558365. & paulo amplius: quot vix in toto terrarum orbe arbitror ſimul reperiri. Nam cum communiter nauis oneraria ferat Rubios 3000. requirerentur, vt minimum, ad frumentum illud portãdum naues 1779199852. ad quas onerandas vix ſatis eſſe totius mundi frumẽtum, facile ſibi quiuis perſuadebit. Quod ſi in toto mundo vix ſunt 18446744073709551615. grana frumenti, multo minus tot quatrini exiſtent, etiamſi omnes monetæ in quatrinos reſoluerentur: cum nulli dubium ſit, maiorem in mundo frumenti eſſe copiam, quàm pecuniæ. Quod etiam hinc colligi poteſt.

Quot grana frumẽti conſtituant vnum Rubium.

Quot naues requirantur ad ferendum frumẽtum in 64. locis ludi latrunculorum poſitum.

Quoniam ducatus aureus Romæ æſtimatur baiochis 115. ſiue quatrinis 460. ſi quatrini 18446744073709551615. in dictis locis 64 contenti diuidantur per baiochos 115 hoc eſt, per quatrinos 460. efficientur ducati aurei 40101617551542503 & paulo amplius. Quia vero 100 ducati aurei faciunt 1 libram, continebunt 1800000. libræ aureos ducatos 180000000. quot nimirum commode vna nauis oneraria ferre poteſt, cum rubij frumẽti 3000. vnam nauem onerantes faciant libras 1800000. quod pondus multis partibus ſuperat Obeliſcum illum immenſum, qui Romæ iuxta templum S. Petri viſitur, quippe cum hic, vt periti affirmarunt, contineat libras duntaxat 1180060. quem tamen vix ferri poſſe ab vna naue, facile ſibi perſuadebit, qui eius molem diligentius intueatur. Quod ideo dixerim, ne quis putet, parũ nos vni naui tribuere, cum ei concedimus libras 1800000. hoc eſt rubios frumenti 3000. ſiue aureos ducatos 180000000. Ex quo fit, ad aureos ducatos 40101617551542503. vehendos neceſſarias eſſe naues 222786764. & amplius: quis autem dubitet, totius mundi pecuniam etiamſi ad aureos ducatos reducatur, tantam non eſſe, vt tot naues oneret?

Quot naues requirantur ad ferendã pecuniam in 64. locis ludi latrunculorum poſitã, ſi ad aureos reduceretur.

Quod ſi quis in primo loco ponat 1. quatrinum, vel granum; 2 in ſecundo; 6. in tertio; 18. in quarto; 54. in quinto, & ſic deinceps, ita vt vnitates in quolibet loco poſitæ ſint duplo plures quàm in omnibus præcedentibus locis ſimul: quod tum demum fiet, ſi vnitates ſecundi loci triplices, & productum numerum rurſus triplices, atq; ita deinceps, vt in hac progreſſione manifeſtum eſt, & ita oſtendi poteſt. Quoniam vnitates cuiuslibet loci du-

1.2.6.18 54 162.487.1458.4374.13122.&c.

plæ ſunt vnitatum in omnibus præcedentibus locis poſitarum, continebunt dictæ vnitates bis vnitates proxime antecedentis loci, & vnitates omnium quoque aliorum locorum præcedentium bis. Cum ergo vnitates proxime antecedentis loci bis contineant vnitates omnium locorum antecedentium, comprehendent vnitates proxime antecedentis loci ter. Verbi gratia, quoniam vnitates 18. in quarto loco duplæ ſunt harum vnitatum 1. 2. 6. continebũt dictæ vnitates 18. bis vnitates 6. ac præterea vnitates 1. 2. bis. Quare cum vnitates 6. duplæ quoque ſint vnitatum 1. 2. continebunt eædem vnitates 18. bis vnitates 6. & inſuper ſemel, nempe vnitates quoque 1. 2. bis ac proinde ſi triplicentur vnitates 6. producentur vnitates 18. ſequentis loci, quæ triplæ quidem ſunt vnitatum proxime antecedentis loci, duplæ vero omnium præcedentium locorum. Eademque ratio eſt in cæteris. Quod ſi quis, inquam hac ratione ponat quatrinos, vel grana in dictis 64. locis, reperietur ſumma multo maior, quàm prius.

In progreſſione cuius primus terminus eſt 1. ſecundus 2. tertius vero ſecundi triplus, & ſimiliter quartus tertij triplus, & ita deinceps: quilibet terminus duplus eſt omniũ præcedentium terminorum.

Hoc autem modo ſumma elicietur, etiamſi non ponãtur omnes numeri illius progreſſionis. Quoniã omnes numeri progrediuntur per proportionem triplam, initio facto à ſecundo loco; inueſtigandus erit numerus loci ſexageſimi tertij in proportione tripla, cuius principium eſt 2. Hic enim numerus inuẽtus occupabit locum 64. in ludo latrunculorum, atq; eo cognito reperietur ſumma omnium 63. locorum, vt in prima regula progreſſionum Geometricarum docuimus; cui ſi adijciatur 1. in primo loco dicti ludi poſita, habebitur ſumma omniũ 64. locorum. Exempli gratia. Poſitis his quinque terminis, 2.6.18 54.162. ſi quintus in ſe multiplicetur, productuſque per primum diuidatur, producetur numerus 13122. nono loco ponendus. nempe in duplo maiore loco, minus vnitate quam eſt locus numeri in ſe multiplicati, vt in ſecũda hac regula docuimus. Quod ſi rurſum numerus 13122. noni loci in ſe multiplicetur, productusq; per primum hoc eſt, per 2. diuidatur, gignetur numerus 86093442. ſeptimodecimo loco ponendus: qui ſi rurſum in ſeipſum multiplicetur, productusq; per primum diuidatur fiet numerus hic ſequens 3706040377703682. triceſimo tertio loco ponendus: qui rurſum ſi multiplicetur in ſe, productusq; diuidatur per primum, procreabitur numerus 68673676405850249693156981785 62. loco ſexageſimo quinto locandus. Nos autem quærimus numerum ſexageſimi tertij loci, ad quem inuentus numerus ſexageſimi quinti loci proportionem habet triplæ duplicatam hoc eſt, nonculplam, ex defin. 10. lib. 5. Eucl. propterea quòd numeri poſiti in loco ſexageſimo tertio, ſexageſimo quarto, & ſexageſimo quinto continuam proportionem triplam habent. Quare ſi numerum inuentum per 9. partiamur, reperiemus numerum hunc ſequentem 7630408489538916632572997976 18. loco ſexageſimo tertio reponendum.

Qua arte inueniatur ſumma 64. terminorũ ab 1. incipientium atque ita progredientiũ, vt quilibet duplus ſit omniũ antecedentium terminorũ.

Detracto iam primo numero 2. & reſiduo diuiſo per numerum vnitate minorem denominatore proportionis triplæ, nempe per 2. Quotiente denique ad numerum inuentum ſexageſimi tertij loci adiecto, fiet ſumma omnium ſexagintatriũ locorum, cui ſi apponatur 1. in primo loco ludi latrunculorum poſita, componetur ſumma omnium 64. locorum dicti ludi hæc ſequens.

11445612734308374948859496964 27.

Hanc eandem ſummam ita quoque inueniemus. Multiplicetur ſumma trium primorũ locorum ludi latrunculorum,

Alia ratio inueniendi ſummã 64. terminorũ ab 1. incipientium atque ita progredientiũ, vt quilibet omniũ antecedentiũ terminorũ ſit duplus.

culorum, quæ eſt 9. in ſe fietque ſumma 81. duplo plurium locorum minus vno, hoc eſt, quinque locorum: quæ ſi rurſus in ſe multiplicetur, fiet eadem ratione ſumma 6561. nouem locorum, nempe duplo plurium, quam quinque minus vno: quæ rurſus multiplicata in ſe producet ſummam 43046721. ſeptemdecim locorum: Hæc iterum in ſe multiplicata faciet hanc ſummam 1853020188851841. trigintatrium locorum: quæ in ſe rurſum

3433683820292512484657849089281.

multiplicata, gignet ſummam ſexagintaquinque locorum. Nos autem quærimus ſummam ſexaginta quatuor tantum locorum. quæ in ſumma inuenta ter continetur. Nam ſumma quotcunq; locorum tripla eſt ſummæ omnium locorũ præcedẽtium; propterea quòd numerus vltimi loci, nempe (in dato exemplo) ſexageſimi quinti, duplus eſt omnium præcedentium locorum. Hinc enim fit, vt addita ſumma omnium præcedentium locorum ad numerum ſexageſimiquinti loci, fiat ſumma omniũ ſexagintaquinque locorũ, continens nimirũ ter ſummã præcedentium ſexaginta quatuor locorum. Quocirca diuiſa ſumma inuenta per 3. reperietur ſumma hæc ſexa-

11445612734308374948859496964 27.

ginta quatuor locorum ludi latruoculorum vt prius.

Quantum frumẽtum requiratur vt impleãtur 64. loca ludi latrunculorũ ita vt primo loco ponatur 1. granum, in ſecundo 2. in tertio 4. in quarto 18. & ita deinceps vt grana ſubſequentis loci ſint dupla omniũ granorũ in præcedentibus omnibus locis ſimul. Et quot naues neceſſaria ſint ad illud frumẽtum portandum.

Hæc omnia grana, ſi diuidantur per 3456000. quot vnum Rubium conſtituunt, efficient Rubios ſequentes 3311809240251265899554 25 $\frac{1427}{1728}$. ad quos vehẽdos, impoſitis 3000. Rubijs in quamlibet nauem, neceſſariæ ſunt naues numero 1103936413417088631 8 $\frac{70}{40}$. quæ 102714380. globos ex terra & aqua confectos contegerent. Ponimus enim ſupremam arcam vnius nauis æquiualere quadrato, cuius latus continet 70. palmos, quibus Mechanici, atq; architecti vtuntur. cũ plerunque longitudo nauis ſit 120. palmorum, latitudo autem 40. ſi ad parallelogrammum rectangulum redigeretur; atque adeo area ipſius contineat palmos quadratos 4800. cuius radix quadrata fere eſt 70. Cum ergo 5500 palmi, plus minus, conficiant vnum milliare, ac propterea palmi 133750000. milliaria 22500. quot in toto ambitu terræ continentur; ſi partiamur hos palmos per 70, hoc eſt, per latitudinem, longitudinemve vnius nauis quadratæ, reperiemus in toto ambitu terræ contineri naues 1910714. ſe inuicem tangentes. Eodem modo conficient palmi 39374500. totam terræ diametrum milliaria 7159 cõplectentem: quos palmos ſi rurſus per 70. partiamur, inueniemus in terræ diametro comprehendi naues ſe inuicem tangentes 562493. ferè. Multiplicantes autem naues 562493. diametri per 1910714. naues ambitus, faciemus naues 1074763250002. totam ſuperficiem terræ mariſque tegentes, vt ad finem primi cap. ſphæræ ſcripſimus: per quas ſi diuidamus illas ſuperiores 1103936413417088631 8. naues quæ ad frumẽtum aſportãdum requiruntur, deprehendemus globos ex terra marique cõfectos 102714380. & quidem omnes nauibus ad frumentum portandum neceſſarijs contectos: quæ ſumma frumenti multis partibus ſuperat frumentum totius orbis, cum ne vnam quidem terram operire poſſint naues in quibus totius orbis frumentum continentur, vt patet.

Quot naues totam ſuperficiem terræ & maris operirent ſi ſe mutuo tangerent.

Alia ratione incomprehẽſibilem hanc multitudinem frumenti explicabimus, ſi nimirum inquiramus, quot globi, ſiue ſphæræ ex illis granis, quæ poſteriori modo in 64 locis ludi latrunculorum continentur, confici poſſint, quarum ſphærarum quælibet globo terreſtri ſit æqualis: quod ita fiet. Quoniam grana frumenti rotunda non ſunt, ſumemus pro ipſis grana coryandri, quæ rotunda ſunt, licet paulo minora ſint, quam frumenti grana. Ita enim fiet, vt plures globi conficiantur ex granis frumenti, quàm ex granis coryandri. cum pauciora illorum requirantur, quam horum, ad vnum globum conſtituendum, ſitque tanta multitudo illorum, quanta horum, in 64. locis ludi latrunculorum. Quia igitur 18. grana coryandri (vt experientia deprehenſum eſt à me) cõſtituunt quartam partem pedis Geometrici, & paulo amplius, fit, vt rectè dicere poſſimus, 70. grana ſecundum longitudinem diſpoſita explere longitudinem vnius pedis. Quare cum ſphæræ triplicatam ſuarum diametrorũ proportionem habeant, vt Euclides demonſtrauit lib. 12. propoſ. 18. continebuntur in ſphæra, cuius diameter pedi Geometrico æqualis eſt grana coryandri 343000. cum hic numerus ad 1. proportionem habeat triplicatam eius, quam habet pes Geometricus 70 granorum ad 1. vt hic apparet.

1. 70. 4900. 343000.

Quot globi ex terra ac mari confecti tegerentur à nauibus, quæ neceſſaria ſũt ad proximè dictum frumentũ portãdum.

Rurſus quia 5000. pedes Geometrici vnum milliare conſtituunt. habebit eadem ratione ſphæra, cuius diameter vni milliario, æqualis ſit ad ſphæram, cuius diameter æqualis ſit vni pedi, proportionem, quam ad 1 habet hic numerus 125000000000. cum numerus hic ad 1. habeat proportionem triplicatam eius quam 5000. pedes habent ad 1. vt hic vides.

1. 5000. 25000000. 125000000000.

Quare cum ſphæra habens diametrum pedalem contineat grana coryandri 343000. exiſtent in ſphæra, cuius diameter vni milliario ſit æqualis, grana 42875000000000000.

Quot globi toti terræ æquales cõſtituerent frumẽtum in 64. locis proximè dictis contentum.

Deinde quoniam diameter terræ complectitur milliaria 7159. ponemus nos eam continere 7200. milliaria. Quo poſito, habebit tota ſphæra terræ ad ſphærã, cuius diameter vni milliari eſt æqualis, proportionem, quam hic numerus 373248000000. ad 1. propterea quod numerus hic ad 1. proportionem habet triplicatam eius, quam habent 7200. milliaria totius diametri terræ ad 1. milliare vt hic manifeſtum eſt.

1. 7200 51840000 373248000000.

Quocirca cum ſphæra diametri vnius milliarij comprehendat grana 42875000000000000. complectetur totus globus terræ grana numero 16003008000000000000000000 Si igitur per hunc numerum partiamur numerum granorum omnium in illis 64 locis ludi latrunculorum cõtentum, efficiemus globos terræ 71 $\frac{1}{2}$. & amplius. Tot ergo ſphæræ, quarum quælibet toti terræ ſit æqualis, requiruntur ex granis coryandri compoſitæ, vt dicta 64 loca repleri poſſint eo modo quo diximus, quod omnium fidem ſuperare videtur.

Quot naues ferrent aureos ducatos ex quatrinis, qui replerent 64. loca eo modo quo de granis frumenti dictum eſt.

Iam vero ſi grana illa ſint quatrini efficiemus ex illis aureos ducatos ſequentes numero.

24881766813713858584477167 31.

Quoniam autem ſupra diximus, vnam nauem commode ferre ducatos aureos 18000000. ſi illos per hos diuidamus, deprehendemus naues has 1382320378539658810324. neceſſarias eſſe, vt dictam pecuniam ferrent, quæ tot ſuperficies terræ mariſque contegerent, quot ſunt in hoc numero 1286162676. vnitates; propterea quòd ſupra poſuimus 1074763250002. naues vnam ſuperficiem terræ ac maris contegere. Quæ ſumma pecuniæ omnem captum ingenij humani excedit.

Et quot globos terræ ac maris dictæ naues tegerent,

Pari

Pari ratione, ſi quis optet ſummam 40. terminorum eiuſdem progreſſionis, accipienda primum erit ſumma horum 5. terminorum 1.2.4.8.16. nempe 31. Deinde, addita 1. multiplicandum aggregatum 32. in ſe, abiecta unum vnitate ex producto numero, fiet ſumma 10 terminorum 1023. Rurſus ſi aggregatum multiplicetur in ſe, & ex producto numero reijciatur 1. exurget ſumma 20. terminorum 1048575. Poſtremo, addita rurſus 1. ſi aggregatum in ſeipſum multiplicetur, & ex producto numero dematur 1. producetur ſumma 40. terminorum, videlicet 1099511627775. Atq; tot quatrinos reciperet Dux aliquis, qui 40. oppida ſua ea lege diuenderet, vt ei pro primo ſolueretur 1. quatrinus, pro ſecundo 2. quatr. pro tertio 4. & ita deinceps progrediendo ſemper per proportionem duplam. Hi autem quatrini conficiunt aureos 2748779069$\frac{175}{400}$. Quod ſi hac pecunia emerentur redditus annui, ita vt 100. aurei tantum lucrifacerent 5. aureos (cum tamen lege ordinaria plus lucrentur) haberentur aurei hi 137438953. & baioch. 47$\frac{1}{18}$ quantos redditus nullus vnquam Monarcha, aut Reſp. habuit: vt non inſanus iudicandus ſit Dux ille, (vt pleriſq;, qui in Arithmeticis parum ſunt exercitati, videtur) qui ea ratione 40. ſua oppida diuendit, ſed ſapientiſſimus.

Qua ratione facile inueniatur summa 40. terminorū progreſſionis Geometricæ proportionis duplæ ab 1. incipientis.

Quanti cōſtet 40. oppida, ſi vendantur ea vt pro primo ſoluatur 1. quatr. pro ſecūdo 2. quatri pro tertio 4. &c.

Poſtremo ſi quis cupiat expedite ſummam habere 24 terminorum eiuſdem progreſſionis, ſumenda erit primum ſumma trium horum terminorum 1.2.4. quæ eſt 7. Deinde, addita 1 multiplicandum aggregatum in ſe, & à producto numero auferenda 1. vt habeatur ſumma 6. terminorum 63. Addita 1. rurſus multiplicandum aggregatum in ſe, & auferenda 1. ex numero producto, vt fiat ſumma 12. terminorum 4095. Tandem, addita rurſus 1. multiplicandum aggregatum in ſe, & 1. ſubducenda ex numero procreato, vt exurgat ſumma 24. terminorum 16777215 Non ergo ridendus eſſet, qui bellicoſum equum, qui in pedibus habet 24. clauos, ita venderet, vt ei pro primo clauo ſoluatur 1. quatr. pro ſecundo 2. pro tertio 4. pro quarto 8. &c. Nam reciperet pro equo 16777215. quatr. qui conficiunt 41943$\frac{3}{80}$. aur. pro quo pretio vtiuſquiſq; libenter ſuum equum daret. Hæc pauca de progreſſionibus dicta ſint ſatis. Multo enim plura de eiſdem ſcribemus in pleniore noſtra Arithmetica.

Quo modo breuiter colligatur ſumma 24. terminorum progreſſionis Geometricæ proportionis duplæ ab 1. incipientis.

Quanti conſtet equus habens 24. clauos in pedibus, ſi ita vendatur, vt detur 1. quatri. pro primo clauo, 2. pro ſecundo & 4. pro tertio, &c.

EXTRACTIO RADICIS QVADRATAE.

CAPVT XXVI.

NVmerus quadratus dicitur, qui ex aliquo numero in ſeipſum multiplicato producitur. qualis eſt 4. qui ex multiplicatione numeri 2. in ſeipſum gignitur. Item 9. cum ex 3. in ſe producatur. Item 2209. quia generatur ex multiplicatione 47. in ſe, &c. Vnitas quoque ab Arithmeticis numerus quadratus, licet impropie, appellatur, propterea quod ex 1. in ſe producatur. Numerus autem, qui in ſe multiplicatus producit quadratum numerum, vocatur latus, ſiue radix quadrati.

Quadratus numerus quid.

Radix quadrata quid.

Extractio igitur radicis quadratæ eſt inuentio numeri, qui in ſe multiplicatus producat numerum propoſitum, ſi quadratus eſt, vel ſi non eſt quadratus, maximum numerum quadratum in eo contentum. Vt extractio radicis quadratæ ex numero 2209. eſt inuentio numeri 47. quia hic in ſe multiplicatus producit propoſitum numerum 2209. Item extractio radicis quadratæ ex numero 3375. eſt inuentio numeri 58. quia hic in ſe multiplicatus gignit numerum quadratum 3364. qui eſt omnium maximus in 3375. contentus. Nam proxime maior quadratus numerus, cuius latus, ſiue radix eſt 59. vna vnitate maior, quam 58. eſt 3481.

Extractio radicis quadrata quid.

Primum autem numerus propoſitus, cuius radix inueſtiganda eſt, ſignandus eſt punctis quibuſdam, poſito puncto ſub prima figura ad dextram, vel ſupra primam figuram, & alio ſub tertia, & alio ſub quinta, & ita deinceps ſub ſeptima, nona, & ſub aliis locis imparibus: ita vt quodlibet punctum habeat duas figuras, illam videlicet, ſub qua punctum ſignatum eſt, & aliam, quæ hanc verſus ſiniſtram præcedit; excepto vltimo puncto ad ſiniſtram, quod aliquando vnicam figuram habet, quando nimirum numerus figurarum eſt impar. Tot autem figuras habebit radix propoſiti numeri, quot puncta ſignata ſunt. Vt hic numerus 21178404. ita ſignabitur, habebitq; eius radix quatuor omnino figuras. Hic autem numerus 456789012. ita ſignabitur, eiuſq; radix 5. figuris ſcribetur.

Quomodo numerus, cuius radix quæritur, punctis ſit ſignandus.

Quot figuras habeat radix propoſiti numeri.

Signato hac ratione numero, ita radix ipſius eruetur. Sub vltimo puncto ad ſiniſtram ponitur radix maximi quadrati in figuris ad illud punctum ſpectantibus contenti, quæ maior eſſe non poteſt, quam 9. eademque radix ſcribitur ad dexteram numeri propoſiti poſt hanc lineam curuam (vt de diuiſione integrorum numerorum diximus: atq; hæc radix, inſtar Quotientis figuræ, per radicem ſub puncto poſitam, inſtar diuiſoris, multiplicatur, productuſq; numerus ex ſupraſcripto numero ſubtrahitur, deletis prius figuris, à quibus fit ſubtractio, vna cum radice ſub puncto notata, quemadmodum in diuiſione integrorum docuimus. Numerus autem reſiduus non poteſt eſſe maior, quam duplus radicis ſub puncto poſitæ.

Poſt hæc duplicatur radix inuenta, ſcribiturq; numerus hic duplicatus ſub ſequenti puncto, hoc ordine, vt prima eius figura ponatur ſub figura, quæ proxime punctum vltimum ſequitur verſus dextram, aliæ vero, ſi quæ ſint, ordine ſuo verſus ſiniſtram progrediendo, ita vt figura, ſub qua ſequens punctum ponitur, nihil ſcribatur. Sub ea enim ponenda eſt noua figura Quotientis. Poſito hac ratione numero illo duplicato, diuiditur per illum numerus ſupraſcriptus, Quotientiſq; figura ad dexteram poſt propoſitum numerum ſcribitur, atq; etiam ſub puncto, vt fiat quaſi integer diuiſor ex duplicato illo numero, & figura hac Quotientis. Quo facto, multiplicatur figura hæc Quotientis in totum illum diuiſorem, vt in diuiſione integrorum, productuſq; numerus ex ſupraſcripto numero ſubducitur, &c. Antequam autem figuram hanc nouam Quotientis ſcribas, tentandum prius erit, num ea multiplicata in duplicatum illum numerum, & in ſeipſam poſitam poſt illum numerum duplicatum, talem numerum producat, qui à ſuprapoſito numero poſſit ſubtrahi.

Quo pacto radix quadrata ex dato numero eruatur.

Rurſus eodem modo totus numerus poſt lineam hanc curuam (hactenus poſitus duplicatur, duplicatusque numerus ſub ſequenti puncto ſcribitur eo ordine, quem ſupra præſcripſimus, ita vt rurſus ſequens punctū vacuum relinquatur pro noua figura Quotientis. Per hunc numerum vero duplicatum diuiditur ſupraſcriptus numerus, ſumiturq; talis figura pro Quotiente, quæ in numerum illum duplicatum, & in ſeipſam poſt illum numerum duplicatum poſitam multiplicata, numerum procreet, qui ex ſupraſcripto numero detrahi poſſit.

Pari ratione totus numerus in Quotiente hactenus poſitus, duplicatur, & reliqua fiunt, vt prius: atq; ita deinceps, donec omnia puncta ſint abſoluta. Verum hæc omnia exemplis fient clariora.

Sit eruenda radix quadrata ex numero 21178404. Notatis punctis, vt ſupra dictum eſt, pono ſub vltimo ad ſiniſtram figuram 4. tanquam radicem maximi quadrati in ſupraſcripto numero 21. contenti, (quadratus enim numerus maioris radicis nempe 5. eſt 25.) eamq; rurſus ſcribo poſt lineam hanc curuam (. Multiplicata autem figura 4. in Quotiente per figuram 4. ſub puncto, fiunt 16. quæ ex 21. ſublata, vt in diuiſione integrorum præcepimus, relinquunt 5. ſpectabuntq; ad ſequens punctum tres hæ figuræ 517.

5.
21178404 (46
486.

Deinde duplicata figura Quotientis 4. vt fiant 8. ſcribo 8. ſub 1. vt in exemplo vides; diuidoq; 51. per 8. & inuenio 8. contineri in 51. ſexies. Pono ergo 6. tam in Quotiente poſt 4. quam ſub puncto figuræ 7. Multiplicata autem figura hac Quotientis 6 per totũ diuiſorem 86. productoq; detracto ex ſupraposito numero 517. remanet 1. pertinebuntq; hæ tres figuræ 184 ad ſequens punctum.

531
21178404 (460.
48620

Rurſus duplicato Quotiente 46. hactenus inuento, vt fiant 92. ſcribo 2. ſub 8. & 9. ſub 1. vt in exemplo vides; diuidoq; 18 per 92. Sed quia 92. non continentur in 18. pono 0. in Quotiente, & ſub puncto figuræ 4. deleoq; totum diuiſorem 920. ſpectabit autem ad poſtremum punctum totus hic numerus 18404.

9
531
21178404 (4602
4862002

Poſtremo duplicato Quotiente 460. hactenus inuento, vt fiant 920. ſcribo 0. ſub 0. & 2. ſub 4. & 9. ſub 8 vt vides in exemplo. Diuidendo autem 1840. per 920. inuenio hunc numerum in illo contineri bis. Pono ergo figuram 2. tam in Quotiente, quam ſub puncto primæ figuræ 4. Multiplicata vero hac figura 2. per totum diuiſorẽ 9202. productoq; numero dempto ex numero ſupraſcripto, nihil ſupereſt. Radix ergo quadrata numeri propoſiti eſt 4602. ipſeq; numerus propoſitus quadratus eſt, cum nihil ſupereſt fuerit poſt vltimam ſubtractionẽ factam.

992
531
21178404 (4602.
4862002
992

Sit rurſus inquirenda radix quadrata ex numero 456789012. Signatis punctis, vt docuimus, ſcribo ſub vltimo puncto ad ſiniſtram figuram 2. tanquam radicem maximi quadrati in ſupraſcripto numero 4. contenti, eamque rurſus pono in Quotiente. Multiplicata autem figura 2. in Quotiente per figuram 2. ſub puncto fiunt 4. quæ ex 4. ſubducta nihil relinquunt, pertinebuntq; hæ duæ figuræ 56 ad punctum ſequens.

456789012 (21
241

Duplicata figura Quotientis 2 fiunt 4. quæ ſcribo ſub 5. relicto puncto ſequenti vacuo pro noua figura Quotientis. Diuidendo autem 5. per 4. inuenio Quotientem 1. quem ſcribo tam poſt Quotientẽ 2. quam ſub puncto figuræ 6. Multiplicata autem figura hac Quotientis 1. per totum diuiſorem, ablatoque numero producto ex 56. remanent 15. ita vt ad ſequens punctum ſpectent quatuor hæ figuræ 1578.

15
456789012 (213
24123
4.

Deinde duplicato Quotiente 21 hactenus inuento, vt fiant 42. pono 2. ſub 7. & 4. ſub 5. Diuidendo autem 157. per 42. reperio Quotientem 3. quem pono & in Quotiente, & ſub puncto figuræ 8. Multiplicata autem hac figura Quotientis 3. per totum diuiſorem 423. ſubtractoque numero producto ex 1578. relinquuntur 309. Pertinebunt ergo ad ſequens punctum quinq; iſtæ figuræ 30990.

30
2519
456789012 (2137
2412367
442

Rurſus duplicato Quotiente 213. hactenus inuento, vt fiant 426. ſcribo 6 ſub 9. & 2. ſub 9. & 4. ſub 0. Diuidendo autem 3099. per 426. inuenio Quotientem 7. quem ſcribo tam in Quotiente, quam ſub puncto figuræ 0 Multiplicata vero hac Quotientis figura 7. per totum diuiſorem 4267. detractoq; producto numero ex 30990. remanent 1121. atq; adeo ad punctum ſequens pertinebunt ſex hæ figuræ 112112.

1
21
3052
251971
456789012 (21372
241236742
44227

Poſtremo duplicato Quotiente 2137. hactenus inuento, vt fiant 4274. colloco 4. ſub 1. & 7 ſub 1. & 2 ſub 2 & 4. ſub 1. Diuidendo autem 11211. per 4274. reperio Quotientem 2. quem ſcribo & in Quotiente & ſub puncto figuræ 2. Multiplicata autem hac Quotientis figura 2. per totum diuiſorem 42742. & dempto producto numero ex 112112. ſuperſunt 26628. Numerus ergo propoſitus quadratus non eſt, ac proinde Quotiens inuentus 21372. non eſt eius radix, ſed alterius numeri, qui eſt maximus quadratus in dato numero comprehenſus, qualis eſt numerus 456762384 Nam proxime maior quadratus, qui videlicet habet radicem vna vnitate maiorem radice inuenta 21372. conſtituit numerum maiorem propoſito numero.

4
2
236
2186
305272
2519738
456789012 (21372
2412367422
44227

Extractio radicis quadratæ per Dandam. Poteſt etiam fieri radicis quadratæ extractio, more Italorum per Dandam, vt in diuiſione numerorum integrorum explicauimus, qui modus ſecuriſſimus eſt. In eo enim omnis confuſio vitatur, ſi forte nimis parua, magnaue figura accipiatur: propterea quod nullæ figuræ delentur. Modus autem eſt hic. Sit eruenda radix quadrata ex hoc numero 456789 ſignatis punctis, vt dictum eſt, pono in Quotiente figuram 6. radicem videlicet maximi quadrati in vltimo puncto 45. contenti, eandemq; figuram 6. ſcribo ad dexteram, quemadmodum in diuiſione per Dandam ad dexteram quoq; diuiſorem collocauimus: & dico. Ex 6. figura Quotiẽns in 6 figuram in parte dextra collocata fiunt 36. quæ ex 45. ſubtraho hoc modo. Quoniam 6. ex 5. detrahi nequeunt, detraho 6. ex 10. & reſiduo 4. addo 5 vt fiant 9. quæ ſub 5. ſcribo, ac mente retineo 4. nimirum 3. propter 30. & 1. propter 10. quæ 4 ſubducta ex 4. nihil relinquunt, ideoq; punctum ſubſequens erit 967.

4 | 6.
| 127.
456789 (675. | 1345
9
78
1164

Deinde duplicatur figura 6.inuenta,vt fiant 12.per quæ diuido ſequens punctum 967.omiſſa tamen figura 7.ſub qua punctum eſt ſcriptum : Et dico.In 9.continetur 1.ſepties (Nam octies contineri non poteſt) ſcribo ergo 7.tam in Quotiente, quam ſeorſum poſt diuiſorem 12.atq; figuram 7 multiplico in totum numerum 127. hoc modo ex 7.in 7.fiunt 49. Et quia 9.ex 7.detrahi non poſſunt, detraho 9 ex 10. relinquamq; 1. addo ad 7. vt fiant 8.quæ ſcribo ſub 7. ita tamen vt figura 8. demiſſior ſit quam 9. atq; retineo 5.nimirum 4 propter 40.& 1. propter 10.Rurſus ex figura 7.inuenta in 2.fiunt 14.additiſq; 5.quæ reſeruauimus,efficio 19.Et quia 9.ex 6.ſubtrahi nequeunt,detraho 9.ex 10 & reliquæ 1.addo 6. vt fiant 7. ſub 6 iuxta 8.ſcribenda, retineoq; 2. nimirum 1. propter denam numeri 19.& 1.propter 10.à quibus detraximus 9 &c. Tandem ex eadem figura 7.inuenta in 1. fiunt 7 additiſq; 2.quæ ſeruauimus,fiunt 9.qua ſubducta ex 9.nihil ſupereſt, idcircò nihil ſcribendum eſt ſub 9. eritq; ſequens punctum,quod eſt vltimum 7889.

Poſtremo tota radix 67.hactenus inuenta duplicanda eſt,vt fiant 134 per quæ diuido punctum vltimum 7889.relicta tamen figura 9.ſupra punctum poſita: Et dico. In 7.continetur 1.quinquies. Pono ergo 5. in Quotiente, & poſt diuiſorem 134.& figuram 5 duco in totum numerum 1345.hoc modo. Ex 5.in 5. fiunt 25. ablatiſque 5.ex 9.ſuperſunt 4.quæ pono ſub 9.& reſeruo 2 propter 20.Atque iterum dico. Ex figura 5 inuenta in 4 fiunt 20.additiſque 2.quæ ſeruauimus, fiunt 22. Detractis autem 2. ex 8.ſuperſunt 6 quæ ſub 8.ſcribo: & mente retineo 2.propter 20.ſiue duas denas.Rurſus dico.Ex inuenta figura 5.in 3.fiunt 15.additiſque 2. quæ ſeruata ſunt.fiunt 17. Demptis autem 7.ex 8.remanet 1.quã pono ſub 8.& reſeruo 1.propter 10 ſiue propter vnam denam. Tandem dico. Ex eadem figura 5.inuenta in 1.fiunt 5 additaq; 1. quam ſeruauimus,fiunt 6. quæ ſubtracta ex 7.relinquunt 1. quam ſub 7.pono.Atq; ita tota radix inuenta eſt 675.ſuperſuntq; 1164. Ex quibus formatur fractio hæc $\frac{1164}{1351}$. ita vt radix propinqua (vt in appropinquatione radicum in ſequenti cap.dicemus) ſit $675\frac{1164}{1351}$.minor tamen; quam vera,cum eius quadratus numerus hic tantummodo 456788[illegible].

Atque modus hic extractionis præclarus eſt : quippe cum in eo omnia reſidua operationum diſtincte, & ſine confuſione appareant, adeo vt ſi in Quotientem accepta forte eſſet figura nimis magna, aut parua, (nimis quidem magna foret, ſi numeri producti à puncto propoſito ſubtrahi non poſſent, nimis vero parua, ſi facta ſubtractione, reſiduum maius eſſet duplo radicis inuentæ) facili negocio error poſſit corrigi, quemadmodum ſupra in Diuiſione per Dandam dictum eſt.

Examen extractionis radicis quadratæ triplex.

Examen extractionis radicis quadratæ triplex eſt, quemadmodum & diuiſionis integrorum Primum enim fit per abiectionem 9.alterum per abiectionem 7.& tertium per multiplicationem,vt in diuiſione integrorum dictum eſt. Sed radix inuenta accipienda eſt hic loco diuiſoris:quia ſi numerus propoſitus diuidatur per radicem inuentam, fiet Quotiens eadem radix: Et ſi quid ſuperfuent in extractione radicis, idem ſupererit in diuiſione, dummodo in Quotiente ſumantur eædem figuræ radicis inuentæ, licet in vltima diuiſione partiali maior aliquando figura ſumi poſſet, quando nimirum reſiduum extractionis radicem exceſſerit. Itaq; prius exemplum ita examinabitur per 9 Reiectis 9.ex radice 4602.remanent 3.quæ in vtroq; latere crucis ſcribo,propterea quod radix eſt & diuiſor,& Quotiens,vt diximus. Multiplicatis iam inter ſe duabus hiſce figuris 3 & 3.fiunt 9.reiectiſque 9. remanet 0. in ſuperiori parte crucis collocanda. Tandem reiectis 9.ex propoſito numero,remanet etiam 0. Poſterius autem exemplum ita examinabitur per 9. Reiectis 6.ex radice 21372.remanent 6.in vtroq; latere crucis ponenda. Multiplicatis autem inter ſe hiſce figuris 6.& 6. fiunt 36.reiectiſq; 9.ex 36.& ex reſiduo extractionis,ſuperſunt 6. Tantundem remanet,ſi reiiciantur 9.ex dato numero.

0
3 X 3
0

6.
6 X 6
6.

Quod ſi multiplicetur radix prioris numeri in ſe, producetur idem numerus prior. Itẽ ſi radix numeri poſterioris in ſe multiplicetur, productoq; numero addatur reſiduũ extractionis gignetur idẽ numerus poſterior.

Reſiduum in extractione quadrata radicis maius eſſe non poteſt quam duplum radicis inuentæ.

Obiter etiam hic animaduertendum eſt, in nulla extractione radicis quadratæ reſiduum,ſi quod eſt,maius eſſe poſſe,quam duplum radicis inuentæ. Si enim ſuperaret duplum radicis inuentæ, vel vna vnitate, haberet numerus propoſitus radicem vna vnitate maiorem illa, quæ inuenta eſt. Ratio huius rei eſt, quod quilibet quadratus ſuperat proxime minorem numerum quadratum duplo radicis ipſius minoris quadrati, & inſuper vna vnitate; adeo vt, ſi addatur 1.ad duplum radicis cuiuſuis quadrati,& hoc aggregatum ad quadratum proxime minorem, fiat quadratus proxime maior. Vt quadratus numerus 64.ſuperat numerum quadratum 49.numero 15.Cõſtat autem numerum 14.duplum eſſe radicis quadrati 49.quæ eſt 7 ſupereſſeq; vnam adhuc vnitatem in 15.ac proinde,ſi addatur 1.ad 14. duplum radicis 7.& hoc aggregatum ad 49 fieri quadratum numerum 64.proxime maiorem, q̃ 49.cuius radix eſt 7. Si igitũr proponat quis numerum 63.vt eius radix quadrata eruàtur,reperietur radix 7.ſupereruntq; 14 quæ radicis ſunt dupla:Si vero quis ꝓponeret numerũ 64.inueniretur q; radix 7. erratum eſſet,quia ſupereſſent 15.quæ maiora ſunt,q̃ duplum radicis 7. Quare radix numeri 64.erit 8.

Quæ ſit differentia inter duos quadratos proximos.

APPROPINQVATIO RADICVM IN NVMERIS NON QVADRATIS.

CAPVT XXVII.

QVONIAM cum numerus propoſitus non eſt quadratus, inuenta radix in ſe multiplicata producit numerum minorem numero ipſo, quemadmodum in poſteriori exemplo patuit, vbi radix in ſe multiplicata gignit numerum, qui à numero propoſito ſuperatur toto hoc numero 26628. monſtrabimus hoc loco duplicem viam, qua radix propinquior inueniatur, ita vt eius numerus quadratus à propoſito numero non quadrato inſenſibili fere differentia diſtet. Vera enim radix numero exprimi non poteſt,ſed ſolum per lineam,vt in pleniore noſtra Arithmetica demonſtrabitur. Priori via reperietur radix propinquior quidem in infinitum, ſed tamen minor, quam vera; adeo vt eius quadratus numerus ſemper à numero propoſito ſuperetur. Poſteriori via inuenietur radix propinquior quoq; in infinitum, ſed quæ veram excedat; ita vt eius numerus quadratus maior ſemper ſit numero propoſito Vtraq; porro via demonſtrata eſt Geometrice & à Theone Alexandrino in lib. 1. Almageſti Ptolemæi, & à Federico Commandino in lib. Archimedis de dimenſione circuli.

Quo modo inueniatur radix propinquior, quæ tamen minor ſit quã vera.

Prior ergo via ita ſe habet. Inuenta radice maximi quadrati in propoſito numero comprehenſi, adijciatur

ad eam fractio, cuius numerator eſt reſiduum extractionis, quo nimirum propoſitus numerus quadratum numerum proxime minorem, quem radix inuenta producit in ſe multiplicata, excedit, denominator vero duplum radicis inuentæ, & præterea vnitas, qua nimirum radix numeri quadrati, qui proxime maior eſt propoſito numero, ſuperat radicem inuentam numeri quadrati, qui proxime minor eſt numero propoſito. Hac enim ratione compoſita erit radix multo propinquior, quam inuenta, minor tamen, quam vera. Ad quam ſi addatur id, quod prouenit ex diuiſione exceſſus, quo propoſitus numerus non quadratus excedit quadratum radicis propinquioris iam inuentæ, per numerum compoſitum ex duplo eiuſdem radicis propinquioris, & exceſſu, quo radix quadrati numeri proxime maioris ſuperat radicem propinquiorem inuentam, exurget radix adhuc propinquior, minor tamen quam vera. Ad quam ſi iterum apponatur id, quod prouenit ex diuiſione exceſſus, quo propoſitus numerus non quadratus ſuperat quadratum radicis propinquæ vltimo loco inuentæ, per numerum compoſitum ex duplo eiuſdem vltimæ radicis propinquæ & exceſſu, quo radix quadrati numeri proxime maioris excedit radicem eandem vltimam propinquam, efficietur adhuc propinquior radix, minor tamen, quam vera. Atque hoc modo licebit ſemper inuenire radicem propinquiorem in infinitum, nunquam tamen vera radix inuenietur, ſed ſemper radix aliquanto minor, quam vera.

Exemplum. Sit propoſitus numerus non quadratus 20. Radix quadrati proxime minoris eſt 4. quæ in ſe multiplicata producit 16. ſuperſuntq; 4. Si ergo ad radicem 4. addatur fractio $\frac{4}{9}$. cuius numerator eſt reſiduum illud, denominator vero duplum inuentæ radicis 4. & præterea 1. fiet propinquior radix $4\frac{4}{9}$. Huius enim quadratus numerus eſt $19\frac{61}{81}$. qui minor quidem eſt, quam propoſitus numerus 20. ſed minus ab eo differt, quam quadratus numerus 16. radicis primæ 4.

Ablato hoc quadrato $19\frac{61}{81}$. ex numero propoſito non quadrato 20. ſuperſunt $\frac{20}{81}$. Item radix 5. quadrati proxime maioris numero propoſito, excedit radicem propinquam $4\frac{4}{9}$. proxime inuentam hac minutia $\frac{5}{9}$. quæ addita ad duplum radicis propinquæ $4\frac{4}{9}$ hoc eſt ad $8\frac{8}{9}$. facit numerum $9\frac{4}{9}$. per quem ſi diuidatur reſiduum illud $\frac{20}{81}$. fiet Quotiens $\frac{180}{6885}$ qui additus ad radicem propinquam $4\frac{4}{9}$ proxime inuentam faciet radicem propinquiorem $4\frac{3240}{6885}$. hoc eſt, $4\frac{8}{17}$. Huius enim numerus quadratus eſt $19\frac{285}{289}$. qui minor quoq; eſt, quam numerus propoſitus 20. nõ quadratus, ſed magis ad eum accedit, q̃ quadratus $19\frac{61}{81}$. radicis $4\frac{4}{9}$. ante hanc radicẽ $4\frac{8}{17}$. inuentæ.

Rurſus ſubtracto hoc quadrato numero $19\frac{285}{289}$. ex propoſito numero 20. non quadrato, ſuperſunt $\frac{4}{289}$. Item radix 5 quadrati proxime maioris numero propoſito excedit radicem propinquam $4\frac{8}{17}$. vltimo inuentam minutia hac $\frac{9}{17}$. quæ addita ad duplum vltimæ radicis propinquæ $4\frac{8}{17}$. hoc eſt, ad $8\frac{16}{17}$. facit numerum $9\frac{8}{17}$. per quem ſi diuidatur reſiduum illud $\frac{4}{289}$, fiet Quotiens $\frac{68}{46529}$. qui additus ad radicem propinquam $4\frac{8}{17}$. vltimo inuentam, facit radicem propinquiorem $4\frac{21964}{46529}$. hoc eſt $4\frac{1292}{2737}$. Huius enim numerus quadratus eſt $19\frac{7485389}{7491169}$. qui minor quoq; eſt propoſito numero 20. non quadrato, magis tamen ad eum accedit, quam quadratus $19\frac{285}{289}$. radicis propinquæ $4\frac{8}{17}$. ante hanc radicem $4\frac{1292}{2737}$. inuentæ. Atq; in hunc modum licebit ſemper magis ac magis ad veritatem accedere, ad quam tamen nunquam perueniemus, ſed ſemper ab ea deficiemus.

Quomodo reperiatur radix propinquior, quæ tamen maior ſit, quam vera.

Poſterior autem via hæc eſt. Inuenta radice maximi quadrati in propoſito numero comprehenſi, adijciatur ad eam fractio, cuius numerator eſt reſiduum extractionis, quo nimirum propoſitus numerus quadratum numerum proxime minorem, quem radix inuenta producit in ſe multiplicata, excedit, denominator vero duplum radicis inuentæ. Componetur enim hac ratione radix multo propinquior, quam inuenta, maior tamen, quam vera. A qua ſi auferatur id quod prouenit ex diuiſione exceſſus, quo quadratus numerus radicis propinquioris iam inuentæ excedit numerum propoſitum, per duplum eiuſdem radicis propinquioris, relinquetur radix adhuc propinquior, maior tamen, quam vera. A qua ſi rurſus detrahatur id, quod prouenit ex diuiſione exceſſus, quo numerus quadratus radicis propinquæ vltimo loco inuentæ ſuperat numerum propoſitum, per duplum eiuſdem radicis vltimæ propinquæ, remanebit adhuc propinquior radix, maior tamẽ, quam vera. Atque hoc modo licebit ſemper inuenire radicem propinquiorem in infinitum, nunquam tamen vera radix inuenietur, ſed ſemper radix aliquanto maior, quam vera.

Exemplum. Sit propoſitus idem numerus non quadratus 20 Radix quadrati proxime minoris eſt 4. quæ in ſe multiplicata facit 16. ſuperſuntq; 4. Si ergo ad radicem 4. adijciatur fractio $\frac{4}{8}$ cuius numerator eſt reſiduum illud, denominator vero duplum inuentæ radicis 4. fiet propinquior radix $4\frac{4}{8}$. hoc eſt $4\frac{1}{2}$. Huius enim numerus quadratus eſt $20\frac{1}{4}$. qui maior quidem eſt, quam propoſitus numerus 20. ſed minus ab eo differt, quam quadratus numerus 16. radicis primæ 4.

Iam vero, ſi $\frac{1}{4}$. exceſſus nimirum, quo numerus quadratus $20\frac{1}{4}$. radicis $4\frac{1}{2}$. proxime inuentæ ſuperat numerum propoſitum 20. diuidatur per duplum radicis propinquæ $4\frac{1}{2}$. iam inuentæ, hoc eſt, per 9. fiet Quotiens $\frac{1}{36}$ qui ablatus ex radice $4\frac{1}{2}$. proxime inuenta relinquet propinquiorem radicem $4\frac{17}{36}$ hoc eſt, $4\frac{17}{36}$. Huius enim numerus quadratus eſt ex $20\frac{1}{1296}$. qui maior quoq; eſt numero propoſito 20. ſed minus ab eo diſtat, quam quadratus $20\frac{1}{4}$ radicis $4\frac{1}{2}$. ante hanc inuentæ.

Quod ſi rurſus $\frac{1}{1296}$. exceſſus nimirum, quo numerus quadratus $20\frac{1}{1296}$. radicis $4\frac{17}{36}$ proxime inuentæ ſuperat propoſitum numerum 20. diuidatur per duplum radicis $4\frac{17}{36}$ iam inuentæ, id eſt, per $8\frac{34}{36}$. hoc eſt per $8\frac{17}{18}$. fiet Quotiens $\frac{1}{11592}$. qui ſubductus ex radice $4\frac{17}{36}$ proxime inuenta relinquet radicẽ propinquiorem $4\frac{5473}{11592}$. hoc eſt, $4\frac{5473}{11592}$. Huius enim quadratus numerus eſt ſequens $20\frac{1}{134374464}$. qui maior etiam eſt numero propoſito 20. ſed minus ab eo diſtat, quam quadratus $20\frac{1}{1296}$. radicis $4\frac{17}{36}$. ante hanc inuentæ. Atq; in hunc modum licebit ſemper magis ac magis accedere ad veritatẽ, ad q̃ tamen nunq̃ perueniemus, ſed ſemper eam excedemus.

Alia extractio radicis quadratæ propinqua.

Libet hoc loco explicare aliam rationem inueniendi radicem ſatis propinquam per vnicam extractionem radicis, quæ Mathematicis valde familiaris eſt, atq; vſitata. Eſt autem huiuſmodi. Poſt numerum cuius radix quæritur, apponantur aliquot binarij ciſarum vt 0000. vel 000000. vel 00000000. &c. quo autem plures ciſrarum binarij apponantur, eo propinquior radix eruetur. Poſtea ex toto numero cum appoſitis ciſris extrahatur radix, vt traditum eſt, ex qua ad dextram tot figuræ abſcindantur, quot binarij ciſrarum appoſiti fuere ad numerum propoſitum. Reliquæ namq; figuræ radicem exhibebunt, vna cum minutia, cuius numerator erit numerus per figuras abſciſſas expreſſus, denominator autem erit 10. ſi vnus tantum binarius ciſrarum fuit appoſitus vel 100. Si duo binarij fuere appoſiti, vel 1000. ſi tres binarii &c. ita vt fractio illa contineat vel decimas, vel centeſimas, vel milleſimas, &c.

Sit

Sit v.g. eruenda radix quadrata ex 20. Appoſitis tribus cifrarum binariis, exurget numerus 20000000. cuius radix per Dandam eruta eſt 4472. (Negligimus hic reſiduum 1216.) Demptis tribus figuris 472. ad dexterã propter tres binarios Cifrarum appoſitos, erit radix $4\frac{472}{1000}$. ſatis propinqua, minor tamen quam vera, cum eius quadratus numerus fit tantum $\frac{19998784}{1000000}$ hoc eſt, $19\frac{998784}{1000000}$. qui paulo minor eſt numero dato 20. Quod ſi ad numeratorẽ adijcias 1. fiet radix $4\frac{473}{1000}$. maior quam vera, quippe cum quadratus eius numerus ſit $20\frac{7729}{1000000}$. paulo maior dato numero 20.

4
84
887
8942

20000000(4472

4
64
191
1216

Hac porro ratione rectè inueniri propinquam radicem quadratam demonſtratum à nobis eſt in Geometria practica lib. 6. propoſ. 20.

Extractio radicis quadratæ propinquæ ex minutiis.

Eadem hæc ratio locum etiam babet in numeris fractis. Nam ſi tam Numeratori, quam Denominatori apponantur aliquot Cifrarum binarij, fiet ex radice Numeratoris illis Cifris aucti Numerator, & ex radice Denominatoris totidem Cifris aucti Denominator. Vt ſi deſideretur radix huius minutiæ $\frac{2}{3}$. Additis duobus binariis cifrarum fit minutia $\frac{20000}{30000}$. Radix numeratoris eſt 141. & Denominatoris 173. Ergo radix propinqua minutiæ $\frac{2}{3}$. erit $\frac{141}{173}$. cuius quadratus numerus eſt $\frac{19881}{29929}$. paulo minor quam $\frac{2}{3}$. & ſic de aliis.

Lege quæ in Geometria practica lib. 4. cap. 2. num. 5 & lib. 6. propoſ. 21. ſcripſimus. Ibi enim reperies rationem facilem extrahendi radicem quadratam ex qualibet minutia non quadrata.

EXTRACTIO RADICIS CVBICÆ.

CAPVT XXVIII.

Numerus Cubus quid.

CVBVS eſt numerus qui ex aliquo numero in ſe ipſum multiplicato, deinde in productum gignitur, qualis eſt 8. qui ex multiplicatione numeri 2 in ſe ipſum, & in productum numerum 4. producitur. Item 27. qui producitur ex 3 in ſe & in productum 9. Item 103823. quia gignitur ex 47. in ſe, & in productum 2209 &c. Vnitas quoq; ab Arithmeticis numerus cubus, licet impropriè, nominatur, propterea quod ex 1. in ſe, & in productũ 1. producitur. Numerus a. qui in ſe multiplicatus, & in productũ, cubum procreat, vocatur latus, ſiue radix cubi.

Extractio radicis cubicæ quid.

Extractio igitur radicis Cubicæ ex dato numero eſt inuentio numeri qui in ſe primum multiplicatus, deinde in productum procreet datum numerũ. ſi cubus eſt, vel ſi non eſt cubus, maximum numerum cubum in eo contentum. Vt extractio radicis cubicæ ex numero 59319. eſt inuentio numeri 39. quia hic in ſe ductus, & in productum 1521. gignit numerum 59319. propoſitum. Item extractio radicis cubicæ ex numero 116592. eſt inuentio numeri 48. quia hic in ſe ductus, & in productũ 2304. producit numerũ 110592. qui eſt maximus cubus in dato numero 116592. contentus: quippe cum proxime maior cubus, cuius latus, ſiue radix eſt 49. vna vnitate maior quam 48. ſit 117649. Difficilior autem eſt extractio radicis cubicæ, quam quadratæ, & quam variis viis præſcribunt Auctores. Nos eam trademus, quam nouam quodammodo lib. 6. Geometriæ Practicæ ad finem propoſ. 19. extraximus. Eſt autem eiuſmodi.

Quomodo numerus, cuius radix quaritur punctis ſit ſignandus.

Primum numerus propoſitus, cuius radix cubica eruenda eſt, ſignandus eſt punctis quibuſdam, poſito puncto ſub prima figura ad dextram, vel ſupra ipſam figuram & alio ſub quarta figura, omiſſis duabus figuris in medio, atq; alio ſub ſeptima, omiſſis duabus aliis in medio, & ſic deinceps ſub decima, decima tertia, &c. relictis ſemper duabus figuris poſt quodlibet punctum, ita vt quoduis punctum habeat tres figuras, illam videlicet, ſub qua punctum eſt ſignatum, & alias duas, quæ hanc verſus ſiniſtram præcedunt, excepto vltimo puncto ad ſiniſtram, quod aliquando vnicam figuram babet, aliquando vero duas tantum. Tot autem figuras habebit radix propoſiti numeri, quot puncta ſignata ſunt. Vt hic numerus 256047896. ſignabitur, vt in hac formula cernis, habebitq; eius radix cubica tres figuras. Hic vero numer' 34567890127 86. ita ſignabitur, eiuſq; radix quinq; figuris ſcribetur.

256047896

Quot figuras habeat radix cubica dati numeri.

Quo pacto radix cubica ex dato numero eruatur.

Deinde in promptu eſſe debet appoſita hæc tabella cõtinens cubos nouem figurarũ Arithmeticarum vt primum punctum ad ſiniſtram expediri poſſit. Quibus paratis ſit eruenda radix cubica ex numero 256047896. Notatis punctis vt diximus, ex primo puncto 256. ad ſiniſtram ſubtraho cubũ 216. (cuius radix 6) maximum in eo contentum. Et quia remanent 40. erit ſequens punctum 40047. & prima radicis figura 6.

Radices	Cubi
1.	1
2.	8
3.	27
4.	64
5.	125
6.	216
7.	343
8.	512
9.	729

Paro diuiſorem, multiplicando quadratum radicis 6. cubi ſubtracti, nimirum 36. per 300. qui erit 10800. per quẽ ſi diuidam meum punctũ 40047. inueniam Quotientem 3. pro ſecunda figura radicis. Hanc duco in 10800. diuiſorem inuentum, facioq; 32400. Deinde duco quadratum nouæ figuræ inuentæ 3. nimirum 9. in productum ex prima figura inuenta 6. in 30. videlicet in 180. facioq; 1620. Poſtremo ad ſummam duorum horum productorum 32400. 1620. id eſt, ad 34020. adjcio cubum inuentæ nouæ figuræ 3. nimirum 27. totamque ſummã 34047. ex meo puncto 40047. ſubtraho. Et quia ſuperſunt 6000. erit vltimum punctum 6000896. ſcribo ergo inuentam figuram 3 poſt priorẽ 6. id eſt, poſt radicem maximi cubi 216. ex primo puncto ſubtracti.

Radix propoſiti numeri 635.

32400
1620
34020
27
34047

Poſt hæc paro eodem modo diuiſorem nouum pro vltimo puncto, hoc modo. Quadratum totius radicis 63. hactenus inuentæ hoc eſt 3969. duco iterum in 300. Productus namq; numerus 1190700. erit diuiſor, per quem ſi diuidam meum punctum 6000896. reperiam Quotientem 5. ſcribendum poſt radicem 63. hactenus inuentum. Hanc figuram 5. inuentam ſimiliter duco in diuiſorem inuentum 1190700. facioq; 5953500. Deinde quadratum eiuſdem nouæ figuræ 5 nimirum 25. duco in productum ex radice 63. prius inuenta, multiplicata per 30. hoc eſt in 1890. efficioq; 47250. Poſtremu ad ſummam horum duorum productorum 5953500. 47250. adijcio cubum 125 figuræ 5. inuentæ. ac totam ſummam 6000875. ex meo puncto ſubtraho, id eſt, ex 6000896. ſuperſuntque 21. Numerus ergo propoſitus cubus non eſt, ac proinde Quotiens inuentus

40047
34047
6000

5953500
47250
125
6000875

uenrus 635. non eſt eius radix cubica, ſed alterius numeri qui eſt maximus cubus in dato numero comprehenſus, qualis eſt, 256047875. Nam proxime maior cubus habens radicem vna vnitate maiorem radice inuenta 635. conſtituit numerum maiorem propoſito numero.

Quod ſi ſupereſſet aliud punctum, ducendus eſſet quadratus totius radicis 635. hactenus inuentæ in 300. vt nouus diuiſor exurgeret, &c. Ex hoc porro exemplo declarato ſatis puto intelligi regulam noſtram pro extractione cubica ab aliorum quidem regulis nonnihil differentem, ſed meo iudicio faciliorem.

Quantum poſſit eſſe reſiduum in Extractione Cubica. *Quanta ſit differentia inter duos cubos proximos.*

Sciendum autem eſt, in nulla Extractione radicis cubicæ reſiduum, ſi quod eſt, maius eſſe poſſe, quam triplum quadrati radicis inuentæ, vna cum triplo eiuſdem radicis: alias haberet numerus propoſitus radicem vna vnitate maiorem illa, quæ inuenta eſt. Ratio eſt, quod quilibet cubus ſuperat proxime minorem cubum triplo, quadrati ex radice minoris cubi producti, vna cum eiuſdem radicis triplo, & inſuper vna vnitate, adeo vt ſi addatur 1. ad triplum quadrati ex radice cuiuſuis cubi producti, & ad triplum eiuſdem radicis, atq; hæc ſumma ad eum cubum adijciatur, fiat cubus proxime maior. Vt cubus numerus 27. ſuperat cubum 8. numero 19. Conſtat autem numerum 18. conflatum eſſe ex triplo quadrati radicis 2. hoc eſt ex 12. & ex triplo ipſius radicis 2. nimirum ex 6. atq; adeo, ſi addatur 1. confici differentiam inter duos cubos proximos 8. & 27.

Quo pacto cognoſcatur, num figura ſumpta ſit nimis parua in Quotiente.

Itaq; ſi quando in Extractione tam magnus numerus fuerit reſiduus, vt dubites, te in Quotiente figuram ſumpſiſſe nimis paruam. (Nam ipſa operatio, quando ſubtractio fieri nequit, docet nimis magnam fuiſſe figuram aſſumptam) capiendum eſt triplum quadrati radicis ad eam vſq; operationem inuentæ, vna cum triplo eiuſdem radicis. Si enim ſumma horum duorum numerorum minor fuerit reſiduo extractionis, ſcito, te nimis paruam figuram in Quotientem ſumpſiſſe. Si vero dicta ſumma æqualis fuerit reſiduo, vel maior, recte in Quotiente figuram fuiſſe aſſumptam. Idem cognoſces ſi periculum feceris cum figura maiore. Si namq; multiplicationes fiant, vt in regula præcipitur, & ſubtractio fieri non poſſit, recte accepta fuit figura prior, ſi vero fieri poſſit ſubtractio, figura accepta fuit nimis parua.

Probatio Extractionis radicis cubicæ triplex.

Examen extractionis radicis Cubicæ tribus etiam modis fieri poteſt, vt & diuiſionis integrorum, & Extractionis radicis Quadratæ: primo videlicet modo per abiectionem 9. altero per abiectionem 7 ac tertio per multiplicationem, vt in diuiſione integrorum dictum eſt: ſed radix inuenta ſumenda hic eſt pro diuiſore. Vt exemplum ſuperius ita per 9 examinabitur. Reiectis 9. ex radice 635. remanent 5. quæ in vtroq; latere crucis colloco: propterea quod radix loco diuiſoris ſumitur, & pro Quotiente, vt diximus. Multiplicatis iam duabus hiſce figuris 5. & 5. inter ſe, & producto 25. ducto in eandem figuram 5. vt gignatur Cubus 125 figuræ 5. atq; ex hoc cubo vna cum reſiduo extractionis 21. reiectis 9. ſuperſunt 2. collocanda in ſuperiori parte Crucis. Et quia ſi abijciantur 9. ex numero propoſito, remanent quoq; 2. in inferiori parte Crucis ſcribenda, recte fuit radix extracta.

	2	
5	X	5
	2	

At per 7. ita idem exemplum examinabitur. Reiectis 7. ex radice 635. remanent 5. quæ in vtroq; Crucis latere ſcribo. Multiplicata autem figura hac 5. cubice, & ex cubo 125. reiectis 7. ſuperſunt 6. quæ addita ad 0 nimirum ad reſiduum, quod remanet ſi ex 21. reſiduo extractionis abijciantur 7. faciunt 6. Et quoniã ſuperſunt etiã 6. ſi ex numero propoſito abijciantur 7. rectius inuenta eſt radix cubica.

	6	
5	X	5
	6	

Quod ſi multiplicetur radix inuenta 635. cubice, hoc eſt primum in ſe, deinde in productum, numeroq; genito addatur reſiduum 21. procreabitur propoſitus numerus, ex quo radix eruta fuit.

APPROPINQVATIO RADICVM IN NVMERIS NON CVBIS.

CAPVT XXIX.

Appropinquatio radicis cubicæ.

VT ex numeris, qui Cubi non ſunt, propinqua radix eruatur, non eſt ad hanc vſq; diem inuenta via magis accurata, quam ea, quã in Geometria Practica lib 6. cap. 20. demonſtrauimus, quæ eſt eiuſmodi. Numero propoſito apponantur aliquot ternarij Ciſrarum (quo autem plures Ciſrarum ternarij apponentur, eo propinquior radix eruetur) & ex toto hoc numero radix cubica extrahatur, vt traditum eſt. Deinde ex ea radice abiectis ad dextram tot figuris quot Ciſrarum ternarij appoſiti fuere, reliquæ figuræ radicem integram dabunt, cui addenda eſt fractio numeratorem habens figuras abiectas, denominatorem vero vnitatem cum totidem Ciſris, quot ternarii Ciſrarum additi fuerunt, nimirum 10. ſi vnus ternarius fuit additus vel 100. ſi duo ternarii additi fuerunt, vel 1000. ſi tres, & ſic deinceps: ita vt fractio illa cõtineat, vel decimas, vel centeſimas, vel milleſimas, &c.

Exempli cauſa; Ex numero 29160. qui cubus non eſt, eruenda ſit radix cubica propinqua. Apponantur tres ternarij Ciſrarum vt in fractione habeantur partes milleſimæ, denominatæ videlicet à 1000. atque ex toto numero 29160000000000. extrahatur radix Cubica, quæ reperietur 30779. minor quam vera, quod in extractione fuerit aliquis numerus reſiduus, atq; adeo maior radix, quam vera, erit 30780. Abiectis tribus figuris ad dexteram propter tres Ciſrarũ ternarios appoſitos, erit propinqua radix $30\frac{779}{1000}$. minor, q̃ vera, cum eius cubus ſit $29158\frac{188419}{1000000000}$ [illegible] maior a. propinqua radix q̃ vera, erit $30\frac{780}{1000}$. quippe cum eius cub. ſit $29161\frac{230552000}{1000000000}$

Extractio radicis propinqua Cubica ex minutiis.

Ratio hæc locum etiam habet in numeris fractis. Nam ſi tam Numeratori, quam Denominatori apponantur aliquot Ciſrarum ternarij, fiet ex radice numeratoris illis Ciſris aucti Numerator & Denominator ex radice Denominatoris illis Ciſris aucti, quemadmodum ſupra de radice quadrata fractorum numerorũ diximus.

Aliam rationem expeditam pro extrahenda radice cubica ex dato numero fracto repeties in noſtra Geometria Practica lib. 6. Propoſitione 21.

Agendum iam eſſet de Extractione aliarum radicum, quæ infinitæ ſunt, vt in noſtra Geometria Practica propoſit. 19. explicauimus. Sed quoniam tractatio hæc difficilior eſt, inuentioq; radicis quadratæ, & Cubicæ magis eſt neceſſaria ad libros Archimedis, Ptolomæi, cæterorumq; Mathematicorum intelligendos, conſulto à nobis in pleniorem noſtram Arithmeticam, & in Geometricam Practicam differtur. In ea namq; Arithmetica pleniore non ſolum omnes radices, cum earum appropinquationibus (quod in Geometria quoq; practica lib. 6. fecimus) tractabimus, ſed innumera alia, à quibus in hoc Compendio dedita opera abſtinuimus, exponemus.

FINIS.

INDEX OMNIVM CAPITVM HVIVS ARITHMETICAE.

1 Numeratio integrorum numerorum. pag 3
2 Additio integrorum numerorum. 5
3 Subtractio integrorum numerorum. 7
4 Multiplicatio numerorum integrorum. 10
5 Diuiſio integrorum numerorum. 13
6 Numeratio fractorum numerorum. 22
7 Æſtimatio,ſiue valor fractorum numerorum. 23
8 Fractiones fractorum numerorum. 24
9 Reductio fractorum numerorum ad minimos numeros, ſiue terminos. 25
10 Reductio fractorum numerorum ad eandem denominationem,&ad integra,nec non integrorũ ad fractionem quamcunq;, ac deniq; fractionũ fractorum numerorũ ad ſimplices fractiões. 26
11 Additio fractorum numerorum. 28
12 Subtractio fractorum numerorum. 29
13 Multiplicatio fractorum numerorum. 29
14 Diuiſio fractorum numerorum. 30
15 Inſitio fractorum numerorum. 31
16 Quæſtiunculæ nonnullæ numerorum integrorũ, ac minutiarum. 34
17 Regula trium; quæ alio nomine regula aurea, ſiue regula proportionum dici ſolet. 35
18 Regula trium euerſa. 39
19 Regula trium compoſita. 40
20 Regula Societatum. 40
21 Regula alligationis. 52
22 Regula falſi ſimplicis poſitionis. 55
23 Regula falſi duplicis poſitionis. 58
24 Progreſſiones Arithmeticæ. 65
25 Progreſſiones Geometricæ. 68
26 Extractio radicis quadratæ. 73
27 Appropinquatio radicum in numeris non quadratis. 76
28 Extractio radicis cubicæ. 77
29 Appropinquatio radicum in numeris nõ cubis 78

INDEX EORVM, QVÆ IN SINGVLIS Capitibus continentur.

IN PRÆFATIONE.

Arithmetica præſtantia, atque vtilitas. pag. 2

In numeratione integrorum numerorum.

Numeratio quid. 3
Valor decem figurarum Arithmeticarum quo pacto cognoſcatur. ibid.
Quot loca ſint in quolibet numero. ibid.
Prima figura,& vltima in quouis numero quæ ſit. ibid.
Ordo locorum in quouis numero cur à dextra ſiniſtram verſus procedat. ibid.
Quid quælibet figura in quouis loco poſita ſignificet. ibidem.
Loca in quouis numero ſuperant ſeſe ordine in decupla proportione. ibid.
Quid obſeruandum ſit, vt datus numerus facile exprimatur. ibid.

In additione integrorum numerorum.

Additio quid. 4
Numeri addendi quo pacto ſint collocandi. ibid.
Additio quo pacto fiat. ibid.
Quid agendum ſit quando ex figuris vnius loci colligitur numerus tribus figuris ſcribendus. 5
Quid faciendum ſit, quando multi numeri addendi ſunt. ibidem.
Probatio additionis per 9.quomodo fiat. ibid.
Qua ratione ex quouis numero reijciantur facile 9. quoties fieri poteſt. ibid.
Nouenarii mirabilis proprietas. ibid.
Probatio additionis per 9.fallax eſt,& quare. 6
Probatio additionis per 9. cur ab Arithmeticis adhibeatur, cum fallax ſit. ibid.
Probatio additionis per 7.quomodo fiat. ibid.
Quo pacto reiicienda ſint 7.ex quolibet numero. ibid.
Probatio additionis per 7.fallax eſt,& quare. ibid.
Probatio additionis per 7. cur ab Arithmeticis adhibeatur, cum fallax ſit. ibid.
Probatio additionis per 7. minus fallax eſt, quam per 9.& quare. ibid.
Tabella probationis per 7. 7
Probatio additionis per additionem quo pacto fiat. ibid.
Probatio additionis per ſubtractionem quo pacto fiat. ibidem.

In ſubtractione integrorum numerorum.

Subtractio quid. ibid.
Vter duorum numerorum maior ſit, quo pacto cognoſcatur. ibid.
Subtrahendus numerus quo pacto locandus ſit ſub eo à quo fit ſubtractio. ibid.
Subtractio quomodo fiat. 8
In ſubtractione quid agendum ſit, quando figura inferior maior eſt, quam ſuperior. ibid.
Facilior ratio ſubtractionis quando figura inferior ſuperiore maior eſt. ibid.
In ſubtractione quid agendum ſit, quando plures ſunt numeri. 9
Probatio ſubtractionis per 9.& 7.quo pacto fiat. ibid.
Probatio ſubtractionis per additionem,& ſubtractionem quo pacto fiat. ibid.

In multiplicatione integrorum numerorum.

Multiplicatio quid. 10
Tabula Pythagorica. ibid.
Tabula Pythagorica quo pacto conſtruatur. ibid.
Vſus tabulæ Pythagoricæ ad cognoſcendũ, quid faciat multiplicatio vnius figuræ in aliam figuram. ibid.
Regula multiplicandi figuram in figuram. ibid.
Numeri in multiplicatione quomodo collocandi ſint 11
Numerus quiuis per vnam figuram quo pacto multiplicetur. ibid.
Numerus quiuis per numerum pluribus figuris ſcriptum quo pacto multiplicetur. ibid.
Probatio multiplicationis per 9.& 7. quo pacto fiat. 12
Probatio multiplicationis per diuiſorem quo pacto fiat. 12. & 13.
Numeri habentes in principio ciſras, quo pacto facilius multiplicentur. 13

In diuiſione integrorum numerorum.

Diuiſio quid. ibid.
Quotiens quid. ibid.
Numeri in diuiſione quomodo ſint collocandi. ibid.
Diuiſio quomodo fiat. ibid.

In quotiente non poteſt poni maior numerus quam 9. ibidem.
Reſiduus numerus in diuiſione ſemper minor eſſe debet quam diuiſor. ibid.
Numerus per vnam figuram quomodo diuidatur. ibid.
Qui numerus dicatur ſupra diuiſorem poſitus. ibid.
Vſus tabulæ Pytagoricæ ad cognoſcendum, quoties figura diuiſoris in ſupra poſito numero contineatur. ibid.
Quotiens quot poßit figuras habere. 14
Numerus per plures figuras quo pacto diuidatur. ibid.
Qui numerus dicatur ſupra quamcunq; figuram diuiſoris poſitus. ibid.
Quomodo ducenda ſit figura Quotientis inuenta in diuiſorem. ibid.
Quid agendum ſit cum numero ex diuiſione relicto. 15
Quando numerus minor per maiorem proponitur diuidendus, quid agendum ſit. ibid.
Quomodo nonnulli ducant figuram Quotientis inuentam in diuiſorem. ibid.
Difficultas diuiſionis in quo conſiſtat. ibid.
Quid agendum ſit, quando in Quotiente ſumpta eſt figura nimis parua vel magna. 16
Quo pacto diuiſio facile inſtituatur, vt non erretur. 18
Diuiſio ab aliis quo modo fiat. 19
Commoditas in modo diuiſionis, quo alij vtuntur. ibid.
Quo pacto hic modus fiat expeditior. ibid.
Alius modus abſoluendi diuiſionem. ibid.
Diuiſio per Dandam quo pacto fiat. 20
Probatio diuiſionis per 9. quo pacto fiat. ibid.
Probatio diuiſionis per 7. quomodo fiet. 21
Probatio diuiſionis per multiplicationem quo pacto fiat. ibidem.
Diuiſio nondum abſoluta quo pacto examinetur. ibid.
Facilitas diuiſionis, quando diuiſor in principio habet aliquot cifras. ibid.
Facilis aliquando fit diuiſio quando diuidendus numerus habet aliquot cifras in principio. 22
Additio, Subtractio, Multiplicatio, & Diuiſio fundamenta ſunt omnium, quæ in Arithmetica traduntur. ibid.

In numeratione fractorum numerorum.

Fractus numerus quid. ibid.
Numerator, & Denominator fractionis quid. ibid.
Fractio quæuis quo pacto ſcribatur, & pronuncietur. ibidem.
Fractiones vnde oriantur. ibid.
Quando minor numerus per maiorem diuiditur, fit fractio. ibid.
Fractio quæuis eſt pars aliquota Numeratoris à Denominatore denominata. ibid.

In æſtimatione ſiue valore fractorum numerorum.

Minutiarum valor quo pacto augeatur. 23.
Minutiarum valor quo pacto minuatur. ibid.
Minutiæ, quarum numeratores ad denominatores eandem habent proportionem, æquales ſunt. ibid.
Si numerator, ac denominator cuiuſuis fractionis per quemcunq; numerum multiplicetur, diuidaturue gignitur eiuſdem valoris fractio. ibid.
Quæ minutia vni integro æquiualeat. ibid.
Quæ minutia minor ſit vno integro. ibid.
Quæ minutia maior ſit vno integro. ibid.
Vtra duarum minutiarum maior ſit, quo pacto cognoſcatur. ibid.
Valor minutiæ datæ quo pacto in minore moneta, pondere, vel menſura exploretur. ibid.

Iulius, Baiochus, & Quatrinus apud Romanos quid ſignificent. 24

In fractionibus fractorum numerorum.

Minutiæ minutiarum quid, & vnde oriantur. ibid.
Minutiæ minutiarum quomodo pronuncientur, ac ſcribantur. ibid.

In reductione fractorum numerorum ad minimos numeros, ſiue terminos.

Minutiæ cur ad minimos terminos reducantur. ibid.
Minutiæ qua arte ad minimos terminos redigantur. 25
Quæ minutia ad minores terminos redigi non poßit. ibid.
Primus numerus, & primi inter ſe numeri quid. ibid.
Maxima menſura communis Numeratoris, ac Denominatoris minutiæ datæ quo pacto reperiatur. ibid.
Quando Numerator, & Denominator datæ minutiæ non habeant communem menſuram, præter vnitatem. ibid.
Maxima menſura quorumlibet duorum numerorum quo pacto inueniatur. ibid.
Vnde colligatur regula inueniendi maximam menſuram duorum numerorum. 26
Alia ratio redigendarum minutiarum ad minimos terminos. ibid.

In reductione fractorum numerorum ad eandem denominationem & ad integra, nec non integrorum ad fractionem quamcunq;, ac deniq; fractionum fractorum numerorum ad ſimplices fractiones.

Duæ Minutiæ quo pacto ad eandem denominationem reducantur. ibid.
Inuentio numeri à quotcunq; datis numeris numerati. ibid.
Inuentio minimi numeri à quotcunq; numeris numerati. ibid.
Plures minutiæ, quam duæ, quo pacto ad eandem denominationem reducantur. 27
Alia ratio reducendi duas minutias ad eandem denominationem. ibid.
Vtilitas minimi numeri à denominatoribus datarum minutiarum numerati. ibid.
Minutia, cuius numerator maior eſt denominatore, quo pacto ad integra reducatur. ibid.
Integra qua ratione ad minutiam quamcunq; redigantur. ibid.
Minutiæ minutiarum quo pacto ad ſimplices minutias reuocentur. ibid.

In additione fractorum numerorum.

Additio minutiarum quomodo fiat. ibid.
In additione minutiarum quid faciendum ſit, quando integra adſunt. ibid.
Praxis addendi minutias diuerſarum denominationum inter ſe. ibid.
Probatio additionis minutiarum per ſubtractionem quomodo fiat. ibid.

In ſubtractione fractorum numerorum.

Subtractio minutiarum quomodo fiat. 29
In ſubtractione minutiarum quid faciendum ſit, quando integra adſunt. ibid.
In ſubtractione, quando plures ſunt minutiæ, quid agendum. ibid.
Praxis ſubtrahendi minutias à minutiis. ibid.
Probatio ſubtractionis minutiarum per additionem quomodo fiat. ibid.

In multiplicatione fractorum numerorum.

Multiplicatio minutiarum, quo pacto fiat. 30

In multi-

Google

In multiplicatione minutiarum, quando adſunt integra, quid agendum. ibid.
Probatio multiplicationis minutiarum per diuiſionem quo pacto fiat. ibid.
In multiplicatione minutiarum cur producatur minutia minor vtraq; minutia multiplicante. ibid.

In diuiſione fractorum numerorum.

Diuiſio minutiarum quomodo fiat. ibid.
In diuiſione minutiarum, quando adſunt integra, quid agendum. ibid.
Diuiſio minutiarum qua ratione ab aliis tradatur. 31
Probatio diuiſionis minutiarum per multiplicationem quo pacto fiat. ibid.
In diuiſione minutiarum cur aliquando producatur Quotiens maior, quam minutia diuiſa. ibid.
Quando Quotiens maior ſit numero diuidendo in minutiis. ibid.
Quando Quotiens in minutiis minor ſit diuidendo numero. ibid.

In inſitione fractorum numerorum.

Inſitio minutiarum quid. ibid.
Inſitio minutiarum duplex eſt. ibid.
Inſitio minutiarum propter quid excogitata ſit: 32.
Differentia inter inſitionem minutiarum, & reductionem minutiarum. ibid.
Prima regula inſitionis duarum minutiarum. ibid.
Quomodo plures minutiæ, quam duæ, inſerantur per primam regulam. ibid.
Minutiæ inſerendæ per primam regulam non ſunt reducendæ ad minimos terminos ante finem operationis, & quare. ibid.
Summa inſitionis ſecundum primam regulam ſemper minor eſt, quam vnitas & quare. ibid.
Vſus primæ regulæ inſitionis in diuidendo numero integro vna cum minutia per numerum integrum. ibid.
Secunda regula inſitionis duarum minutiarum. 33
Quo pacto plures minutiæ, quam duæ inſerantur per primam regulam. ibid.
Minutiæ inſerendæ per ſecundam regulam reduci poſſunt ad minimos terminos ante finem operat. ibid.

In quæſtiunculis nonnullis numerorum integrorum, ac minutiarum.

Vtilitas quæſtiuncularum quarundam. 34
Inuentio numeri à quo facta eſt ſubtractio, vel facienda, vt propoſitus numerus relinquatur. ibid.
Inuentio numeri ſubtracti, vel ſubtrahendi, ex propoſito numero, vt alius datus numerus ſit reliquus. ibid.
Inuentio numeri cuius datus numerus adijciendus ſit, vel qui dato numero ſit addendus, vt alius numerus datus remaneat. ibid.
Inuentio differentiæ inter datos duos numeros. ibid.
Inuentio numeri diuiſi, aut diuidendi per datum numerum, vt Quotiens propoſitus proueniat. ibid.
Inuentio numeri, qui contineat vel ſit, aut det datam fractionem, ſeu partem, parteſue propoſiti numeri. ibid.
Inuentio numeri, per quem datus numerus ſit diuiſus aut diuidendus, vt Quotiens ſit propoſitus numerus. ibid.
Inuentio numeri, per quem datus numerus ſit multiplicandus, vel qui per datum numerum multiplicandus ſit, vt gignatur numerus propoſitus. ibid.
Inuentio duorum numerorum, qui inter ſe multiplicati datum numerum producant. ibid.
Inuentio duorum numerorum, vt vno per alterum diuiſo, proueniat Quotiens propoſitus. 35
Inuentio numeri per quem datus numerus ſit multiplicandus, vel qui multiplicandus ſit per datum numerum, vt producto diuiſo per alium datum numerum proueniat Quotiens propoſitus. ibid.
Inuentio partis, quam datus numerus exhibet reſpectu alterius numeri dati. ibid.
Inuentio numeri, reſpectu cuius datus numerus exhibeat partem propoſitam. ibid.
Inuentio multitudinis partium quarumcunq;, quas datus numerus continet. ibid.

In regula trium, quæ alio nomine regula aurea, ſiue regula proportionum dici ſolet.

Regula trium, ſiue aurea, ſiue proportionum cur ſic dicta ſit. ibid.
Numeri in regula trium quo pacto ſint collocandi. ibidem.
Quo pacto per regulam trium quartus numerus ignotus inquiratur. ibid.
Demonſtratio regulæ trium. 36
Numero per alium diuiſo, ſi diuiſor per Quotientem multiplicetur, cur rurſum numerus diuiſus producatur. ibidem.
Probatio regulæ trium. ibid.
Compendia varia regulæ trium. ibid.
Probationes variæ regulæ trium. 37
Demonſtratio compendiorum regulæ trium. ibid.
Quæſtiones nonnullæ, quibus variæ difficultates regulæ trium explicantur. ibid. & ſeqq.
Quid agendum, quando diuerſæ monetæ, menſuræ, pondera, & fractiones in regula trium occurrunt. 38

In regula trium euerſa.

Regula trium euerſa quo pacto quartum numerum eliciat. 39
Quæſtiones aliquot ad regulam trium euerſam ſpectantes. ibid. & ſeq.

In regula trium compoſita.

Regula trium compoſita, quid, & quomodo fiat. 41
Quæſtiones aliquot ad regulam trium compoſitam ſpectantes. ibid. vſq; ad 44.

In regula Societatum.

Regula Societatum quando adhibeatur, & quo pacto fiat. ibid.
Quoties regula trium in regula Societatum adhibenda ſit. ibid.
Quid agendum, quando in regula Societatum eſt diuerſitas temporum. ibid.
Quæſtiones aliquot ad regulam Societatum ſpectantes. ibid. & ſeqq.

In regula alligationis.

Regula alligationis. 52
Regula alligationis quomodo fiat. ibid.
Quæſtiones aliquot ad regulam alligationis ſpectantes. ibid. & ſeqq.
Variis modis fieri poteſt alligatio, ſi res alligandæ plures ſint, quam duæ. 52
Quid agendum, quando in regula alligationis ponuntur plures differentiæ è regione eiuſdem pretij. ibid.
Quid obſeruandum ſit in alligationibus plurium rerum. 53
Quando quæſtio alligationis ſit impoſſibilis. ibid.

In regula falſi ſimplicis poſitionis.

Regula falſi cur ſic dicta ſit. 55
Regula falſi duplex eſt. ibid.
Diſcrimen inter duas regulas falſi. 56
Regula falſi ſimplicis poſitionis quomodo fiat. ibid.

Qua-

Quæſtiones aliquot ad regulam falſi ſimplicis poſitionis ſpectantes. ibid. & ſeqq.

In regula falſi duplicis poſitionis.

Regula falſi duplicis poſitionis quo pacto fiat. 58

In regula falſi duplicis poſitionis, quando vtraque poſitio veritatem excedit, vel ab ea deficit, fit ſubtractio. ibidem.

In regula falſi duplicis poſitionis, quando vna poſitio veritatem excedit, & altera ab ea deficit, fit additio. ibidem.

Quæſtiones aliquot ad regulam falſi duplicis poſitionis ſpectantes. ibid. & ſeqq.

In progreſſionibus Arithmeticis.

Progreſſio Arithmetica quid. 65

Progreſſio naturalis numerorum, & numerorum imparium, pariumq; quid. ibid.

Arithmetica progreſſio quo pacto continuetur. ibid.

Differentia progreſſionis Arithmeticæ quomodo inuenietur. ibid.

Arithmetica progreſſio decreſcere non poteſt in infinitum. ibid.

Proprietas progreſſionis Arithmeticæ trium numerorum. ibid.

Proprietas progreſſionis Arithmeticæ quatuor numerorum. ibid.

Proprietas progreſſionis Arithmeticæ quotcunque terminorum, ſi numerus terminorum fuerit impar. ibid.

Proprietas progreſſionis Arithmeticæ quotcunque terminorum, ſi numerus terminorum fuerit par. 66.

Summa cuiuſcunq; progreſſionis Arithmeticæ quo pacto inueniatur. ibid.

Particularis inuentio ſummæ progreſſionis naturalis numerorum. ibid.

Numerus terminorum progreſſionis naturalis numerorum eſt vltimus terminus. ibid.

Particularis inuentio ſummæ numerorum imparium. 67

Numerus terminorum in progreſſione numerorum imparium quo pacto reperiatur. ibid.

Particularis inuentio ſummæ numerorum parium. ibid.

Numerus terminorum in progreſſione numerorum parium qua ratione inueniatur. ibid.

Vltimus terminus cuiuſcunq; progreſſionis Arithmeticæ quo pacto elicitur ex numero terminorum, vna cum primo termino, & differentia progreſſionis. ibid.

Quæſtio de bobus Augiæ. ibid.

Quæſtio de ducibus militiæ. ibid.

In progreſſionibus Geometricis.

Progreſſio Geometrica quid. 68

Geometrica progreſſio quo pacto continuetur. ibid.

Denominator proportionis in progreſſione Geometrica quomodo inueniatur. ibid.

Progreſſio Geometrica decreſcit in infinitum. ibid.

Proprietas progreſſionis Geometricæ trium terminorum. ibidem.

Proprietas progreſſionis Geometricæ quatuor terminorum. ibid.

Proprietas progreſſionis Geometricæ quotcunq; terminorum, ſi numerus terminorum ſit impar. ibid.

Proprietas progreſſionis Geometricæ quotcunq; terminorum ſi numerus terminorum ſit par. ibid.

Summa cuiuſcunq; progreſſionis Geometricæ quo pacto inueniatur. 68

Particularis inuentio ſummæ progreſſionis proportionis duplæ, cuius initium eſt 1. 69

In progreſſione proportionis duplæ incipiente ab 1. quilibet numerus, abiecta prius vnitate, eſt ſumma omnium antecedentium numerorum. ibid.

Si in progreſſione Geometrica incipiente ab 1. numerus aliquis ſeipſum, vel alium numerum multiplicet quem locum numerus productus occupet. ibid.

Quilibet numerus in progreſſione Geometrica incipiente ab 1. ſeipſum multiplicans producit numerum in duplo maiore loco, minus vnitate, quam numerus multiplicans ponendum. ibid.

Progreſſio naturalis numerorum quo pacto indicet, quo in loco quilibet numerus productus collocandus ſit in progreſſione Geometrica incipiente ab 1. ibid.

Quo pacto numerus cuiuſcunque loci in progreſſione Geometrica incipiente ab 1. inueſtigetur ſine intermediis. ibid.

Quo pacto ea quæ de progreſſione Geometrica incipiente ab 1. dicta ſunt, accommodentur progreſſioni Geometricæ non incipienti ab 1. 70

Quo pacto numerus cuiuſcunque loci in progreſſione Geometrica incipiente à quouis numero inueſtigetur ſine intermediis numeris. ibid.

Summa quotcunque terminorum progreſſionis Geometricæ proportionis duplæ ab 1. incipientis, addita prius vnitate, ſeipſam multiplicans producit numerum, qui abiecta prius vnitate, ſumma eſt duplo plurium terminorum. ibidem.

Quo pacto facile inueniatur ſumma 64. terminorum progreſſionis Geometricæ duplæ proportionis ab 1. incipientis. ibid.

Quanta pecunia requiratur vt impleantur 64. loca ludi latrunculorum, ita vt in primo loco ponatur 1. quatr. in ſecundo 2. in tertio 4. & ita deinceps progrediendo per proportionem duplam. 71

Quot grana frumenti conſtituant vnum Rubium. ibid.

Quot naues requirantur ad ferendum frumentum in 64. locis ludi latrunculorum poſitum. ibid.

Quot naues requirantur ad ferendam pecuniam in 64. locis ludi latrunculorum poſitam, ſi ad aureos reduceretur. ibidem.

In progreſſione, cuius primus terminus eſt 1. ſecundus 2. tertius vero ſecundi triplus, & ſimiliter quartus tertij triplus, & ita deinceps: quilibet terminus duplus eſt omnium præcedentium. ibid.

Qua arte inueniatur ſumma 64. terminorum ab 1. incipientium, atq; ita progredientium, vt quilibet duplus ſit omnium antecedentium terminorum. ibid.

Alia inuentio eiuſdem ſummæ. 72

Quantum frumentum requiratur, vt impleantur, 64. loca ludi latrunculorum, ita vt in primo loco ponatur 1. granum, in ſecundo 2. in tertio 6. in quarto 18. & ita deinceps, vt grana ſubſequentis loci ſint dupla omnium granorum in præcedentibus omnibus locis ſimul. ibid.

Quot naues neceſſariæ ſint ad prædictum frumentum portandum. ibid.

Quot naues totam ſuperficiem terræ & maris operirent, ſi ſe mutuo tangerent. ibid.

Quot globi ex terra ac mari confecti tegerentur à nauibus, quæ neceſſariæ ſunt ad proxime dictum frumentum portandum. ibid.

Quot globos toti terræ æquales conſtitueret frumentum in 64 locis proxime dictis contentum. ibid.

Quot naues ferrent aureos ducatos ex quatrinis, qui replerent 64. loca eo modo, quo de granis frumenti dictum eſt. ibid.

Quot globos terræ ac maris prædictæ naues tegerent. ibid.

Qua ratione facile inueniatur ſumma 40. terminorum progreſſionis Geometricæ proportionis duplæ ab 1. incipientis 73

Quanti conſtent 40. oppida ſi vendantur ita, vt pro primo ſoluatur 1. quatr. pro ſecundo 2. pro tertio 4. &c. ibidem.